MATERIAL DE CLASE DEL CURSO 18.155. OTOÑO 2002

RICHARD B. MELROSE

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

El material de clase que presentamos corresponde al curso de análisis diferencial para estudiantes de posgrado (curso 18.155) impartido en el MIT en el otoño de 2002. Se trata de material basado en apuntes empleados anteriormente en cursos similares en los años 1997 y 2001. Al dar la clase, es posible que el profesor simplifique algunos detalles.

Quisiera agradecer especialmente a Austin Frakt sus comentarios sobre la anterior versión de estos apuntes y las correcciones a los mismos. Entre las personas que ayudaron con sus comentarios o con la detección de errores desearía también mencionar a Philip Dorrell.

1. FUNCIONES CONTINUAS

Para empezar, me gustaría insistir sobre cuestiones que creo que los estudiantes ya conocen para luego pasar a explicar la dirección que tomará el curso. Comencemos por fijar el contexto.

Una noción básica que supongo les resultará suficientemente familiar es la de espacio métrico ([5] pág. 9). El espacio métrico consiste en un conjunto X y una función de distancia

$$d: X \times X = X^2 \to [0,\infty]$$

que cumple los tres axiomas siguientes:

(1.1)

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (y $d(x, y) \geq 0$)

ii) $d(x, y) = d(y, x)\ \forall\ x, y \in X$

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall\ x, y, z \in X$

La teoría básica de los espacios métricos tiene que ver con las propiedades de subconjuntos (abiertos, cerrados, compactos, conectados), secuencias (convergentes, de Cauchy) y mapas (continuos) y con las relaciones entre estas nociones. Recordemos uno de estos resultados.

Proposición 1.1. *Un mapa $f : X \rightarrow Y$ entre espacios métricos es continuo si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes.*

(1) $f^{-1}(O) \subset X$ *es abierta* $\forall\ O \subset Y$ *abierta.*

(2) $f^{-1}(C) \subset X$ *es cerrada* $\forall\ C \subset Y$ *cerrada.*

(3) $\lim_{n\rightarrow\infty} f(x_n) = f(x)$ *en* Y *si* $x_n \rightarrow x$ *en* X.

El ejemplo clásico de espacio métrico es el espacio euclídeo. El espacio euclídeo real n-dimensional, $\mathbb{R}^n$, es el conjunto de n-múltiplos ordenados de números reales

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,,\ x_j \in \mathbb{R}\,,\ j = 1, \ldots, n\,.$$

Es también el ejemplo clásico de un espacio vectorial (o lineal) con las operaciones

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$cx = (cx_1, \ldots, cx_n)\,.$$

La métrica viene dada normalmente por la métrica euclídea

$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{1/2}\,,$$

en el sentido de que

$$d(x, y) = |x - y|\ .$$

Abstraigamos esta expresión inmediatamente a la noción de espacio vectorial normado, o espacio normado. Se trata de un espacio vectorial V (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) dotado de una *norma*, lo que es como decir una función

$$\|\ \| : V \longrightarrow [0, \infty)$$

que satisfaga

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} i)&\ \|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0,\\ ii)&\ \|cv\| = |c|\,\|v\|\ \forall\ c \in \mathbb{K},\\ iii)&\ \|v+w\| \le \|v\| + \|w\|. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que (V,d), $d(v, w) = \|v - w\|$ es un espacio vectorial. Asimismo, en este caso estoy empleando $\mathbb{K}$ para indicar $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, según sea apropiado.
El supuesto de espacios normados dimensionales y finitos no resulta especialmente interesante ya que, aparte de la dimensión, todos ellos son "lo mismo". En general, diremos que dos normas $\|\bullet\|_1$ y $\|\bullet\|_2$ en V son equivalentes cuando existe $C > 0$ de tal modo que

$$\frac{1}{C}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1\ \forall\ v \in V\ .$$

Proposición 1.2.*Dos normas cualesquiera en un espacio vectorial dimensional finito son equivalentes*.

Nos interesa principalmente el supuesto dimensional infinito. Comenzaré el curso de un modo ligeramente heterodoxo, concentrándome en un espacio normado de este tipo (durante una clase). Partiremos de un espacio métrico X. El supuesto de una función continua, $f : X \to \mathbb{R}$ (o a $\mathbb{C}$) es un supuesto especial de la Proposición 1.1 anterior. Entonces, definiremos

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, f \text{ continua})$$

De hecho, la misma notación se emplea normalmente para el espacio de funciones de variables complejas. Si deseamos distinguir entre estas dos posibilidades podemos recurrir a una notación más pretenciosa; $C(X\,;\mathbb{R})$ y $C(X\,;\mathbb{C})$. La norma "obvia" en este espacio lineal es la norma suprema (o norma "uniforme")

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|\ .$$

En este caso, X es un espacio métrico arbitrario. Por el momento, supondremos que X es un espacio "físico", parecido a $\mathbb{R}^n$. Con respecto a la dimensionalidad finita de $\mathbb{R}^n$, a menudo damos por supuesto (o pedimos) que X sea *localmente compacto*, lo que simplemente significa que cada punto tiene un vecindario compacto; es decir, que se halla dentro de un conjunto compacto. Tanto si es localmente compacto como si no, podemos considerar

$$(1.3)\qquad \mathcal{C}_0(X) = \left\{ f \in \mathcal{C}(X);\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ K \Subset X s.t. \sup_{x \notin K} |f(x)| \le \epsilon \right\}\ .$$

Aquí, la notación $K \Subset X$ significa "K es un subconjunto compacto de X".

Si V es un espacio lineal normado, nos interesarán especialmente las funcionales lineales continuas en V. El término "funcional" es aquí sinónimo de función, si bien se permite que V sea un valor "grande" (al contrario que $\mathbb{R}^n$), por lo que se habla de "funcional" únicamente por razones de tipo histórico.

Proposición 1.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes en una funcional lineal* $u : V \to \mathbb{R}$ *de un espacio normado* V.

(1) *u es continua.*

(2) *u es continua en* 0.

(3) $\{u(f) \in \mathbb{R} \,; f \in V, \|f\| \leq 1\}$ *es acotada.*

(4) $\exists\, C$ tal que $|u(f)| \leq C\, \|f\|\ \forall f \in V$.

Prueba. (1) $\Longrightarrow$ (2) por definición. Luego (2) implica que $u^{-1}(-1,1)$ es un vecindario abierto de $0 \in V$, así que para algunos valores $\epsilon > 0$, $u(\{f \in V;\ \|f\| < \epsilon\}) \subset (-1,1)$. Por linealidad de u, $u(\{f \in V;\ \|f\| < 1\}) \subset (-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon})$ es una función acotada, luego (2) $\Longrightarrow$ (3). Por lo tanto, (3) implica que

$$|u(f)| \leq C\ \forall\ f \in V, \|f\| \leq 1$$

para parte de C. Aplicando de nuevo la linealidad de u, si $f \neq 0$,

$$|u(f)| \leq \|f\| u\left(\frac{f}{\|f\|}\right) \leq C\|f\|,$$

lo que nos da (4). Por último, asumiendo (4),

$$|u(f) - u(g)| = |u(f-g)| \leq C\|f-g\|$$

demuestra que u es continua en cualquier punto $g \in V$.

A la vista de esta identificación, se suele decir que las funcionales lineales continuas son *acotadas*. Un concepto importante que más adelante utilizaremos es el de "dualidad". Esto sugiere, en particular, que resulta conveniente examinar la totalidad de las funcionales lineales acotadas en V. El espacio *dual* será

$$V' = V^* = \{u : V \to \mathbb{K}, \text{ lineal y acotada}\}.$$

Se trata también de un espacio lineal normado en el que las operaciones lineales son

$$\begin{matrix} (u+v)(f) = u(f) + v(f) \\ (cu)(f) = c(u(f)) \end{matrix}\ \forall\ f \in V. \tag{1.4}$$

La norma natural en V' es

$$\|u\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |u(f)|.$$

Esta es la "constante óptima" en el cálculo de la acotación,

$$\|u\| = \inf\{C; |u(f)| \leq C\|f\| \ \forall\ f \subset V\}\ .$$

Una de las preguntas básicas que deseo plantear en esta primera parte del curso es: ¿cuál es el dual de $C_0(X)$ para un espacio métrico localmente compacto X? La respuesta nos viene dada por el teorema de la representación de Riesz, en términos de medidas (de Borel).

Veamos a continuación una representación aproximada de la "regularidad de funciones", que es el tema sobre el que trata el curso, aunque aún no hayamos explicado la mayoría de estos espacios. Las funciones uniformes (y los espacios pequeños) se hallan en la parte superior. La dualidad fluctúa hacia arriba y hacia abajo y, como veremos más adelante, L^2, el espacio de funciones integrables cuadradas de Lebesgue, está normalmente "en la mitad". Comenzaré por explicar primero el lado derecho del diagrama, donde tenemos el espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}^n$, que se anula cuando tiende a infinito, y su espacio dual, $M_{\text{fin}}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las medidas de Borel finitas. Aunque existen otros muchos espacios que nos podemos encontrar, aquí me he limitado a incluir funciones test, funciones de Schwartz, espacios de Sobolev y sus duales, siendo k un entero positivo general.

$$(1.5)\qquad \begin{tikzcd}
\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[drr, hook] & & \\
H^k(\mathbb{R}^n) \arrow[d, hook] & \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \arrow[r, hook] \arrow[dl, hook] \arrow[dd, hook] & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \\
L^2(\mathbb{R}^b) \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook] & & \\
H^{-k}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, hook] & M(\mathbb{R}^n) \arrow[dl, hook] & M_{\text{fin}}(\mathbb{R}^n) \arrow[l, hook'] \arrow[dll, hook] \\
\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). & &
\end{tikzcd}$$

He marcado como objetivo comprender el espacio dual $M(\mathbb{R}^n)$ de $C_0(X)$, donde X es un espacio métrico localmente compacto. De esta forma, me obligo a tratar los distintos elementos de la teoría de medidas y de la integración de Lebesgue...lo que supone "obligarse" en un sentido verdaderamente amplio.

El punto en el que se centra nuestro interés es $\mathbb{R}^n$. Un ejemplo evidente de función lineal continua en $C_0(\mathbb{R}^n)$ nos viene dado por la integración de Riemann aplicada, por ejemplo, a un cubo unitario $[0,1^n]$:

$$u(f) = \int_{[0,1]^n} f(x)\,dx\,.$$

Deberemos demostrar de algún modo que todas las funciones lineales continuas en $C_0(X)$ vienen dadas por la integración. Tendremos, no obstante, que interpretar la integración de un modo bastante amplio, ya que también hay que contar con la existencia de las *funciones de valoración*. Así, si $z \in X$, consideremos el delta de Dirac

$$\delta_z(f) = f(z)\,.$$

Lo que también se denomina *masa puntual* de z. De modo que necesitaremos una teoría de medida e integración lo bastante amplia como para comprender estos dos casos.

Una propiedad específica de $C_0(X)$, en comparación con espacios normados generales, es que sus elementos incluyen la noción de positividad. Por lo tanto, $f \geq 0$ significa simplemente que $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in X$.

Lema 1.4. *Cada $f \in C_0(X)$ puede descomponerse exclusivamente como la diferencia entre sus partes positivas y negativas.*

$$(1.6) \qquad f = f_+ - f_-\,,\ f_\pm \in \mathcal{C}_0(X)\,,\ f_\pm(x) \leq |f(x)|\ \ \forall\ x \in X\,.$$

Prueba. Defina

$$f\pm(x) = \begin{cases} \pm f(x) & si \quad \pm f(x) \geq 0 \\ 0 & si \quad \pm f(x) < 0 \end{cases}$$

para un mismo signo en toda la expresión. Luego (1.6) seguirá siendo válido. Tenga en cuenta que f_+ es continua en cada $y \in X$ puesto que, al ser U un vecindario aproximado de y, en cada caso

$f(y) > 0 \Longrightarrow f(x) > 0$ para $x \in U \Longrightarrow f_+ = f$ en U

$f(y) < 0 \Longrightarrow f(x) < 0$ para $x \in U \Longrightarrow f_+ = 0$ en U

$f(y) = 0 \Longrightarrow$ dado $\epsilon > \exists\ U$ sujeto a $|\ f(x)\ | < \epsilon$ en U

$\Longrightarrow\ |\ f(x)\ | < \epsilon$ en U

Por consiguiente, $f_- = f - f_+ \in C_0(X)$, ya que tanto f_+ como f_- se anulan a medida que tienden a infinito.

De modo parecido podemos dividir elementos del espacio dual en sus partes positivas y negativas, si bien ello resulta ligeramente más complicado. Diremos que $u \in (C_0(X))'$ es positivo si

$$(1.7) \qquad u(f) \geq 0\ \forall\ 0 \leq f \in \mathcal{C}_0(X)\,.$$

Para un $u = (C_0(X))'$ general (real) y para cada $0 \leq f \in C_0(X)$ fijamos

$$(1.8) \qquad u_+(f) = \sup\{u(g)\,;\ g \in \mathcal{C}_0(X)\,,\ 0 \leq g(x) \leq f(x)\ \forall\ x \in X\}\,.$$

$$u(g)\ \leq\ C\|g\|_\infty\ \leq\ C\|f\|_\infty.$$

Debe ser finito, ya que

$$u(g) \le C\|g\|_\infty \le C\|f\|_\infty .$$

Además, si $0 < c \in \mathbb{R}$; entonces $u_+ (cf) = cu_+ (f)$ por inspección. Supongamos que $0 \le f_i \in C_0(X)$ para $i = 1, 2$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $g_i \in C_0(X)$ con $0 \le g_i (x) \le f_i (x)$ y

$$u_+(f_i) \le u(g_i) + \epsilon .$$

De donde se sigue que:

$$0 \le g(x) \le f_1(x) + f_2(x) \text{ if } g = g_1 + g_2 \text{ , luego,}$$

$$u_+(f_1 + f_2) \ge u(g) = u(g_1) + u(g_2) \ge u_+(f_1) + u_+(f_2) - 2\epsilon .$$

Por consiguiente,

$$u_+(f_1 + f_2) \ge u_+(f_1) + u_+(f_2).$$

A la inversa, si $0 \le g (x) \le f_1 (x) + f_2 (x)$ conjunto $g_1 (x) = \min (g, f_1) \in C_0(X)$ y $g_2 = g - g_1$. Luego $0 \le g_i \le f_i$ y $u_+ (f_1) + u_+(f_2) \ge u (g_1) + u (g_2) = u (g)$. Aplicando el supremo a g, $u_+ (f_1 + f_2) \le u_+ (f_1) + u_+ (f_2)$, de donde obtenemos

$$(1.9) \qquad u_+(f_1 + f_2) = u_+(f_1) + u_+(f_2) .$$

Tras haber demostrado la linealidad efectiva en las funciones positivas podremos obtener una funcional lineal definiendo

$$(1.10) \qquad u_+(f) = u_+(f_+) - u_+(f_-) \ \forall \ f \in \mathcal{C}_0(X) .$$

Hay que tener en cuenta que (1.9) demuestra que $u_+ (f) = u_+ (f_1) - u_+(f_2)$ para cualquier descomposición de $f = f_1 - f_2$ con $f_1 \in C_0(X)$, ambas positivas. [Dado que $f_1 + f_- = f_2 + f_+$; $u_+ (f_1) + u_+ (f_-) = u_+ (f_2) + u_+ (f_+)$]. Asimismo,

$$|u_+(f)| \le \max(u_+(f_+), u(f_-)) \le \|u\| \, \|f\|_\infty$$
$$\Longrightarrow \|u_+\| \le \|u\| .$$

La funcional $u_- = u_+ - u$ es también positiva, ya que $u_+ (f) \ge u (f)$ para todo $0 \le f \in C_0(x)$. De esta forma hemos demostrado el

Lema 1.5. *Todo elemento $u \in (C_0(X))'$ se puede descomponer,*

$$u = u_+ - u_-$$

en la diferencia de elementos positivos con

$$\|u_+\| \, , \, \|u_-\| \le \|u\| .$$

La idea que subyace en la definición de u_+ es la de que u es en sí, aproximadamente, una "integración para una función" (si bien aún *no* sabemos cómo interpretarla). Por ahora estamos tratando de eliminar la parte negativa de esa función. El siguiente paso consiste en demostrar que una función positiva se corresponde con una "medida", en el sentido de función que mide el tamaño de conjuntos. Para definir este paso, lo que de verdad nos interesa es calcular u en la función característica de un conjunto

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Nos encontramos con el problema de que χ_E no es continua por lo que, en su lugar, deberemos emplear un concepto similar a (1.8).

Si $0 \leq u \in (C_0(X))'$ y $U \subset X$ es abierta, definiremos[1]

$$(1.11) \quad \mu(U) = \sup\{u(f)\,;\, 0 \leq f(x) \leq 1, f \in C_0(X)\,,\, \mathrm{supp}(f) \Subset U\}\ .$$

Vemos que el soporte de f (supp(f)) es el *cierre* del conjunto de puntos en los que $f(x) \neq 0$. Al ser supp(f) siempre cerrada, sólo admitiremos f en (1.11) cuando su apoyo sea un subconjunto compacto de U; ya que sólo entonces "sabremos con certeza" que $f \in C_0(x)$.

Supongamos que queremos medir conjuntos generales de este modo. Podremos hacerlo definiendo

$$(1.12) \qquad \mu^*(E) = \inf\{\mu(U)\,;\, U \supset E,\ U \text{ abierto}\}.$$

Pero con μ puede darse el caso de que $\mu(U) = \infty$, por lo que tendremos que pensar en

$$(1.13) \qquad \mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$$

definida en el *conjunto exponencial* de X y tomando valores del sistema ampliado de números reales positivos.

Definición 1.6. *Una función ampliada positiva* μ^*, *definida en el conjunto exponencial de* X, *recibe el nombre de medida exterior cuando* $\mu^*(\varnothing) = 0$, $\mu^*(A) \leq$ (B) *siempre que* $A \subset B$ *y que*

$$(1.14) \qquad \mu^*(\bigcup_j A_j) \leq \sum_j \mu(A_i)\ \forall \quad \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)\,.$$

Lema 1.7. *Si u es una función continua lineal positiva en* $C_0(X)$; μ^*, *definida por* (1.11), (1.12) *será una medida exterior.*

Para probar este lema deberemos hallar un número suficiente de funciones continuas. He pospuesto la prueba del siguiente resultado para el Problema 2.

Lema 1.8. *Supongamos que* U_i, $i = 1,\ldots, N$ *es una colección finita de conjuntos abiertos en un espacio métrico localmente compacto y que* $K \Subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ *es un subconjunto compacto, con lo que existen funciones continuas* $f_i \in C(X)$ *con* $0 \leq f_i \leq 1$, $\mathrm{supp}(f_i) \Subset U_i$ *y*

[1] Véase el comienzo de [5] en la pág. 42 o el comienzo de [1] en la pág. 206

$$(1.15) \qquad \sum_i f_i = 1$$

en un vecindario de K.

Prueba del lema 1.7. Vamos a realizar la prueba de (1.14). Partimos de la suposición de que los A_i son abiertos, por lo que también lo será $A = U_i A_i$. Si $f \in C(X)$ y supp $(f) \Subset A$, entonces supp (f) se halla abarcado por una unión finita de los A_is. Aplicando el lema 1.8 podemos obtener f_is, todos salvo un número finito igual a cero, luego supp $(f) \Subset A_i$ y $\sum_i f_i = 1$ en un vecindario de supp (f).

Dado que f = $\sum_i f_i f$; podemos concluir que

$$u(f) = \sum_i u(f_i f) \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \sum_i \mu^*(A_i)$$

puesto que $0 \leq f_i f \leq 1$ y supp $(f_i f) \Subset A_i$.

Por lo tanto, (1.14) sigue siendo válido cuando los A_i son abiertos. En el supuesto general, si $A_i \subset B_i$, con los B_i abiertos, tenemos, a partir de la definición

$$\mu^*(\bigcup_i A_i) \leq \mu^*(\bigcup_i B_i) \leq \sum_i \mu^*(B_i) \,.$$

Aplicando el ínfimo a los B_i, tenemos el (1.14) en general.

2. MEDIDAS Y σ-ALGEBRAS

Una medida externa como μ* es un objeto bastante elemental ya que, incluso cuando los conjuntos A_i son disjuntos, generalmente existe una desigualdad estricta en (1.14). Siendo razonables, no cabe esperar una igualdad en (1.14), para uniones disjuntas y para una función definida en *todos* los subconjuntos de X, por lo que nos centraremos exclusivamente en series más reducidas de subconjuntos.

Definición 2.1. *Una serie de subconjuntos $\mathcal{M}$ de un conjunto X es una σ-álgebra si*

$$\begin{array}{ll} (1) & \phi, X \in \mathcal{M} \\ (2) & E \in \mathcal{M} \Longrightarrow E^C = X \backslash E \in \mathcal{M} \\ (3) & \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}. \end{array}$$

Para una medida general externa μ* definimos el concepto de μ*-medibilidad de un conjunto.

Definición 2.2. *Un conjunto $E \subset X$ será* μ**-medible (para una medida externa* μ* *en X) si*

$$(2.1) \qquad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathsf{C}}) \;\forall\; A \subset X \,.$$

Proposición 2.3. *La serie de conjuntos* μ**-medibles para cualquier medida externa es una σ-álgebra.*

Prueba. Supongamos que E es μ*-medible; E^C lo será también por simetría de (2.1).

Llamemos A, E y F a tres conjuntos cualesquiera. Tendremos

$$A \cap (E \cup F) = (A \cap E \cap F) \cup (A \cap E \cap F^C) \cup (A \cap E^C \cap F)$$

$$A \cap (E \cup F)^C = A \cap E^C \cap F^C .$$

Partiendo de la sub-aditividad de μ*

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^C) \\ \leq \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cup F^C) \\ + \mu^*(A \cap E^C \cap F) + \mu^*(A \cap E^C \cap F^C). \end{aligned}$$

Si E y F son μ*-medibles, aplicando dos veces la definición tendremos, para cualquier A,

$$\begin{aligned} \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^C) \\ + \mu^*(A \cap E^C \cap F) + \mu^*(A \cap E^C \cap F^C) \\ \geq \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^C) . \end{aligned}$$

Como de la sub-aditividad de μ* se deriva la desigualdad inversa; $E \cup F$ será también μ*-medible.

Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una secuencia de conjuntos disjuntos μ*-medibles, definiremos $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ y $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Entonces, para cualquier A,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap F_n) &= \mu^*(A \cap F_n \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_n \cap E_n^C) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_{n-1}) . \end{aligned}$$

Iterando lo anterior demostramos que

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) .$$

A partir de la μ*-medibilidad de F_n y la sub-aditividad de μ*,

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^C) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap F^C) . \end{aligned}$$

Tomando como límite $n \to \infty$ y aplicando la sub-aditividad,

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap F^C) \tag{2.2}$$
$$\geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^C) \geq \mu^*(A)$$

se prueba que las desigualdades son igualdades, luego F es también μ*-medible.
En general, para *cualquier* unión contable de conjuntos μ*-medibles,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{A}_j \,,$$
$$\widetilde{A}_j = A_j \backslash \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i = A_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right)^C$$

es μ*-medible, ya que los $\tilde{A}_j$ son disjuntos.

Una *medida* (lo que en ocasiones se conoce como una *medida positiva*) es una función ampliada definida en los elementos de una σ-álgebra $\mathcal{M}$:

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0,\infty]$$

tal que

(2.3) $\mu(\varnothing) = 0$ y

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{2.4}$$

si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$

y $A_i \cap A_j = \phi \; i \neq j.$

En principio, se entiende que los elementos de $\mathcal{M}$ con medida cero (por ejemplo, $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = 0$) son "despreciables". Se dice que la medida μ es *completa* cuando

(2.5) $E \subset X$ y $\exists\, F \in \mathcal{M}$, $\mu(F) = 0$; $E \subset F \Rightarrow E \in \mathcal{M}$.

Véase problema 4.
Ya hemos visto anteriormente la primera parte de este importante resultado obtenido gracias a Caratheodory.

Teorema 2.4. *Si* μ* *es una medida externa en* X; *la serie de subconjuntos* μ*-*medibles de* X *será una σ-álgebra y* μ* *limitada a* $\mathcal{M}$ *será una medida completa.*

Prueba. Ya ha quedado demostrado que la serie de subconjuntos μ*-medibles de X es una σ-álgebra. Para comprender la segunda parte del teorema, hay que tener en cuenta que al tomar A = F en (2.2) obtenemos

$$\mu^*(F) = \sum_j \mu^*(E_j) \text{ if } F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_j$$

y los E_j son elementos disjuntos de $\mathcal{M}$. En esto consiste (2.4).

Del mismo modo, si μ* (E) = 0 y $F \subset E$; μ* (F) = 0. Por lo tanto, basta con demostrar que para cualquier subconjunto $E \subset X$; μ* (E) = 0 implica $E \in \mathcal{M}$. Para cualquier $A \subset X$, aplicando el hecho de que μ* ($A \cap E$) = 0 y la propiedad 'incremental' de μ*

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C) \\ &= \mu^*(A \cap E^C) \leq \mu^*(A) \end{aligned}$$

demuestra que deben ser siempre igualdades, por lo que $E \in \mathcal{M}$ (es decir, es μ*-medible).

Volviendo a nuestro objetivo principal, recordamos que hemos construido la medida externa de μ* a partir de $0 \leq u \in (C_0(X))'$ utilizando (1.11) y (1.12). Para poder utilizar frecuentemente la medida cuya existencia se desprende del teorema de Caratheodory necesitaremos:

Proposición 2.5. *Si* $0 \leq u \in (C_0(X))'$ *para un espacio métrico localmente compacto* X*; cada subconjunto abierto de* X *es* μ*-medible *para la medida externa definida por* (1.11) *y* (1.12), *siendo su medida* μ *en (1.11).*

Prueba. Supongamos que $U \subset X$ es abierto. Sólo necesitamos probar (2.1) para todo $A \subset X$ con μ* (A) < ∞.[2]

Supongamos en primer lugar que $A \subset X$ es abierto y que μ* (A) < ∞. Luego $A \cap U$ es abierto, por lo que dado $\epsilon > 0$ tendremos

$$f \in C(X) \ \operatorname{supp}(f) \Subset A \cap U$$

con $0 \leq f \leq 1$ y

$$\mu^*(A \cap U) = \mu(A \cap U) \leq u(f) + \epsilon\,.$$

$A \setminus \operatorname{supp}(f)$ es también abierto, luego podemos hallar $g \in C(X)$, $0 \leq g \leq 1$, $\operatorname{supp}(g) \Subset A \setminus \operatorname{supp}(f)$ con

$$\mu^*(A \setminus \operatorname{supp}(f)) = \mu(A \setminus \operatorname{supp}(f)) \leq u(g) + \epsilon\,.$$

---

[2] ¿Por qué?

Dado que

$$\begin{aligned}
A \setminus \operatorname{supp}(f) \supset A \cap U^C\,,\ 0 \le f+g \le 1\,,\ \operatorname{supp}(f+g) \Subset A\,,\\
\mu(A) &\ge u(f+g) = u(f) + u(g)\\
&> \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^C) - 2\epsilon\\
&\ge \mu^*(A) - 2\epsilon
\end{aligned}$$

utilizando la sub-aditividad de μ*. Haciendo $\epsilon \downarrow 0$ podemos concluir que

$$\mu^*(A) \le \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^C) \le \mu^*(A) = \mu(A)\,.$$

Lo que nos da (2.1) cuando A es abierto.

Por regla general, si $E \subset X$ y $\mu^*(E) < \infty$ y dado c > 0 tenemos $A \subset X$ abierto con $\mu^*(E) > \mu^*(A) - \epsilon$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\ge \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^C) - \epsilon\\
&\ge \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^C) - \epsilon\\
&\ge \mu^*(E) - \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que (2.1) sigue siendo válido en todo caso, luego U es μ*-medible cuando es abierto. Ya hemos visto que $\mu(U) = \mu^*(U)$ cuando U es abierto.

De esta manera queda demostrado que todos los conjuntos contenidos en la σ-álgebra del teorema de Caratheodory son abiertos. En el Problema 3 se ha demostrado también que la intersección de cualquier serie de σ-álgebras en un conjunto dado es una σ-álgebra. Al ser siempre $\mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra, se desprende que para *cualquier* serie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ siempre existe una σ-álgebra más pequeña que contiene $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \bigcap \{\mathcal{M} \supset \mathcal{E};\ \text{siendo } \mathcal{M} \text{ una σ-álgebra};\ \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)\}$$

Los elementos de la σ-álgebra más pequeña que contiene los conjuntos abiertos se conocen como "conjuntos de Borel", y la medida definida en la σ-álgebra de todos los conjuntos de Borel como *medida de Borel*. Lo que hemos demostrado es:

Proposición 2.6. *La medida definida por* (1.11), (1.12) *a partir de* $0 \le u \in C_0(X))'$ *mediante el teorema de Caratheodory es una medida de Borel.*

Prueba. Esto es lo mismo que lo expresado en la Proposición 2.5. Observe lo sencillas que son las pruebas.

Podemos incluso seguir en la misma línea. Se dice que una medida de Borel es regular externa en $E \subset X$ cuando

(2.6) $$\mu(E) = \inf\{\mu(U)\,;\ U \supset E\,,\ U \text{ abierto}\}\,.$$

Por lo tanto, la medida construida en la Proposición *2.5* es regular externa en todos los conjuntos de Borel. Una medida de Borel es *regular interna* en E cuando

(2.7) $\mu(E) = \sup \{\mu(K) ; K \subset E , K \text{ compacto}\}$.

Llegados a este punto necesitamos saber que los conjuntos compactos son medibles según Borel. En esto consiste el Problema 5.

Definición 2.7. Una medida de Radon *(en un espacio métrico) es una medida de Borel que es regular y externa en todos los conjuntos de Borel, regular e interna en conjuntos abiertos y finita en conjuntos compactos.*

Proposición 2.8 *La medida definida mediante* (1.11), (1.12) *a partir de* $0 \leq u \in (C_0(X))'$ *aplicando el teorema de Caratheodory es una medida de Radon.*

Prueba. Supongamos que $K \subset X$ es compacto. Llamemos χ_K a la función característica de K , $\chi_K = 1$ en K , $\chi_K = 0$ en K^C. Supongamos asimismo que $f \in C_o(X)$, $\operatorname{supp}(f) \Subset X$ y $f \geq \chi_K$. A continuación definimos

$$U_\epsilon = \{x \in X \,;\, f(x) > 1 - \epsilon\}$$

donde $\epsilon > 0$ es un valor pequeño. Por lo tanto, $U\epsilon$ es abierto, por la continuidad de f, y contiene K. Además, podemos elegir $g \in C(X)$, $\operatorname{supp}(g) \Subset U_\epsilon$, $0 \leq g \leq 1$ con $g = 1$ próximo a[3] K. Por lo tanto, $g \leq (1 - \epsilon)^{-1} f$ y de ahí

$$\mu^*(K) \leq u(g) = (1-\epsilon)^{-1} u(f) \,.$$

Haciendo que $\epsilon \downarrow 0$, y utilizando la medibilidad de K,

$$\mu(K) \leq u(f)$$

$$\Rightarrow \mu(K) = \inf\{u(f) \,;\, f \in C(X) \,,\, \operatorname{supp}(f) \Subset X \,,\, f \geq \chi_K\} \,.$$

Esto implica, en particular, que $\mu(K) < \infty$ si $K \Subset X$, aunque también prueba (2.7).

Hagamos un breve repaso de lo hecho hasta ahora. Hemos usado la funcional positiva u para definir una medida externa μ^*, y por lo tanto una medida μ, y a continuación hemos verificado las propiedades de ésta última.

Se trata de un esquema bastante interesante; ahora, anticipándonos a lo que expondré más adelante, sugiero pasar a ver algo distinto.

Digamos que $Q \subset \mathbb{R}^n$ es "rectangular" cuando es un producto de intervalos finitos (abiertos, cerrados o medio abiertos)

$$(2.8) \qquad Q = \prod_{i=1}^{n} (\text{or}[a_i \,,\, b_i]\text{or}) \; a_i \leq b_i$$

estamos de acuerdo respecto a cuál es su volumen estándar:

---

[3] Indica "en un vecindario de K".

$$(2.9) \qquad v(Q) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \in [0, \infty) .$$

Es evidente que cuando tenemos dos conjuntos de esta clase, $Q_1 \subset Q_2$, entonces $v(Q_1) \leq v(Q_2)$. Intentaremos definir una medida externa sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ mediante

$$(2.10) \qquad v^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} v(Q_i) \, ; \, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \ Q_i \text{ rectangular}\right\} .$$

Deseamos demostrar que (2.10) define una medida externa. Se trata de una demostración bien sencilla: $v(\emptyset) = 0$. Del $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ mismo modo, si son conjuntos (disjuntos) y

$\{Q_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$ abarca A_i mediante rectángulos abiertos, entonces el conjunto de todos los Q_{ij} abarcarán $A = \bigcup_i A_i$ y

$$v^*(A) \leq \sum_i \sum_j v(Q_{ij})$$
$$\Rightarrow v^*(A) \leq \sum_i v^*(A_i) .$$

Y ya tenemos la medida externa que buscábamos. También deseamos demostrar:

Lema 2.9. *Si Q es rectangular; $v^*(Q) = v(Q)$.*

Partiendo de esta suposición, la medida definida a partir de v^* mediante el teorema de Caratheodory se conoce como medida de Lebesgue.

Proposición 2.10. *La medida de Lebesgue es una medida de Borel.*

Para probar esta proposición nos basta con demostrar que los conjuntos rectangulares (abiertos) son v^*-medibles.

Supongamos que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en un conjunto X[4] y $\mathcal{N}$ es una σ-álgebra en otro conjunto Y. Se dice que un mapa $f : X \rightarrow Y$ es medible con respecto a estas σ-álgebras dadas en X e Y cuando

$$(2.11) \qquad f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \ \forall \ E \in \mathcal{N} .$$

Fíjese en lo similar que es esta expresión a una de las caracterizaciones de la continuidad para mapas que se hallan entre espacios métricos en términos de conjuntos abiertos. Ciertamente se trata de una analogía que ofrece un resultado práctico.

Proposición 2.11. *Todo mapa continuo $f : X \rightarrow Y$ entre espacios métricos es medible con respecto a las σ-álgebras de Borel en X e Y.*

---

[4] Luego X (o si prefiere decirlo de un modo más sofisticado, $(X,\mathcal{M})$ se suele denominar como un *espacio medible*.

Prueba. El principal punto en el que hay que fijarse es que f^{-1}, al ser un mapa sobre conjuntos exponenciales, sirve perfectamente para *cualquier* mapa. Es decir; si $f : X \to Y$, $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ satisfará:

$$
(2.12) \qquad
\begin{gathered}
f^{-1}(E^C) = (f^{-1}(E))^C \\
f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(E_j) \\
f^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} f^{-1}(E_j) \\
f^{-1}(\phi) = \phi,\ f^{-1}(Y) = X\,.
\end{gathered}
$$

Poniendo en común todas estas expresiones observamos que, si $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra cualquiera en X, entonces

$$
(2.13) \qquad \{E \subset Y\,;\, f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}
$$

es siempre una σ-álgebra en Y.

Volviendo a la prueba de la proposición, la continuidad de f demuestra que $f^{-1}(E) \subset X$ es abierto cuando $E \subset Y$ es abierto. Por lo tanto, la σ-álgebra en Y definida por (2.13) a partir de la σ-álgebra de Borel en X contiene todos los conjuntos abiertos, luego también contiene la σ-álgebra de Borel en Y:

$$
f^{-1}(\mathcal{B}(Y)) \subset \mathcal{B}(X)\,.
$$

Nos interesan principalmente las funciones en X. Si $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en X; $f : X \to \mathbb{R}$ será medible cuando lo sea también con respecto a la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ y a $\mathcal{M}$ en X. De un modo más general, para una función ampliada $f : X \to [\infty,\infty]$ tomaremos como la σ-álgebra de Borel en $[\infty,\infty]$ la σ-álgebra más pequeña que contenga todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ y todos los conjuntos $(a, \infty]$ y $[-\infty, b)$; que de hecho viene generada por los conjuntos $(a, \infty]$. (Véase Problema 6.)

Nuestra principal tarea consiste en definir la integral de una función medible. Para ello partiremos de *funciones simples*. Hay que tener en cuenta que la función característica de un conjunto

$$
\chi_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}
$$

es medible si y sólo si $E \in \mathcal{M}$. Más en general, una función simple;

$$
(2.14) \qquad f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}
$$

es medible si los conjuntos E_i son medibles. La presentación, (2.14), de una función simple no es única, aunque podemos hacer que lo sea, tomando la presentación mínima, insistiendo en que todos los a_i sean distintos de cero y

$$E_i = \{x \in E\,;\ f(x) = a_i\}$$

con lo que f en (2.14) es medible si y sólo si todos los E_i lo son.

3. INTEGRACION

La (μ)-integral de una función simple no negativa es, por definición:

$$(3.1) \qquad \int_Y f\,d\mu = \sum_i a_i \mu(Y \cap E_i)\,,\ Y \in \mathcal{M}\,.$$

En este caso se sigue la convención de que si $\mu(Y \cap E_i) = \infty$ pero como $a_i = 0$ entonces $a_i\ \mu(Y \cap E_i) = 0$. Evidentemente, esta integral toma valores en $[0, \infty]$. Aún más, cuando $c \geq 0$ es una constante y f y g son dos funciones simples no negativas (μ-medibles) tenemos que

$$(3.2) \qquad \begin{gathered} \int_Y cf d\mu = c \int_Y f d\mu \\ \int_Y (f+g) d\mu = \int_Y f d\mu + \int_Y g d\mu \\ 0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_Y f\,d\mu \leq \int_Y g\,d\mu\,. \end{gathered}$$

(Véase [1] Proposición 2.13 en la página 48.)

Para ver esto, hay que tener en cuenta que (3.1) es válido para *cualquier* presentación (2.14) de f con todo $a_i \geq 0$. De hecho, limitándolo a E_i y dividiéndolo por a_i (lo que podemos suponer como distinto de cero) nos basta para considerar el supuesto especial

$$\chi_E = \sum_j b_j \chi_{F_j}\,.$$

F_j puede formularse siempre como la unión de un número finito, N', de conjuntos medibles disjuntos, $F_j = \cup_{l \in S_j} G_l$ donde $j = 1, \ldots, N$ y $S_j \subset \{1, \ldots, N'\}$. Por lo tanto,

$$\sum_j b_j \mu(F_j) = \sum_j b_j \sum_{l \in S_j} \mu(G_l) = \mu(E)$$

ya que $\sum_{\{j;l \in S_j\}} b_j = 1$ para cada j.

A partir de esta idea resulta fácil seguir el resto de expresiones.

Definición 3.1. *Para una función ampliada no negativa y μ-medible f : X→[0, ∞] la integral (con respecto a μ) sobre cualquier conjunto medible E ⊂ X es*

$$(3.3) \quad \int_E f d\mu = \sup\{\int_E h d\mu;\ 0 \le h \le f, \quad \textit{h simple y medible}\}.$$

Al tomar la suprema, tiene las propiedades primera y última de $\int_E f d\mu$ (3.2). También tiene la propiedad central, aunque ésta es menos evidente. Para poder captar esta idea deberemos probar una noción básica: el "teorema de la convergencia monótona" (de Lebesgue). Antes, sin embargo, es preciso fijarse en qué significa la anulación del valor de la integral.

Lema 3.2. *Si f : X→*[0, ∞] *es medible, tendremos*:

$$\int_E f d\mu = 0$$

para un conjunto medible E si y sólo si

(3.4) $\{x \in E; f(x) > 0\}$ tiene una medida igual a cero.

Prueba. Si (3.4) es válido, toda función simple positiva acotada superiormente por *f* deberá también perder valor cuando es externa a un conjunto de medida igual a cero, luego su integral deberá ser cero y, por $\int_E f d\mu = 0.$ lo tanto,

A la inversa, observe que el conjunto que se halla en (3.4) puede formularse como

$$E_n = \bigcup_n \{x \in E; f(x) > 1/n\}.$$

Dado que estos conjuntos se incrementan, si (3.4) no es válido, uno de ellos deberá tener medida positiva. En tal caso, la función simple $n^{-1}\chi_{En}$ tendrá integral positiva, luego

$$\int_E f d\mu > 0.$$

Observe la diferencia fundamental de enfoque existente entre la integral de Riemann y la de Lebesgue. La de Lebesgue (3.3) utiliza una aproximación por funciones constante en conjuntos medibles susceptibles de causar dificultades; a diferencia de las integrales superiores e inferiores de Riemann, que utilizan simplemente intervalos.

Teorema 3.3 (Convergencia monótona). *Sea f_n una secuencia creciente de funciones medibles no negativas (ampliadas),con lo que f(x)* = $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *es medible y*

$$(3.5) \quad \int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

para cualquier conjunto medible E ⊂ X.

Prueba. Para comprobar que *f* es medible, es preciso fijarse en que

$$(3.6) \qquad f^{-1}(a,\infty] = \bigcup_n f_n^{-1}(a,\infty].$$

Los conjuntos $(a, \infty]$ generan la σ-álgebra de Borel, lo que demuestra que f *es* medible.

A continuación pasaremos a probar la parte central de la proposición (3.5). Rudin ha planteado una demostración bastante acertada [5] página 21 que paso a explicar. Partiendo de (3.1) vemos claramente que

$$\alpha = \sup \int_E f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

Dada una función simple medible g en la que $0 \leq g \leq f$ y $0 < c < 1$; fijémonos en los conjuntos $E_n = \{x \in E; f_n(x) \geq cg(x)\}$. Son medibles y se incrementan a medida que lo hace n. Si, además, tenemos en cuenta que $E = \bigcup_n E_n$, resulta:

$$(3.7) \qquad \int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} g d\mu = \sum_i a_i \mu(E_n \cap F_i)$$

en términos de la representación natural de $g = \sum_i a_i \chi F_i$. El hecho de que E_n sean medibles y se incrementen hasta E demuestra que

$$\mu(E_n \cap F_i) \to \mu(E \cap F_i)$$

a medida que $n \to \infty$. Por lo tanto, el lado derecho de (3.7) tiende a $c \int_E g d\mu$ a medida $n \to \infty$. Así tenemos:

$$\alpha \geq c \int_E g d\mu$$

para todo $0 < c < 1$. Aplicando el supremo a c y a continuación a todo g queda probado que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq \sup \int_E g d\mu = \int_E f d\mu.$$

Por lo tanto, todos ellos deben ser iguales.

Si tomamos, por ejemplo, la aditividad en (3.1) para $f > 0$ y $g > 0$ vemos que todas las funciones medibles se derivan de

Proposición 3.4. *Para cualquier función ampliada μ-medible y no negativa* $f : X \to [0, \infty]$ *existe una secuencia creciente* f_n *de funciones simples medibles tal que* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *para cada* $x \in X$, *siendo este límite uniforme en cada conjunto medible en el que* f *sea finita.*

Prueba. Folland ([1], página 45) propone una prueba convincente. Para cada entero $n > 0$ y

$0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$, se define

$$E_{n,k} = \{x \in X; 2^{-n}k \leq f(x) < 2^{-n}(k+1)\},$$
$$E'_n = \{x \in X; f(x) \geq 2^n\}.$$

Estos son conjuntos medibles. Al aumentar n en una unidad, el intervalo en la definición de $E_{n,k}$ queda dividido por dos. De ello se desprende que la secuencia de funciones simples

$$f_n = \sum_k 2^{-n}k\chi_{E_{k,n}} + 2^n\chi_{E'_n} \tag{3.8}$$

es creciente y con límite f y que este límite es uniforme en cualquier conjunto medible en el que f sea finita.

Por lo tanto,

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

y si f y g son dos funciones medibles no negativas,

$$f_n(x) + g_n(x) \uparrow f + g(x)$$

tenemos

$$\int_E (f+g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

En cuanto a la definición de u_+, esto nos permite ampliar la definición de la integral a cualquier función *integrable*.

Definición 3.5. *Se dice que una función ampliada medible* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *es integrable en* ***E*** *cuando sus partes positivas y negativas tienen ambas integrales finitas en* ***E****, luego*

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu.$$

Observe que $|f|$ es μ-integrable cuando lo es f. Uno de los objetos que deseamos estudiar es el espacio de las funciones integrables, por lo que el hecho de que la integral de $|f|$ pueda anular su valor nos invita a fijarnos en lo que a primera vista parece un objeto mucho más complicado. Consideremos una relación de equivalencia entre funciones integrables

$$f_1 \equiv f_2 \Longleftrightarrow \mu(\{x \in X; f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0. \tag{3.9}$$

Es decir, identificamos dos funciones de este tipo si son iguales y "externas a un conjunto de medida cero". Evidentemente, si $f_1 \equiv f_2$ tendremos, en este sentido

$$\int_X |f_1| d\mu = \int_X |f_2| d\mu = 0, \int_X f_1 d\mu = \int_X f_2 d\mu.$$

Una condición necesaria para que una función medible $f \geq 0$ sea integrable es

$$\mu\{x \in X; f(x) = \infty\} = 0.$$

Llamamos E al conjunto (necesariamente medible) en el que $f = \infty$. Si este conjunto no es de medida igual a cero, la secuencia de funciones simples $n\chi_E \leq f$ tiene una integral que tiende a infinito. De ello se desprende que para cada clase de equivalencia contemplada en (3.9) existe un representante que es una función finita en todos sus puntos. Así, si f es un representante;

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin E \\ 0 & x \in E \end{cases}$$

también lo será.

Mediante $L^1(X, \mu)$ indicamos el espacio compuesto por dichas clases de equivalencia de funciones integrables. Se trata de un espacio lineal normado del mismo tipo que vimos en el Problema 11.

El teorema de la convergencia monótona suele aparecer bajo la forma del lema de Fatou.

Lemma 3.6 (Lema de Fatou). *Si f_k es una secuencia de funciones integrables no negativas:*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \,.$$

Prueba: Definimos $F_k(x) = \inf_{n\geq k} f_n(x)$. Por tanto F_k es una secuencia creciente de funciones no negativas con función límite $\liminf_{n\to\infty} f_n$ y $F_k(x) \leq f_n(x)$ $\forall$ $n \geq k$. Por el teorema de la convergencia monótona:

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int F_k(x) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Podemos ampliar la integral a funciones de valores complejos, diciendo simplemente que

$$f : X \to \mathbb{C}$$

es integrable cuando sus partes real e imaginaria son ambas integrables. Entonces, por definición,

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

para cualquier $E \subset X$ que sea medible. De donde se deduce que si f es integrable también lo será $|f|$. Asimismo,

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu \,.$$

Esto resulta obvio si

$$\int_E f \, d\mu = 0,$$

y, en caso contrario,

$$\int_E f\, d\mu = Re^{i\theta}\ R > 0\,,\ \theta \subset [0, 2\pi)\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f\,d\mu\right| &= e^{-i\theta}\int_E f\,d\mu \\
&= \int_E e^{-i\theta} f\,d\mu \\
&= \int_E \mathbb{R}e(e^{-i\theta} f)\,d\mu \\
&\leq \int_E \left|\mathbb{R}e(e^{-i\theta} f)\right|\,d\mu \\
&\leq \int_E \left|e^{-i\theta} f\right|\,d\mu = \int_E |f|\,d\mu\,.
\end{aligned}$$

El otro resultado significativo sobre convergencia en integrales es el *teorema de la convergencia dominada* de Lebesgue.

Teorema 3.7. *Si f_n es una secuencia de funciones integrables, $f_k \to f$ a.e.*[5] *y* $|f_n| \leq g$ *para una g integrable, f será integrable y*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu\,.$$

Prueba. En primer lugar, podemos hacer que la secuencia $f_n(x)$ converja cambiando todas las $f_n(x)$' a cero en un conjunto de medida cero externo a aquél en el que convergen. Esta operación no supondrá ningún cambio en las conclusiones. Aún más, es suficiente para suponer que las f_n son de valor real. A continuación consideraremos

$$h_k = g - f_k \geq 0\,.$$

Ahora, $\liminf_{k\to\infty} h_k = g - f$ por la convergencia de f_n; en particular f es integrable.

Aplicando la convergencia monótona y el lema de Fatou

$$\begin{aligned}
\int (g-f)d\mu = \int \liminf_{k\to\infty} h_k\,d\mu &\leq \liminf_{k\to\infty} \int (g - f_k)\,d\mu \\
&= \int g\,d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int f_k\,d\mu\,.
\end{aligned}$$

Del mismo modo, si $H_k = g + f_k$:

$$\int (g+f)d\mu = \int \liminf_{k\to\infty} H_k\,d\mu \leq \int g\,d\mu + \liminf_{k\to\infty} \int f_k\,d\mu.$$

Se desprende que

$$\limsup_{k\to\infty} \int f_k\,d\mu \leq \int f\,d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k\,d\mu.$$

[5] Significa en el complemento cuando se trata de un conjunto de medida cero.

Y, por consiguiente:

$$\int f_k \, d\mu \to \int f \, d\mu \, .$$

Una vez probado el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, lo aplicaremos a la demostración de algo importante. Al igual que antes, μ es una medida positiva en X. Ya hemos definido $L^1(X, \mu)$; ahora tendremos en cuenta un espacio más general; $L^p(X, \mu)$. Se dice que una función medible

$$f : X \to \mathbb{C}$$

es L^p para $1 \leq p < \infty$, cuando $|f|^p$ es integrable[6], es decir

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty \, .$$

Al igual que antes, contemplaremos las clases de equivalencia de tales funciones bajo el punto de vista de la relación de equivalencia

$$f \sim g \Leftrightarrow \mu \{x; (f-g)(x) \neq 0\} = 0 \, . \tag{3.10}$$

Mediante $L^p(X, \mu)$ indicamos el espacio de estas clases de equivalencia. Se trata de un espacio lineal y la función

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \tag{3.11}$$

es una norma (suponemos siempre que $1 \leq p < \infty$, y en ocasiones $p = 1$ queda excluido, aunque posteriormente se permite que p = ∞). Resulta sencillo comprobar todo ello, salvo la desigualdad del triángulo. Para ello comenzaremos por

Lema 3.8. *Si $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $0 < \gamma < 1$:*

$$a^\gamma b^{1-\gamma} \leq \gamma a + (1-\gamma) b \tag{3.12}$$

existiendo igualdad únicamente cuando $a = b$.

Prueba. La prueba es sencilla cuando $b = 0$. En tal caso suponemos que $b > 0$ y dividimos por b. Tomando $t = a/b$ tenemos que demostrar

$$t^\gamma \leq \gamma t + 1 - \gamma \, , \; 0 \leq t \, , \; 0 < \gamma < 1 \, . \tag{3.13}$$

La función $f(t) = t^\gamma - \gamma t$ es diferenciable para $t > 0$ con una derivación $\gamma t^{\gamma - 1} - \gamma$, que es positiva para $t < 1$. Por lo tanto, $f(t) \leq f(1)$ con igualdad solamente para $t = 1$. Dado que $f(1) = 1 - \gamma$, tenemos (3.13), lo que prueba el lema.

Podemos utilizar lo anterior para probar la desigualdad de Hölder

Lema 3.9. *Si f y g son medibles*

---

[6] Compruebe que $|f|^p$ es medible automáticamente.

$$(3.14) \qquad \left|\int fg d\mu\right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

para cualquier $1 < p < \infty$*, con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Prueba. Si $\| f \|_p = 0$ ó $\| g \|_q = 0$ el resultado es insignificante, al igual que cuando es infinito. Por consiguiente, consideraremos

$$a = \left|\frac{f(x)}{\|f\|_p}\right|^p, \; b = \left|\frac{g(x)}{\|g\|_q}\right|^q$$

y aplicaremos (3.12) con $\gamma = \frac{1}{p}$.
Obtenemos:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}.$$

E integrando en X:

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_X |f(x)g(x)|\; d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dado que

$$\left|\int_X fg\, d\mu\right| \leq \int_X |fg|\; d\mu$$

lo anterior implica (3.14).
La desigualdad final que buscamos es la desigualdad de *Minkowski*.

Proposición 3.10. *Si* $1 < p < \infty$ *y* $f, g \in L^p(X, \mu)$:

$$(3.15) \qquad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Prueba. Acabamos de ver el supuesto en el que $p = 1$. Asimismo, es obvio que si $f + g = 0$ a.e.. De lo contrario, podremos escribir

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)\,|f+g|^{p-1}$$

y aplicar la desigualdad de Hölder al lado derecho de la ecuación, expandido

$$\int |f+g|^p\; d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\;, \left(\int |f+g|^{q(p-1)}\; d\mu\right)^{1/q}.$$

Dado que $q(p-1) = p$ y $1/q = 1/p$ tenemos (3.15).

De esta forma, sabemos que $L^p(X, \mu)$ es un espacio normado para $1 \leq p < \infty$. Éste, en particular, es un espacio métrico. Otra importante propiedad que puede tener un espacio métrico es la *completitud*, que significa que cada secuencia de Cauchy es convergente.

Definición 3.11. *Un espacio normado en el que el espacio métrico subyacente es completo se denomina espacio de* Banach*.*

Teorema 3.12. *Para cualquier espacio de medida* (X, M, μ) *los espacios* $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, *son espacios de Banach*.

Prueba. Queremos demostrar que una secuencia de Cauchy $\{f_n\}$ converge en $L_p(X, \mu)$. Basta con probar que una de sus subsecuencias es convergente. Por la propiedad de Cauchy, para cada k $\exists$ $n = n(k)$ tal que

$$\|f_n - f_\ell\|_p \leq 2^{-k} \ \forall \ \ell \geq n \,. \tag{3.16}$$

Tomemos la secuencia

$$g_1 = f_1 \,,\ g_k = f_{n(k)} - f_{n(k-1)} \,,\ k > 1 \,.$$

Por (3.16), $\| g_k \|_p \leq 2^{-k}$, para $k > 1$, luego la serie $\sum_k \| g_k \|_p$ converge, por ejemplo a $B < \infty$. A continuación definimos

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |g_k(x)| \ ,\ n \geq 1 \,,\ h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x).$$

Entonces, por el teorema de la convergencia monótona

$$\int_X h^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X |h_n|^p \ d\mu \leq B^p \,,$$

donde hemos aplicado también la desigualdad de Minkowski. Por lo tanto $h \in L^p(X, \mu)$, luego la serie

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$

converge (totalmente) prácticamente en toda su extensión. Dado que

$$|f(x)|^p = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} g_k \right|^p \leq h^p$$

con $h^p \in L'(X, \mu)$, se aplica el teorema de la convergencia dominada, que permite demostrar que $f \in L^p(X, \mu)$. Además,

$$\sum_{k=1}^{\ell} g_k(x) = f_{n(\ell)}(x)$$

y

$$\left|f(x) - f_{n(\ell)}(x)\right|^p \leq (2h(x))^p$$

de modo que, de nuevo por el teorema de la convergencia dominada,

$$\int_X \left|f(x) - f_{n(\ell)}(x)\right|^p \to 0\,.$$

Por consiguiente la subsecuencia $f_{n(l)} \to f$ en $L^p(X, \mu)$, lo que prueba su completitud.

A continuación me gustaría volver al punto de partida para analizar el teorema de la representación de Riesz. Existen dos importantes contribuciones a la teoría de medidas que aún no hemos tratado (haré que los estudiantes los apliquen ampliamente en los problemas): el teorema de la descomposición de Hahn y el teorema de Radon-Nikodym. Por ahora podemos pasar sin este último, pero sí que me referiré al primero.

Consideremos un espacio métrico localmente compacto X. Mediante una medida de Borel en X, o mediante una medida de Borel con signo, indicaremos una función en conjuntos de Borel

$$\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$$

que viene dada como la diferencia entre dos medidas de Borel finitas y positivas.

$$\mu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)\,. \tag{3.17}$$

Del mismo modo, diremos que μ es una medida de Radon, o una medida de Radon con signo, cuando *se pueda expresar* como tal diferencia, siendo tanto μ_1 como μ_2 medidas finitas de Radon. Para una exposición más detallada de este punto, véanse los problemas que se plantean más abajo.

Supongamos que $M(X)$ indica el conjunto de medidas finitas de Radon en X. Se trata de un espacio normado con

$$\|\mu\|_1 = \inf(\mu_1(X) + \mu_2(X)) \tag{3.18}$$

con el ínfimo (inf) aplicado a todas las descomposiciones de Radon (3.17). Cada medida de Radon con signo define una función lineal continua en $C_0(X)$:

$$\int \cdot\, d\mu : \mathcal{C}_0(X) \ni f \longmapsto \int_X f \cdot d\mu\,. \tag{3.19}$$

Teorema 3.13. (Representación de Riesz). *Si X es un espacio métrico localmente compacto, toda funcional lineal continua en $C_0(X)$ vendrá dada por una medida finita y única de Radon en X mediante* (3.19).

Luego el espacio dual de $C_0(X)$ es $M(X)$; o al menos de esta manera es como se suele interpretar dicho resultado.

$$(\mathcal{C}_0(X))' = M(X)\,, \tag{3.20}$$

(véanse los comentarios que siguen al párrafo "*Prueba*").

Prueba. Ya hemos visto la prueba de la mitad de este teorema. Recordemos los pasos seguidos.

Partiendo de $u \in (C_0(X))'$ quedó probado que $u = u_+ - u_-$; siendo $u_\pm$ funcionales lineales continuas y *positivas* (Lema 1.5.). A continuación, demostramos que $u \geq 0$

define una medida de Radon finita y positiva μ. Aquí μ se halla definida por (1.11) en conjuntos abiertos y $\mu(E) = \mu^*(E)$ se obtiene mediante (1.12) en conjuntos generales de Borel. Su carácter finito viene dado por

$$(3.21) \qquad \mu(X) = \sup\{u(f)\,;\, 0 \le f \le 1\,,\, \operatorname{supp} f \Subset X\,,\, f \in C(X)\} \\ \le \|u\|\,.$$

A partir de la Proposición 2.8 llegamos a la conclusión de que μ es una medida de Radon. Como este mismo argumento se puede aplicar a $u_\pm$; tendremos dos medidas de Radon positivas y finitas $u_\pm$ y, consecuentemente, una medida de Radon con signo

$$(3.22) \qquad \mu = \mu_+ - \mu_- \in M(X)\,.$$

En los problemas, el estudiante deberá probar el teorema de descomposición de Hahn. Más concretamente, en el Problema 14 se pide demostrar que (3.22) es la descomposición de Hahn de μ ; lo que significa que existe un conjunto de Borel $E \subset X$ tal que $\mu_-(E) = 0$, $\mu_+(X \setminus E) = 0$.

Lo que hemos definido es una correspondencia lineal

$$(3.23) \qquad (\mathcal{C}_0(X))' \to M(X),\ u \longmapsto \mu\,.$$

Deseamos demostrar que esta correspondencia es un isomorfismo; es decir, que a cada elemento de un grupo le corresponde uno y sólo uno del otro.

En primer lugar demostraremos que se trata de una correspondencia biunívoca. Es decir, suponemos que $\mu = 0$. Dada la unicidad de la descomposición de Hahn, esto implica que $\mu_+ = \mu_- = 0$. Podemos suponer asimismo que $u \ge 0$ y que $\mu = \mu_+ = 0$, y tenemos que probar que $u = 0$; lo que es obvio teniendo en cuenta

$$(3.24) \qquad \mu(X) = \sup\{u(f)\,;\, \operatorname{supp} u \Subset X\,, 0 \le f \le 1\ f \in C(X)\} = 0$$

$$\Rightarrow u(f) = 0 \text{ para tal } f.$$

Si $0 \le f \in C(X)$ y $\operatorname{supp} f \Subset X$ entonces $f' = f/\|f\|_\infty$ es de este tipo luego $u(f) = 0$ para cada $0 \le f \in C(X)$ de soporte compacto. De la descomposición de funciones continuas en partes positivas y negativas se desprende que $u(f) = 0$ para cada f de soporte compacto. Por último, $C_0(X)$ es el cierre del espacio de funciones continuas de soporte compacto, luego, por la continuidad supuesta de u, $u = 0$.

Queda por demostrar que *cada* medida finita de Radon en X se deriva de (3.23). Realizaremos esta demostración construyendo u a partir de μ, recurriendo de nuevo a la descomposición de Hahn de μ, al igual que en (3.22)[7]. Así, suponemos que $\mu \ge 0$ y construimos u. Evidentemente, lo que queremos obtener es

$$(3.25) \qquad u(f) = \int_X f\, d\mu\,,\ f \in \mathcal{C}_c(X)\,.$$

En este punto, recordemos que la Proposición 2.11. establecía que las funciones continuas en X, un espacio métrico localmente compacto, son medibles (según Borel).

[7] De hecho, podemos tratar cualquier descomposición (3.22) como una diferencia de medidas positivas de Radon.

Sabemos, además, que existe una secuencia creciente de funciones simples con límite f, por lo que

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \mu(X)\cdot \|f\|_\infty \,. \tag{3.26}$$

Lo cual demuestra que u en (3.25) *es* continua y que su norma $\|u\| \leq \mu(X)$. De hecho,

$$\|u\| = \mu(X)\,. \tag{3.27}$$

La regularidad interior de μ implica que existe un conjunto compacto $K \Subset X$ con $\mu(K) \geq \mu(X) - 1/n$; luego también existe $f \in C_c(X)$ con $0 \leq f \leq 1$ y $f = 1$ en K. De ello resulta que $\mu(f) \geq \mu(K) \geq \mu(X) - 1/n$, para *cualquier* n, lo que prueba (3.27).

Nos queda por demostrar que si u viene definida por (3.25), siendo μ una medida de Radon finita positiva, entonces la $\tilde{\mu}$ medida definida a partir de u mediante (3.25) coincide precisamente con μ.

Este paso no ofrece dificultades siempre que mantengamos las ideas claras. Partiendo de una medida finita de Radon $\mu \geq 0$, definimos u mediante (3.25) y, para $U \subset X$ abierto (3.28)

$$\tilde{\mu}(U) = \sup\left\{\int_X f\,d\mu\,,\ 0 \leq f \leq 1\,,\ f \in C(X),\ \operatorname{supp}(f) \Subset K\right\}.$$

Por las propiedades de la integral,

$$\tilde{\mu}(U) \leq \mu(U).$$

A la inversa, si $K \Subset U$ existirá un elemento $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$ y $f = 1$ en K y $\operatorname{supp}(f) \subset U$. Así sabemos que

$$\tilde{\mu}(U) \geq \int_X f\,d\mu \geq \mu(K)\,. \tag{3.29}$$

Por la regularidad interna de μ, podemos elegir $K \Subset U$ de tal modo que $\mu(K) \geq \mu(U) - \epsilon$, dado $\epsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\tilde{\mu}(U) = \mu(U).$$

De esta forma queda probado el teorema de representación de Riesz mediante la descomposición de la medida; lo que explicaré en clase si hay suficiente interés en ello. En mi opinión, esto cubre suficientemente la teoría de medidas.

Conviene observar que, en realidad, hemos probado algo más profundo que el enunciado del teorema, como es que bajo la correspondencia $u \leftrightarrow \mu$,

$$\|u\| = |\mu|\,(X) =: \|\mu\|_1\,. \tag{3.30}$$

Por consiguiente, la correspondencia es una *isometría.*

4. ESPACIO DE HILBERT

Hemos demostrado que $L^p(X, \mu)$ es un espacio de Banach; un espacio normado completo. Comenzamos a continuación la clase sobre los espacios de Hilbert, un tipo particular de espacios de Banach de los que $L^2(X, \mu)$ es un ejemplo típico, y en los que la norma proviene de un producto interior, tal y como ocurre en el espacio euclídeo.

Un producto interior en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ (también se puede hacer el supuesto real, ya que no hay muchos cambios) es una forma sesquilineal

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

escrita como (u, v), si $u, v \in V$. La parte sesquilineal implica linealidad en la primera variable

$$(4.1) \qquad (a_1u_1 + a_2u_2\,,\ v) = a_1(u_1, v) + a_2(u_2, v),$$

antilinealidad en la segunda

$$(4.2) \qquad (u, a_1v_1 + a_2v_2) = \overline{a}_1(u, v_1) + \overline{a}_2(u, v_2)$$

y la condición de conjugación

$$(4.3) \qquad (u, v) = \overline{(v, u)}\,.$$

Hay que tener en cuenta que (4.2) se deriva de (4.1) y (4.3). Si además suponemos la condición de positividad[8]

$$(4.4) \qquad (u, u) \geq 0\,,\ (u, u) = 0 \Rightarrow u = 0\,,$$

tenemos entonces que

$$(4.5) \qquad \|u\| = (u, u)^{1/2}$$

es una norma en V, tal y como veremos más adelante.

Supongamos que $u, v \in V$ tienen $\|u\| = \|v\| = 1$. Entonces $(u, v) = e^{i\theta}\,|(u,v)|$ para algunos $0 \in \mathbb{R}$. Dado que θ, $e^{i\theta}\,(u,v) = |(u,v)|$ es real, luego expandiendo y utilizando la linearidad para $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (e^{-i\theta}u - sv\,,\ e^{-i\theta}u - sv) \\ &= \|u\|^2 - 2s\,\mathrm{Re}\ e^{-i\theta}(u, v) + s^2\|v\|^2 = 1 - 2s|(u, v)| + s^2. \end{aligned}$$

En este caso el mínimo se produce cuando $s = |(u,v)|$ y su valor es negativo a menos que I $|(u,v)| \leq 1$. Aplicando la linealidad, y comprobando los casos triviales $u =$ ó $v = 0$ prueba que

$$(4.6) \qquad |(u, v)| \leq \|u\|\,\|v\|,\ \forall\ u, v \in V\,.$$

Esto se conoce como desigualdad de Schwarz[9]. Aplicándola:

---

[8] Obsérvese que (u,u) es real por (4.3).

[9] Schwarz sin "t" en este caso.

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + (u,v) + (v,u) + \|v\|^2 \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2 \\ &\Longrightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \ \forall\, u,v \in V\end{aligned}$$

que es la desigualdad triangular.

Definición 4.1. *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial V con un producto interior que cumple con* (4.1) – (4.4) *lo cual es completo como espacio normado* (*es decir, es un espacio de Banach*).

Ya hemos demostrado que $L^2(X, \mu)$ es un espacio de Hilbert para cualquier medida positiva μ. El producto interior es

$$(f,g) = \int_X f\overline{g}\, d\mu\,, \tag{4.7}$$

por lo que de (4.3) obtenemos $\|f\|_2$.

Otra identidad importante válida para todos los espacios de producto interior es la ley del paralelogramo:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\,. \tag{4.8}$$

Lo anterior sirve para probar el "teorema de la existencia" de la teoría de espacios de Hilbert.

Lema 4.2. *Sea $C \subset H$, en un espacio de Hilbert, abierto y convexo (es decir, $su + (1-s)\,v \in C$ si $u,v \in C$ y $0 < s < 1$). Luego C contiene un elemento único de la norma más pequeña.*

Prueba. Podemos elegir una secuencia $u_n \in C$ tal que

$$\|u_n\| \to \delta = \inf\{\|v\|\,;\, v \in C\}\ .$$

Por la ley del paralelogramo,

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 &= 2\|u_n\|^2 + 2\|u_m\|^2 - \|u_n + u_m\|^2 \\ &\leq 2(\|u_n\|^2 + \|u_m\|^2) - 4\delta^2\end{aligned}$$

donde empleamos el hecho de que $(u_n + u_m)/2 \in C$ por lo que deberemos tener normado al menos δ. Por tanto $\{u_n\}$ es una secuencia de Cauchy, que será convergente por la completitud que se presume en H. Por consiguiente $\lim u_n = u \in C$ (ya que se supone que es cerrado) y por la desigualdad triangular

$$|\|u_n\| - \|u\|| \leq \|u_n - u\| \to 0$$

Luego $\|u\| = \delta$. La unicidad de u se desprende una vez más de la ley del paralelogramo, que demuestra que si $\|u'\| = \delta$:

$$\|u - u'\| \leq 2\delta^2 - 4\|(u+u')/2\|^2 \leq 0\,.$$

El dato fundamental sobre un espacio de Hilbert es que cada elemento $v \in H$ defina un funcional lineal continuo mediante

$$H \ni u \longmapsto (u, v) \in \mathbb{C}$$

y, a la inversa, *cada* funcional lineal continua se crea de esta manera.

Proposición 4.3. *Si L : H→ C es una funcional lineal continua en un espacio de Hilbert, será entonces un elemento único v ∈ H tal que*

$$(4.9) \qquad Lu = (u, v) \ \forall \ u \in H \, ,$$

Prueba. Consideremos el espacio lineal

$$M = \{u \in H \, ; \, Lu = 0\}$$

como el espacio nulo de L, una funcional lineal continua en H. Por la continuidad que hemos supuesto, M es cerrado. Podemos suponer que L no es idénticamente cero (ya que, entonces, $v = 0$ en (4.9)). Por tanto, existirá $w \notin M$.

Consideremos

$$w + M = \{v \in H \, ; \, v = w + u \, , \, u \in M\} \ .$$

Se trata de un subconjunto convexo y cerrado de H. Aplicando el lema 4.2, tiene un único elemento más pequeño, $v \in w + M$. Dado que v minimiza la norma en $w + M$,

$$\|v + su\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(su, v) + \|s\|^2\|u\|^2$$

es estacionario en $s = 0$. Consiguientemente, Re $(u, v) = 0 \ \forall \ u \in M$, y el mismo argumento sustituyendo s por is demuestra que $(v, u) = 0 \ \forall \ u \in M$.

Ahora tenemos $v \in w + M$, luego $L_v = L_w \neq 0$. Consideremos el elemento $w' = w/L_w \in H$. Dado que $Lw' = 1$, para cualquier $u \in H$

$$L(u - (Lu)w') = Lu - Lu = 0 \, .$$

De donde resulta que $u - (L_u)w' \in M$ por lo que si $w'' = w'/\|w'\|^2$

$$(u, w'') = ((Lu)w', w'') = Lu\frac{(w', w')}{\|w'\|^2} = Lu \, .$$

La unicidad de v se desprende del carácter positivo de la norma.

Corolario 4.4. *Para cualquier medida positiva μ, toda funcional lineal continua*

$$L : L^2(X, \mu) \to \mathbb{C}$$

es de la forma

$$Lf = \int_X f\overline{g}\, d\mu \, , \ \ g \in L^2(X, \mu) \, .$$

Obsérvese la evidente fuerza del "razonamiento abstracto" en este caso. Aunque da la impresión de que hemos construido g de la nada, su existencia se deriva de la *completitud* de $L^2(X, \mu)$, aunque resulta muy conveniente expresar el argumento de forma abstracta para un espacio general de Hilbert.

5. FUNCIONES TEST

Hasta el momento hemos tratado principalmente la integración. Una de las nociones que hemos aprendido es que, partiendo de espacios duales, podemos considerar las funciones como funcionales. Analicemos esta idea brevemente.

Consideremos la bola unidad en $\mathbb{R}^n$

$$\overline{\mathbb{B}^n} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \ |x| \leq 1\} .$$

Elegiré la bola unidad *cerrada* porque me interesa tratar con un espacio métrico compacto. Ya nos hemos encontrado con varios espacios de Banach de funciones en $\overline{\mathbb{B}^n}$ por ejemplo:

$$C(\overline{\mathbb{B}^n}) = \{u : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{C} ; \quad u \text{ continua}\}$$

$$L^2(\overline{\mathbb{B}^n}) = \left\{u : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{C}; \ \text{ medible según Borel con } \int |u|^2 \, dx < \infty\right\}$$

De aquí en adelante, *dx* es una medida de Lebesgue y las funciones se identifican cuando son iguales casi en su totalidad.

Dado que $\overline{\mathbb{B}^n}$ es compacto, tenemos una inclusión natural

$$C(\overline{\mathbb{B}^n}) \hookrightarrow L^2(\overline{\mathbb{B}^n}) . \tag{5.1}$$

Lo que es también una inclusión topológica; es decir, es una correlación lineal acotada, ya que

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u\|_\infty \tag{5.2}$$

donde C^2 es el volumen de la bola unidad. En general, cuando tenemos una definición de este tipo:

Lema 5.1. *Si $V \hookrightarrow U$ es un subespacio con una norma más fuerte,*

$$\|\varphi\|_U \leq C\|\varphi\|_V \ \forall \ \varphi \in V$$

la restricción nos proporciona una correlación lineal continua

$$U' \to V', \ U' \ni L \longmapsto \tilde{L} = L|_V \in V', \ \|\tilde{L}\|_{V'} \leq C\|L\|_{U'} . \tag{5.3}$$

Si V es denso en U entonces la correlación (5.3) *es inyectiva.*

Prueba. Por definición de la norma dual

$$\begin{aligned}\|\tilde{L}\|_{V'} &= \sup\left\{\left|\tilde{L}(v)\right| \; ; \; \|v\|_V \leq 1\,,\ v \in V\right\}\\ &\leq \sup\left\{\left|\tilde{L}(v)\right| \; ; \; \|v\|_U \leq C\,,\ v \in V\right\}\\ &\leq \sup\left\{|L(u)| \; ; \; \|u\|_U \leq C\,,\ u \in U\right\}\\ &= C\|L\|_{U'}\,.\end{aligned}$$

Si $V \subset U$ es denso, entonces la anulación de $L : U \to \mathbb{C}$ en V implica su anulación en U.

Volviendo al caso concreto (5.1) resulta evidente que necesitamos obtener una correlación continua entre los espacios duales.

$$L^2(\overline{\mathbb{B}^n}) \cong (L^2(\overline{\mathbb{B}^n}))' \to (C(\overline{\mathbb{B}^n}))' = M(\overline{\mathbb{B}^n})\,.$$

Aquí utilizaremos el teorema de la representación de Riesz y la dualidad para espacios de Hilbert. Se supone que la correlación aplicada aquí es lineal, no antilineal; es decir,

$$(5.4) \qquad L^2(\overline{\mathbb{B}^n}) \ni g \longmapsto \int \cdot g\, dx \in (C(\overline{\mathbb{B}^n}))'\,.$$

La idea es hacer que el espacio de "funciones test" sea lo más razonablemente pequeño posible, manteniendo a la vez la *densidad* en espacios igualmente razonables.

Recordemos que una función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *es diferenciable* en $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ cuando existe $a \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$(5.5) \qquad |u(x) - u(\overline{x}) - a \cdot (x - \overline{x})| = o(|x - \overline{x}|)\,.$$

El símbolo "o minúscula" significa aquí que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ sujeto a

$$|x - \overline{x}| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(\overline{x}) - a(x - \overline{x})| < \epsilon\,|x - \overline{x}|\,.$$

Los coeficientes de $a = (a_1, \ldots, a_n)$ son las derivadas parciales de u en $\overline{x}$,

$$a_i = \frac{\partial u}{\partial x_j}(\overline{x})$$

ya que

$$(5.6) \qquad a_i = \lim_{t \to 0} \frac{u(\overline{x} + te_i) - u(\overline{x})}{t}\,,$$

siendo $e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ el i-ésimo vector base. Se dice que la función u es *continuamente diferenciable* en $\mathbb{R}^n$ cuando en *cada* punto $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y cada una de las derivadas parciales n son continuas,

$$(5.7) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\,.$$

Definición 5.2. *Sea* $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ *el subespacio de*

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$$

tal que cada conjunto $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ *es continuamente diferenciable y*

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n), \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Proposición 5.3. *La función*

$$\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_\infty$$

e*s una norma en* $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ *con respecto a la que es un espacio de Banach.*

Prueba. Que $\| \ \|_{C^1}$ es una norma se desprende de las propiedades de $\| \ \|_\infty$. A saber, $\|u\|_{C^1} = 0$ implica que $u = 0$, $\|au\|_{C^1} = |a| \ \|u\|_{C^1}$ y la desigualdad triangular se desprende de la misma desigualdad para $\| \ \|_\infty$.

Del mismo modo, en parte la completitud de $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ se desprende de la completitud de $C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Si $\{u_n\}$ es una secuencia de Cauchy en $C_0^1(\mathbb{R}^n)$; entonces u_n y $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ son Cauchy en $C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Se desprende que existen límites de estas secuencias,

$$u_n \to v\,, \ \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \to v_j \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\,.$$

No obstante, debemos comprobar que v es continuamente diferenciable y que $\frac{\partial u_n}{\partial x_j} = v_j$

Una forma de hacerlo es aplicando el teorema fundamental de cálculo a cada variable. Tendríamos

$$u_n(\overline{x} + te_i) = \int_0^t \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(\overline{x} + se_i)\, ds + u_n(\overline{x})\,.$$

A medida que $n \to \infty$ todos los términos convergen y, por lo tanto, por la continuidad de la integral,

$$u(\overline{x} + te_i) = \int_0^t v_j(\overline{x} + se_i)\, ds + u(\overline{x})\,.$$

Lo que demuestra que el límite de (5.6) existe y, consiguientemente, $v_i(\bar{x})$ es la derivada parcial de u con respecto a x_i. Solamente nos queda por demostrar que u es diferenciable en cada punto; pero esto es algo que dejo pendiente para el Problema 17.

De este modo, casi por definición, tenemos un ejemplo del Lema 5.1, $C_0^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Se trata de un concepto ciertamente denso, pero por el momento no voy a molestarme en demostrarlo. Sabemos que

$$(C_0^0(\mathbb{R}^n))' \to (C_0^1(\mathbb{R}^n))'$$

y suponemos que se trata de una función inyectiva. Por lo tanto, hay *más* funcionales en $C_0^1(\mathbb{R}^n)$, entre ellas ciertas cosas que son "más originales que las medidas". Un ejemplo de
ello guarda relación con el delta de Dirac

$$\delta(\overline{x})(u) = u(\overline{x})\,,\;\; u \in C_0^0(\mathbb{R}^n)\,,$$

es decir,

$$\delta(\overline{x})(u) = u(\overline{x})\,,\;\; u \in C_0^0(\mathbb{R}^n)\,,$$

Se trata evidentemente de una funcional lineal continua, lo que no hace más que indicar $\frac{\partial}{\partial x_j}\,\delta(\bar{x})$.

Claro que, ¿por qué detenernos en una derivada?

Definición 5.4. *El espacio*

$$C_0^k(\mathbb{R}^n) \subset C_0^1(\mathbb{R}^n)\, k \geq 1$$

viene definido inductivamene por el requisito de que

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in C_0^{k-1}(\mathbb{R}^n)\,,\;\; j = 1, \ldots, n\,.$$

Se toma la norma en $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ *para que sea*

$$\|u\|_{C^k} = \|u\|_{C^{k-1}} + \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{C^{k-1}}\,. \tag{5.8}$$

Todos estos son espacios de Banach, ya que si $\{u_n\}$ es Cauchy en $C_0^k(\mathbb{R}^n)$, es una secuencia de Cauchy y de ahí que sea convergente en $C_0^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, como lo es en $\frac{\partial}{\partial x_j}$, j = 1,...,$n$–1. Además, los límites de $\frac{\partial}{\partial x_j}$ son, por la Proposición 5.3, las derivadas de los límites.

De ello obtenemos una secuencia de espacios que se van haciendo cada vez más uniformes

$$C_0^0(\mathbb{R}^n) \supset C_0^1(\mathbb{R}^n) \supset \cdots \supset C_0^k(\mathbb{R}^n) \supset \cdots ,$$

con normas crecientemente amplias. A su vez, podemos esperar también que los duales vayan haciéndose mayores proporcionalmente al incremento de k.

Además de fijarnos en la uniformidad creciente de las funciones, debemos tener en cuenta la "infinidad", dado que $\mathbb{R}^n$ no es compacto. Observe que un elemento $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ define (con respecto a una medida de Lebesgue por defecto) una funcional en $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ y, por tanto, en *todos* los $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, una función del tipo de la función constante 1
no es integrable en $\mathbb{R}^n$. Como esta cuestión, y los polinomios, es precisamente lo que nos interesa, tendremos en cuenta una segunda condición de *pequeñez en la infinitud*. Fijemos

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2} \tag{5.9}$$

una función que tiene el tamaño de $|x|$ por $|x|$, y que tiene la propiedad de ser uniforme[10].

Definición 5.5. *Para cualquier conjunto k, $l \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$*

$$\langle x \rangle^{-l} C_0^k(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \,;\, u = \langle x \rangle^{-l} v ,\ v \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \right\} ,$$

con norma,

$$\|u\|_{k,l} = \|v\|_{C^k} ,\ v = \langle x \rangle^l u.$$

Hay que tener en cuenta que la definición simplemente dice que $u = \langle x \rangle^{-l} v$, con $v \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. De ello se deduce inmediatamente que $\langle x \rangle^{-l} v$ es un espacio de Banach con esta norma.

Definición 5.6. *El espacio "Schwartz"[11] de las funciones test en $\mathbb{R}^n$ es*

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} ; u \in \langle x \rangle^{-l} C_0^k \ (\mathbb{R}^n)\, para \cdot todo \cdot k \cdot y \cdot l \in \mathbb{N} \right\}$$

A primera vista no se aprecia que este espacio sea no vacío (tenemos 0, pero no basta…), eso que

$$\exp(-|x|^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

es el Problema 19.

La idea de Schwartz es que el dual de $S(\mathbb{R}^n)$ debería contener todos los objetos "interesantes", al menos aquellos que mostraran un "crecimiento polinómico". El problema es que *no* disponemos de una norma en $S(\mathbb{R}^n)$, sino que tenemos un *gran número* de ellas. Obsérvese que

$$\langle x \rangle^{-l} C_0^k(\mathbb{R}^n) \subset \langle x \rangle^{-l'} C_0^{k'}(\mathbb{R}^n)$$

---

[10] Véase Problema 18.

[11] Laurent Schwartz, esta vez con "t".

si $l \geq l'$ y $k \geq k'$.

De esta manera lo contemplamos como un espacio lineal.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_k \langle x \rangle^{-k} C_0^k(\mathbb{R}^n)\,. \tag{5.10}$$

Como estos espacios se están haciendo más pequeños, tenemos un número de normas contablemente infinito. Por ello se dice que $S(\mathbb{R}^n)$ es un espacio *contablemente normado*.

Proposición 5.7. *Para* $u \in S(\mathbb{R}^n)$, *se fija*

$$\|u\|_{(k)} = \|\langle x \rangle^k u\|_{C^k} \tag{5.11}$$

y se define

$$d(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|u-v\|_{(k)}}{1+\|u-v\|_{(k)}}\,, \tag{5.12}$$

entonces d es una función de distancia en $S(\mathbb{R}^n)$ *con respecto a la cual es un espacio métrico completo*.

Prueba. La serie en (5.12) converge, ya que

$$\frac{\|u-v\|_{(k)}}{1+\|u-v\|_{(k)}} \leq 1\,.$$

Las dos primeras condiciones de una métrica son claras,

$$d(u,v) = 0 \Rightarrow \|u-v\|_{C_0} = 0 \Rightarrow u = v,$$

y la simetría es inmediata. Quizás la desigualdad triangular encierra más misterios.

En realidad basta con probar que

$$\tilde{d}(u,v) = \frac{\|u-v\|}{1+\|u-v\|} \tag{5.13}$$

es una métrica en cualquier espacio normado, ya que entonces podemos sumar a k. Consideraremos por tanto

$$\frac{\|u-v\|}{1+\|u-v\|} + \frac{\|v-w\|}{1+\|v-w\|} = \frac{\|u-v\|(1+\|v-w\|)+\|v-w\|(1+\|u-v\|)}{(1+\|u-v\|)(1+\|v-w\|)}\,.$$

Comparando esto con $\check{d}(v,w)$ deberemos demostrar que

$$(1+\|u-v\|)(1+\|v-w\|)\|u-w\|$$
$$\leq (\|u-v\|(1+\|v-w\|)+\|v-w\|(1+\|u-v\|))(1+\|u-w\|)\,.$$

Partiendo del lado izquierdo (LHS) hacia el derecho (RHS) y aplicando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}\text{LHS} &\leq \|u-w\| + (\|u-v\| + \|v-w\| + \|u-v\|\,\|v-w\|)\|u-w\| \\ &\leq (\|u-v\| + \|v-w\| + \|u-v\|\,\|v-w\|)(1+\|u-w\|) \\ &\leq \text{RHS}\,.\end{aligned}$$

De donde se deduce que d es una métrica

Supongamos que u_n es una secuencia de Cauchy. Tendríamos $d(u_n, u_m) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. En particular, dado

$$\epsilon > 0 \;\exists\; N \text{ s.t. } n,m > N$$

implica que

$$d(u_n, u_m) < \epsilon 2^{-k} \;\forall\; n,m > N.$$

Los términos de (5.12) son todos ellos positivos, por lo que

$$\frac{\|u_n - u_m\|_{(k)}}{1+\|u_n - u_m\|_{(k)}} < \epsilon \;\forall\; n,m > N\,.$$

Si $\varepsilon < 1/2$ ello implica a su vez que

$$\|u_n - u_m\|_{(k)} < 2\epsilon\,,$$

luego la secuencia es Cauchy en $\langle x\rangle^{-k} C_0^k(\mathbb{R}^n)$. De la completitud de estos espacios se desprende que $u_n \to u$ en $\langle x\rangle^{-k} C_0^k(\mathbb{R}^n)_j$ para cada k. Dado $\varepsilon > 0$ escogeremos un valor de k lo bastante grande como para que 2–k < $\varepsilon/2$. Entonces $\exists$ N tal que. $n > N$

$$\Rightarrow \|u - u_n\|_{(j)} < \epsilon/2 \; n > N\,,\, j \leq k\,.$$

Por consiguiente

$$d(u_n, u) = \sum_{j\leq k} 2^{-j} \frac{\|u-u_n\|_{(j)}}{1+\|u-u_n\|_{(j)}}$$

$$+ \sum_{j>k} 2^{-j} \frac{\|u-u_n\|_{(j)}}{1+\|u-u_n\|_{(j)}}$$

$$\leq \epsilon/4 + 2^{-k} < \epsilon\,.$$

Esta $u_n \to u$ en $S(\mathbb{R}^n)$.
Aquí vendría la explicación de $C_c(\mathrm{R}^n)$.

6. DISTRIBUCIONES TEMPERADAS

Una primera aproximación válida a las distribuciones se puede encontrar en [2], mientras que en [4] aparecen tratadas de un modo más exhaustivo.

Ya hemos explicado anteriormente la topología métrica completa en $S(\mathbb{R}^n)$. A continuación, trataré de convencerles de que los elementos de su espacio dual $S'(\mathbb{R}^n)$ tienen un número de propiedades de las funciones suficiente para que podamos trabajar con ellas como "funciones generalizadas".
En primer lugar desarrollaremos algunos aspectos relativos a la notación. Una función diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ consta de derivadas parciales que hemos denominado $\partial\varphi/\partial x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Por motivos que quedarán claros más adelante, incluimos en la definición una $\sqrt{-1}$ y escribimos

$$D_j\varphi = \frac{1}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,. \tag{6.1}$$

Decimos que φ es continuamente diferenciable cuando cada $D_j\varphi$ es continua. A continuación definimos inductivamente la diferenciabilidad continua un número de veces k diciendo que φ y $D_j\varphi$ son continuamente diferenciables (k – 1) veces, lo que para $k = 2$ significa que

$D_jD_k\varphi$ son continuas para $j, k = 1, \ldots, n$.

Recordemos ahora que, cuando son continuas, estas segundas derivadas son simétricas:

$$D_jD_k\varphi = D_kD_j\varphi\,. \tag{6.2}$$

Lo cual quiere decir que podemos emplear una notación compacta para derivadas mayores. Tomemos $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$; llamaremos "multi-índice" a un elemento $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y, si φ es continuamente diferenciable k veces como mínimo, definimos[12]

$$(6.3)\quad D^\alpha\varphi = \frac{1}{i^{|\alpha|}}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n}\varphi$$

siempre que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leq k$.

El próximo paso consiste en *definir* los espacios.

$$(6.4)\qquad \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ D^\alpha\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| \leq k\right\}\ .$$

Debemos fijarnos en que la convención establece que se afirma que $D^\alpha\varphi$ existe cuando se requiere que sea continua. Aplicando $\langle x\rangle = (1 + |x|^2)$ definimos

$$(6.5)\qquad \langle x\rangle^{-k}\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ \langle x\rangle^k\varphi \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)\right\}\ ,$$

con lo que nuestro espacio de funciones test es

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_k \langle x\rangle^{-k}\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)\,.$$

Consecuentemente,

$$(6.6)\qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow D^\alpha(\langle x\rangle^k\varphi) \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| \leq k \quad \text{y todo } k.$$

Lema 6.1. *La condición* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ *puede expresarse*

$$\langle x\rangle^k D^\alpha\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| \leq k\,,\ \forall\ k\,.$$

Prueba. Comenzamos por comprobar que

$$\begin{gathered}\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\,,\ D_j(\langle x\rangle\varphi) \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\,,\ j = 1, \cdots, n\\ \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\,,\ \langle x\rangle D_j\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\,,\ j = 1, \cdots, n\,.\end{gathered}$$

Dado que

$$D_j\langle x\rangle\varphi = \langle x\rangle D_j\varphi + (D_j\langle x\rangle)\varphi$$

y que

[12] Periódicamente es posible que se produzca confusión entre los dos significados de $|\alpha|$, aunque no es frecuente.

$$D_j\langle x\rangle = \tfrac{1}{i}x_j\langle x\rangle^{-1}$$
es una función acotada continua, la cuestión queda clara. Considerémosla ahora para un valor mayor de *k*.

$$\begin{aligned}(6.7)\qquad & D^\alpha\langle x\rangle^p\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| = p\,,\ 0 \le p \le k \\ & \Leftrightarrow \langle x\rangle^p D^\alpha\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| = p\,,\ 0 \le p \le k\,.\end{aligned}$$

Dejaré que comprueben esto en el Problema 6.1.

Corolario 6.2. *Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, las normas*

$$\|\langle x\rangle^k\varphi\|_{\mathcal{C}^k} \ \text{y} \qquad \sum_{\substack{|\alpha|\le k,\\ |\beta|\le k}} \|x^\alpha D_x^\beta\varphi\|_\infty$$

son equivalentes.

Prueba. Toda prueba razonable de (6.2) debe demostrar que las normas

$$\|\langle x\rangle^k\varphi\|_{\mathcal{C}^k} \ \text{y} \qquad \sum_{|\beta|\le k} \|\langle x\rangle^k D^\beta\varphi\|_\infty$$

son equivalentes. Al existir constantes positivas tal que

$$C_1\left(1 + \sum_{|\alpha|\le k}|x^\alpha|\right) \le \langle x\rangle^k \le C_2\left(1 + \sum_{|\alpha|\le k}|x^\alpha|\right)$$

las normas se cumplen.

Proposición 6.3. *Un funcional lineal $u : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ es continuo si, y solamente si, existe C, k tal que*

$$|u(\varphi)| \le C \sum_{\substack{|\alpha|\le k,\\ |\beta|\le k}} \sup_{\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D_x^\beta\varphi\right|\,.$$

Prueba. Esta es solamente la equivalencia de las normas, puesto que ya demostramos que
$u \in S'(\mathbb{R}^n)$ si, y solamente si,

$$|u(\varphi)| \le C\|\langle x\rangle^k\varphi\|_{\mathcal{C}^k}$$

para algunos valores de *k*.

Lema 6.4. *Una* correlación *lineal*

$$T : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$

es continua si, y solamente si, para cada k existen C y j de tal modo que si $|\alpha| \leq y|\beta| \leq k$

$$(6.8)\qquad \sup\left|x^\alpha D^\beta T\varphi\right| \leq C \sum_{|\alpha'|\leq j,\ |\beta'|\leq j} \sup_{\mathbb{R}^n}\left|x^{\alpha'} D^{\beta'}\varphi\right|\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Prueba. Este es el Problema 6.2.

Toda esta complicación sobre normas demuestra que

$$x_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ y } D_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

son continuas.

Ahora ya tenemos cierta idea del significado de $u \in S'(\mathbb{R}^n)$. Fijémonos en que $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ implica

$$(6.9)\qquad x_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\ \forall\ j = 1, \cdots, n$$

$$(6.10)\qquad D_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\ \forall\ j = 1, \cdots, n$$

$$(6.11)\qquad \varphi u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

donde tenemos que definir estos elementos de forma razonable. Hay que recordar que "se supone" que $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ es como una integral aplicada a una "función generalizada".

$$(6.12)\qquad u(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\psi(x)\,dx\ \forall\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dado que esto sería cierto si *u fuera* una función *definiremos*

$$(6.13)\qquad x_j u(\psi) = u(x_j\psi)\ \forall\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

A continuación, verificamos que $x_j u \in S'(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} |x_j u(\psi)| &= |u(x_j\psi)| \\ &\leq C \sum_{|\alpha|\leq k,\ |\beta|\leq k} \sup_{\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D^\beta(x_j\psi)\right| \\ &\leq C' \sum_{|\alpha|\leq k+1,\ |\beta|\leq k} \sup_{\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D^\beta\psi\right|\ . \end{aligned}$$

De modo similar podemos definir las derivadas parciales mediante la fórmula estándar de integración por partes.

$$(6.14) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} (D_j u)(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)(D_j\varphi(x))\,dx$$

cuando $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Por consiguiente, si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ *definiremos* de nuevo

$$D_j u(\psi) = -u(D_j\psi) \ \forall \ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

De esta manera queda claro que $D_j u \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Iterando estas definiciones hallamos que, para cualquier multi-índice α, D^α define una correlación lineal

$$(6.15) \qquad D^\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

Por lo general, un operador diferencial lineal con coeficientes constantes es una suma de estos "monomios". Así, por ejemplo, el operador de Laplace es

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2\,.$$

Lo que a nosotros nos interesa es tratar de resolver ecuaciones diferenciales tales como

$$\Delta u = f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

También podemos multiplicar $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ por $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, definiendo simplemente

$$(6.16) \qquad \varphi u(\psi) = u(\varphi\psi) \ \forall \ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Para que esto tenga sentido basta con comprobar que

$$(6.17) \qquad \sum_{\substack{|\alpha|\le k,\\ |\beta|\le k}} \sup_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta(\varphi\psi)\right| \le C \sum_{\substack{|\alpha|\le k,\\ |\beta|\le k}} \sup_{\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \psi\right|\,.$$

Lo cual se desprende fácilmente de la fórmula de Leibniz.

Para comenzar a considerar $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ como una función generalizada debemos definir en primer lugar su *soporte* (supp). Recordemos que

$$(6.18) \qquad \mathrm{supp}(\psi) = \mathrm{cerr}\{x \in \mathbb{R}^n; \psi(x) \neq 0\}\,.$$

Podemos formular esto de otra forma "débil" que resulta más sencilla de generalizar:

$$(6.19) \qquad p \notin \mathrm{supp}(u) \Leftrightarrow \ \exists\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\ \varphi(p) \neq 0\,,\ \varphi u = 0\,.$$

De hecho, esta definición es válida para *cualquier* $u \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Lema 6.5. *El conjunto* supp(u) *definido mediante* (6.19) *es un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}^n$ *y se reduce a* (6.18) *cuando* $u \in S(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. El conjunto definido mediante (6.19) es cerrado, ya que

$$(6.20) \qquad \operatorname{supp}(u)^{\complement} = \{p \in \mathbb{R}^n;\ \exists\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \varphi(p) \neq 0,\ \varphi u = 0\}$$

es claramente abierto: la misma φ funciona para puntos próximos. Si $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, definiremos $u_\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$, que de nuevo identificaremos con ψ mediante

$$(6.21) \qquad u_\psi(\varphi) = \int \varphi(x)\psi(x)\,dx\,.$$

Resulta obvio que $u_\psi = 0 \Longrightarrow \psi = 0$, simplemente fijamos $\varphi = \psi$ en (6.21). Por lo que la correlación

$$(6.22) \qquad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \psi \longmapsto u_\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

es inyectiva. Queremos probar que

$$(6.23) \qquad \operatorname{supp}(u_\psi) = \operatorname{supp}(\psi)$$

dada por (6.19) en el lado izquierdo y por (6.18) en el derecho. Comenzamos por demostrar que

$$\operatorname{supp}(u_\psi) \subset \operatorname{supp}(\psi).$$

Para lo que deberemos comprobar que

$$p \notin \operatorname{supp}(\psi) \Rightarrow p \notin \operatorname{supp}(u_\psi).$$

La primera condición es que $\psi(x) = 0$ en un vecindario, U de p, luego existe una función C^∞con soporte en U y $\varphi(p) \neq 0$. Por tanto, $\varphi\psi \equiv 0$. Supongamos, a la inversa, $p \notin$ supp(u_ψ). Existirá entonces $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(p) \neq 0$ y $\varphi u_\psi = 0$; es decir:

$$\varphi u_\psi(\eta) = 0\ \forall\ \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Esto quiere decir, por la inyectividad de $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$, que $\varphi\psi = 0$, por lo que $\psi \equiv 0$ en un vecindario de p y $p \notin$ supp (ψ).

Consideremos los ejemplos más simples de distribución que no sean funciones; concretamente, aquellos con soporte en un punto p dado. El más obvio es la "función" delta de Dirac.

$$(6.24) \qquad \delta_p(\varphi) = \varphi(p)\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Podemos obtener muchos más, ya que D^αes *local*

$$(6.25) \qquad \operatorname{supp}(D^\alpha u) \subset \operatorname{supp}(u) \;\forall\; u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

De hecho,

$$p \notin \operatorname{supp}(u) \Rightarrow \exists\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\; \varphi u \equiv 0,\; \varphi(p) \neq 0.$$

Por consiguiente, el soporte de cada una de las distribuciones $D^\alpha \delta_p$ se halla contenido en $\{p\}$. Ninguna de ellas se anula y todas son linealmente independientes.

7. CONVOLUCION Y DENSIDAD

Hemos definido una relación de inclusión

(7.1)

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \longmapsto u_\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\; u_\varphi(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)\,dx \;\forall\; \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Esta relación nos permite "pensar en" $S(\mathbb{R}^n)$ como un sub-espacio de $S'(\mathbb{R}^n)$; lo que indica que normalmente identificaremos u_φ con φ. Podemos hacerlo porque sabemos que (7.1) es inyectiva. Podemos extender la relación (7.1) para incluir espacios más amplios

$$(7.2) \qquad \begin{aligned} \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^n) \ni \varphi &\longmapsto u_\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ L^p(\mathbb{R}^n) \ni \varphi &\longmapsto u_\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ M(\mathbb{R}^n) \ni \mu &\longmapsto u_\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ u_\mu(\psi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi\, d\mu\,, \end{aligned}$$

pero necesitamos saber que estas relaciones son inyectivas antes de pasar a otras cosas.

Podemos comprobarlo mediante *convolución*, que es una especie de "producto" de funciones. Para comenzar, supongamos $\upsilon \in C^0_0(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Definiremos una nueva función "promediando υ con respecto a ψ":

$$(7.3) \qquad v * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)\psi(y)\,dy\,.$$

La integral converge mediante convergencia dominada: $\psi(y)$ es integrable y υ acotada,

$$|v(x-y)\psi(y)| \leq \|v\|_{\mathcal{C}^0_0}\, |\psi(y)|\;.$$

Podemos aplicar el mismo tipo de cálculo para mostrar que $\upsilon * \psi$ es continua.
Fijando $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(7.4)\quad v * \psi(x+x') - v * \psi(x)$$
$$= \int (v(x+x'-y) - v(x-y))\psi(y)\, dy\,.$$

Para comprobar que esta función es pequeña para un valor pequeño de x', dividiremos la integral en dos partes. Dado que el valor de ψ es muy pequeño cuando es próxima a infinito, dado $\varepsilon > 0$ podemos escoger un valor tan alto de R que

$$(7.5)\qquad \|v\|_\infty \cdot \int_{|y]|\geq R} |\psi(y)|\ dy \leq \epsilon/4\,.$$

El conjunto $|y| \leq R$ es compacto, y si $|x| \leq R'$, $|x'| \leq 1$, entonces $|x + x' - y| \leq R + R' + 1$. Una función continua es *uniformemente continua* en cualquier conjunto compacto, luego podemos elegir $\delta > 0$ tal que

$$(7.6)\qquad \sup_{\substack{|x'|<\delta \\ |y|\leq R}} |v(x+x'-y) - v(x-y)| \cdot \int_{|y|\leq R} |\psi(y)|\ dy\ < \epsilon/2\,.$$

Combinando (7.5) y (7.6) queda demostrado que $\upsilon * \psi$ es continua. Por último, llegamos a la conclusión

$$(7.7)\qquad v \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n) \Rightarrow v * \psi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\,.$$

Para ello deberemos mostrar que $\upsilon * \psi$ es pequeña en infinito, lo que se deriva del hecho de que υ lo es. Dado $\varepsilon > 0$, existirá $R > 0$ tal que $|\upsilon y| \leq \varepsilon$ si $|y| \geq R$. Dividiendo en dos la integral que define la convolución

$$|v * \psi(x)| \leq \int_{|y|>R} u(y)\psi(x-y)dy + \int_{y<R} |u(y)\psi(x-y)|dy$$
$$\leq \epsilon/2\|\psi\|_\infty + \|u\|_\infty \sup_{B(x,R)} |\psi|.$$

Dado que $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ la última constante tenderá a 0 a medida que $|x| \to\infty$.

Pero podemos buscar una opción mucho mejor. Suponiendo $|x'| \leq 1$ podemos utilizar la fórmula de Taylor con resto y escribir

$$(7.8)\qquad \psi(z+x') - \psi(z) = \int_0^{\prime} \frac{d}{dt}\psi(z+tx')\, dt = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \tilde{\psi}_j(z,x')\,.$$

En el Problema se pide verificar que

$$(7.9)\qquad \psi_j(z;x') \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ depende continuamente de } x' \text{ en } |x'| \leq 1\,.$$

Volviendo a (7.3) podemos utilizar la invariancia de reflexión y traslación sobre la medida de Lebesgue para reescribir la integral (cambiando la variable) como

$$(7.10)\qquad v * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(y)\psi(x-y)\, dy\,.$$

Lo que cambia el sentido del papel de υ y ψ y demuestra que si tanto υ como ψ se hallan en $S(\mathbb{R}^n)$, entonces $\upsilon * \psi = \psi * \upsilon$.

Utilizando esta fórmula en (7.4) tenemos

$$(7.11)$$

$$\begin{aligned} v * \psi(x + x') - v * \psi(x) &= \int v(y)(\psi(x + x' - y) - \psi(x - y))\, dy \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \int_{\mathbb{R}^n} v(y)\tilde{\psi}_j(x - y, x')\, dy = \sum_{j=1}^{n} x_j (v * \psi_j(\cdot; x')(x) . \end{aligned}$$

A partir de (7.9) y de lo que ya hemos demostrado, $\upsilon * \psi(\cdot; x')$ es continua en ambas variables, y se halla en $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ en la primera. Por consiguiente,

$$(7.12) \qquad v \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\, ,\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow v * \psi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)\, .$$

Asimismo vemos que

$$(7.13) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} v * \psi = v * \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\, .$$

Por tanto, la regularidad de $\upsilon * \psi$ proviene de ψ.

Proposición 7.1. *Si* $\upsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ *y* $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, *entonces*

$$(7.14) \qquad v * \psi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)\, .$$

Prueba. Se obtiene de (7.12), (7.13) y de la inducción.

Tomemos ahora una elección más particular de ψ. Hemos demostrado ya la existencia de

$$(7.15) \qquad \varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)\, ,\ \varphi \geq 0\, ,\ \operatorname{supp}(\varphi) \subset \{|x| \leq 1\}\, .$$

Y podemos también suponer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, dx = 1,$$

multiplicando por una constante positiva. Consideremos ahora

$$(7.16) \qquad \varphi_t(x) = t^{-n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \ 1 \geq t > 0\, .$$

Tiene las mismas propiedades, excepto que

$$(7.17) \qquad \operatorname{supp} \varphi_t \subset \{|x| \leq t\}\, ,\ \int \varphi_t\, dx = 1\, .$$

Proposición 7.2. *Si* $\upsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ entonces a medida que $t \to 0$, $\upsilon_t = \upsilon * \varphi_t \to \upsilon$ en $C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Aplicando (7.17) podemos escribir la diferencia como

$$(7.18)\quad |v_t(x) - v(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} (v(x-y) - v(x))\varphi_t(y)\,dy\right| \leq \sup_{|y|\leq t} |v(x-y) - v(x)| \to 0.$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que φ_t tiene (supp) en $|y| \leq t$ y su integral es 1. Por tanto, $\upsilon_t \to \upsilon$ uniformemente en cualquier conjunto en el que υ sea uniformemente continua, es decir, $\mathbb{R}^n$.

Corolario 7.3. $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* C_0^p *para cualquier* $k \geq p$.

Proposición 7.4. $S(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ *para cualquier* $k \geq p$.

Prueba. Tomemos primero $k = 0$. El sub-espacio $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $C_0^0(\mathbb{R}^n)$, cortando por fuera una bola grande. Si $\upsilon \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte en $\{|x| \leq R\}$, entonces

$$v * \varphi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

tendrá soporte en $\{|x| \leq R + 1\}$. Dado que $\upsilon * \varphi_t \to \upsilon$ el resultado se desprende para $k = 0$.

El mismo argumento sirve para $k > 1$, ya que $D^\alpha(\upsilon * \varphi_t) = (D^\alpha V) * \varphi_t$.

Corolario 7.5. *La relación de las medidas finitas de Radon*

$$(7.19)\qquad M_{fin}(\mathbb{R}^n) \ni \mu \longmapsto u_\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

es inyectiva.

A continuación buscamos el mismo resultado para $L^2(\mathbb{R}^n)$ (y puede que para $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$). Dejo que ustedes resuelvan la parte teórica del argumento relativa a la medida.

Proposición 7.6. *Los elementos de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *son "continuos en la media"; es decir,*

$$(7.20)\qquad \lim_{|t|\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+t) - u(x)|^2\, dx = 0\,.$$

Este es el Problema 71.

Aplicando esta proposición concluimos que

$$(7.21)\qquad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \text{ es denso}$$

al igual que antes. Veamos en primer lugar que el espacio de L^2 funciones de soporte compacto es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ ya que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|\geq R} |u(x)|^2\, dx = 0 \;\forall\; u \in L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

Volvamos a continuación a la discusión de $\upsilon * \varphi$, sustituyendo ahora υ por $u \in L_c^2(\mathbb{R}^n)$. La compactidad del soporte significa que $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, luego en

$$(7.22) \qquad u * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\varphi(y)dy$$

la integral es absolutamente convergente. Además

$$(7.22) \qquad u * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\varphi(y)dy$$

cuando $\{|x| \le R\}$ es lo suficientemente grande. Por consiguiente $u * \varphi$ es continua y el mismo argumento de antes demuestra que

$$u * \varphi_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

A continuación, para ver que $u * \varphi_t \to u$, suponiendo que u tiene (o no) soporte compacto calculamos la integral

$$\begin{aligned}|u * \varphi_t(x) - u(x)| &= \left|\int (u(x-y) - u(x))\varphi_t(y)\,dy\right| \\ &\le \int |u(x-y) - u(x)|\,\varphi_t(y)\,dy\,.\end{aligned}$$

Y, aplicando dos veces el mismo argumento,

$$\begin{aligned}&\int |u * \varphi_t(x) - u(x)|^2\,dx \\ &\le \iiint |u(x-y) - u(x)|\,\varphi_t(y)\,|u(x-y') - u(x)|\,\varphi_t(y')\,dx\,dy\,dy' \\ &\qquad \le \left(\int |u(x-y) - u(x)|^2\,\varphi_t(y)\varphi_t(y')dx\,dy\,dy'\right) \\ &\qquad\qquad \le \sup_{|y|\le t}\int |u(x-y) - u(x)|^2\,dx\,.\end{aligned}$$

Obsérvese que en el segundo paso he utilizado la desigualdad de Schwarz con el integrando escrito como el producto

$$|u(x-y) - u(x)|\,\varphi_t^{1/2}(y)\varphi_t^{1/2}(y') \cdot |u(x-y') - u(x)|\,\varphi_t^{1/2}(y)\varphi_t^{1/2}(y')\,.$$

Por lo que sabemos que

$$L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ es inyectiva.}$$

Lo que significa que todos nuestros espacios habituales de funciones se encuentran dentro de $S'(\mathbb{R}^n)$.

Por último, podemos utilizar la convolución con φ_t para demostrar la existencia de particiones *uniformes* de unidad. Si $K \Subset U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto en un conjunto abierto, entonces quedará demostrada la existencia de $\xi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, con $\xi = 1$ en algún vecindario de K y soporte(ξ) $\Subset U$.

Consideremos ahora $\xi * \varphi_t$ para un valor pequeño t. De hecho,

$$\operatorname{supp}(\xi * \varphi_t) \subset \{p \in \mathbb{R}^n \, ; \, \operatorname{dist}(p, \operatorname{supp} \xi) \leq 2t\}$$

y, de modo similar, $0 \leq \xi * \varphi_t \leq 1$ y

$$\xi * \varphi_t = 1 \text{ en } p \text{ si } \xi = 1 \text{ en } B(p, 2t) .$$

Aplicando lo cual obtenemos:

Proposición 7.7. *Si $U_a \subset \mathbb{R}^n$ son abiertos para $a \in A$ y $K \Subset \bigcup_{a \in A} U_a$ luego existen finitamente muchas $\varphi_i \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, con $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset U_{ai}$ tal que $\sum_i \varphi_i = 1$ en un vecindario de K.*

Prueba. Por la compacticidad de K podemos escoger una subcobertura abierta finita. Aplicando el Lema 1.8 podemos escoger una partición continua, ϕ'_i, de unidad subordinada a esta cobertura. Utilizando el argumento de la convolución visto más arriba podemos sustituir ϕ'_i por $\phi'_i * \varphi_t$ para $t > 0$. Si es lo suficientemente pequeña, tenemos otra vez una partición de unidad subordinada a la cobertura, aunque esta vez será una partición uniforme.

A continuación podemos emplear un sencillo "argumento de corte" para mostrar

Lema 7.8. *El espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de C^∞ funciones de soporte compacto es denso en $S(\mathbb{R}^n)$.*

Prueba. Escogemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(x) = 1$ en $|x| \leq 1$. Entonces, dado $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ tendremos en cuenta la secuencia

$$\psi_n(x) = \varphi(x/n)\psi(x) .$$

Obviamente, $\psi_n = \psi$ en $|x| \leq n$, de modo que si converge en $S(\mathbb{R}^n)$ deberá converger hacia ψ. Suponiendo que $m \geq n$; entonces, por la fórmula de Leibniz[13]

$$D_x^\alpha(\psi_n(x) - \psi_m(x)) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta \left(\varphi(\frac{x}{n}) - \varphi(\frac{x}{m})\right) \cdot D_x^{\alpha-\beta}\psi(x) .$$

Todas las derivadas de $\varphi(x/n)$ son acotadas, independientes de n y $\psi_n = \psi_m$ en $|x| \leq n$ luego para cualquier p

$$|D_x^\alpha(\psi_n(x) - \psi_m(x))| \leq \begin{cases} 0 & |x| \leq n \\ C_{\alpha,p}\langle x\rangle^{-2p} & |x| \geq n \end{cases} .$$

Por consiguiente, ψ_n es Cauchy en $S(\mathbb{R}^n)$.

[13] Problema 25.

De donde se deduce que cada elemento de $S'(\mathbb{R}^n)$ se halla determinado por su restricción a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ya hemos definido más arriba el soporte de una distribución temperada como

$$(7.23)\qquad \operatorname{supp}(u) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \exists\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\ \varphi(x) \neq 0\,,\ \varphi u = 0\}^{\complement}\,.$$

Aplicando el lema anterior y la construcción de particiones uniformes de la unidad obtenemos

Proposición 7.9. *Si* $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ *y* $\operatorname{supp}(u) = \emptyset$; entonces $u = 0$.

Prueba. Partiendo de (7.23), si $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(\psi u) \subset \operatorname{supp}(u)$. Si $x \ni \operatorname{supp}(u)$ entonces, por definición, $\varphi u = 0$ para algún $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(x) \neq 0$. Por lo tanto, $\varphi \neq 0$ en $B(x,\varepsilon)$ para un valor $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. Si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte en $B(x,\varepsilon)$, entonces $\psi u = \hat{\psi}\, \varphi u = 0$, donde $\hat{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \psi/\varphi & \text{en } B(x,\epsilon) \\ 0 & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases}$$

Por tanto, dado $K \Subset \mathbb{R}^n$ podemos obtener $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, con soporte en estas bolas, de modo que $\sum_j \varphi_j \equiv$ en K aunque $\varphi_j u = 0$. Para $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dado, aplicamos lo anterior a $\operatorname{supp}(\mu)$. Por tanto,

$$\mu = \sum_j \varphi_j \mu \Rightarrow u(\mu) = \sum_j (\phi_j u)(\mu) = 0\,.$$

De forma que $u = 0$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, luego $u = 0$.

El espacio lineal de distribuciones de soporte compacto vendrá indicado $C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, lo que a menudo se expresa como $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Veamos ahora una caracterización de la "función delta"

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)\ \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,$$

o al menos el espacio unidimensional de $S'(\mathbb{R}^n)$ que abarca. Nos basamos para ello en la observación de que $(x_j \varphi)(0) = 0$ cuando $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 7.10. *Si* $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ *cumple* $x_j u = 0$, $j = 1,\ldots, n$; *entonces* $u = c\boldsymbol{\delta}$.

Prueba. Se trata sobre todo de caracterizar el espacio nulo de δ como funcional lineal, demostrando que

$$(7.24)\qquad \mathcal{H} = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n);\ \varphi(0) = 0\}$$

puede también expresarse como

$$\mathcal{H} = \left\{ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n);\ \varphi = \sum_{j=1}^{n} x_j \psi_j\ ,\ \varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \right\}\ . \tag{7.25}$$

Es obvio que la parte derecha de (7.25) se halla contenida en la parte izquierda. Para ver la inversa, primero supondremos que

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\ ,\ \varphi = 0 \text{ en} |x| < 1\ . \tag{7.26}$$

Y, a continuación, definiremos

$$\psi = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ \varphi / |x|^2 & |x| \geq 1\ . \end{cases}$$

Todas las derivadas de $1/|x|^2$ son acotadas en $|x| > 1$, por lo que, a partir de la fórmula de Leibniz, se desprende que $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Dado que

$$\varphi = \sum_j x_j (x_j \psi)$$

esto nos demuestra que φ de la forma (7.26) se encuentra en la parte derecha de (7.25). En general, suponemos que $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Luego

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0) &= \int_0^t \frac{d}{dt} \varphi(tx)\, dt \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(tx)\, dt\ . \end{aligned} \tag{7.27}$$

No cabe duda de que estas integrales son C^∞, aunque puede que no decrezcan rápidamente al aproximarse a infinito. Sin embargo, podemos elegir $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\mu = 1$ en $|x| \leq 1$. Entonces (7.27), cuando $\varphi(0) = 0$, se convierte en

$$\begin{aligned} \varphi &= \mu\varphi + (1 - \mu)\varphi \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \psi_j + (1 - \mu)\varphi\ ,\ \psi_j = \mu \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(tx)\, dt \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\ . \end{aligned}$$

Como $(1 - \mu)\ \varphi$ es de la forma (7.26), queda probado (7.25). Hemos supuesto, acerca de u, que $x_j u = 0$, luego

$$u(\varphi) = 0\ \forall\ \varphi \in \mathcal{H}$$

a partir de (7.25). Eligiendo μ al igual que hemos hecho más arriba, podemos expresar, de forma general, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ como

$$\varphi = \varphi(0) \cdot \mu + \varphi'\ ,\ \varphi' \in \mathcal{H}\ .$$

Por consiguiente,

$$u(\varphi) = \varphi(0)u(\mu) \Rightarrow u = c\delta\,,\ c = u(\mu)\,.$$

Se trata de un resultado bastante convincente, como veremos enseguida. La transformada de Fourier de un elemento $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ es[14]

$$(7.28) \qquad \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\,dx\,,\ \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

La integral converge, puesto que $|\varphi| \leq C\,\langle x\rangle^{-n-1}$. En realidad, de esta convergencia se deriva obviamente la continuidad de $\hat{\varphi}$, dado que

$$|\hat{\varphi}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi')| \in \int \left|e^{ix-\xi} - e^{-x\cdot\xi'}\right| |\varphi|\ dx$$
$$\to 0 \text{ a medida que } \xi' \to \xi\,.$$

Proposition 7.11. *La transformación de Fourier*, (7.28), *define una correlación lineal continua*

$$(7.29) \qquad \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\ \mathcal{F}\varphi = \hat{\varphi}\,.$$

Prueba. Diferenciando por el signo de la integral[15] se demuestra que

$$\partial_{\xi_j}\hat{\varphi}(\xi) = -i\int e^{-ix\cdot\xi}x_j\varphi(x)\,dx\,.$$

Dado que la integral del lado derecho es absolutamente convergente, queda probado que (recordemos las *i*s)

$$(7.30) \qquad D_{\xi_j}\hat{\varphi} = -\widehat{x_j\varphi}\,,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Del mismo modo, si multiplicamos por ξ_j y nos tenemos en cuenta que

$$\xi_j e^{-ix\cdot\xi} = i\frac{\partial}{\partial x_j}e^{-ix\cdot\xi}$$

la integración por partes muestra

$$(7.31) \qquad \begin{aligned} \xi_j\hat{\varphi} &= i\int(\frac{\partial}{\partial x_j}e^{-ix\cdot\xi})\varphi(x)\,dx \\ &= -i\int e^{-ix\cdot\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx \\ \widehat{D_j\varphi} &= \xi_j\hat{\varphi}\,,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,. \end{aligned}$$

Como $x_j\varphi$, $D_j\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, estos resultados se pueden iterar, probando que

$$(7.32) \qquad \xi^\alpha D_\xi^\beta\hat{\varphi} = \mathcal{F}\left((-1)^{|\beta|}D^\alpha{}_x x^\beta\varphi\right)\,.$$

[14] Las normalizaciones pueden variar, aunque tal variación no tiene demasiada importancia.
[15] Véase [5]

Por consiguiente,

$$\left|\xi^\alpha D^\beta_\xi \hat{\varphi}\right| \leq C_{\alpha\beta} \sup \left|\langle x\rangle^{+n+1} D^\alpha{}_x x^\beta \varphi\right| \leq C \| \langle x\rangle^{n+1+|\beta|}\varphi\|_{C^{|\alpha|}},$$

lo que a su vez demuestra la continuidad de $\mathcal{F}$ como correlación (7.32).

Supongamos $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Dado que $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$, podremos considerar la distribución $u \in S'(\mathbb{R}^n)$

$$u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi\,. \tag{7.33}$$

La continuidad de u se deriva del hecho de que la integración sea continua y de (7.29). Fijémonos ahora en que

$$\begin{aligned} u(x_j\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{x_j\varphi}(\xi)\, d\xi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} D_{\xi_j}\hat{\varphi}\, d\xi = 0 \end{aligned}$$

donde aplicamos (7.30). Aplicando la Proposition 7.10 concluimos que $u = c\delta$ para alguna constante (universal) c. Esto significa, por definición

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi = c\varphi(0)\,. \tag{7.34}$$

Entonces, ¿cuál es la constante? Para averiguarlo, deberemos recurrir a un ejemplo. El más sencillo es

$$\varphi = \exp(-|x|^2/2)\,.$$

Lema 7.12. *La transformada de Fourier de la gaussiana* $\exp(-|x|^2/2)$ es la gaussiana:

$$(2\pi)^{n/2}\exp(-|\xi|^2/2).$$

Prueba. Existen dos métodos muy claros: uno utiliza el análisis complejo (teorema de Cauchy) y el otro, que es el que seguiremos, parte de la unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Fijémonos, en primer lugar, en que

$$\exp(-|x|^2/2) = \prod_j \exp(-x_j^2/2).$$

Por lo que[16]

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^n \hat{\psi}(\xi_j)\,,\ \psi(x) = e^{-x^2/2}\,,$$

[16] En realidad, mediante el teorema de Fubini, aunque en este caso se pueden utilizar las integrales de Riemann.

que es una función de una variable. Vemos a continuación que ψ satisface la ecuación diferencial

$$(\partial_x + x)\,\psi = 0\,,$$

y que constituye la *única* solución a la misma hasta un múltiplo constante. Por (7.30) y (7.31) su transformada de Fourier cumple

$$\widehat{\partial_x\psi} + \widehat{x\psi} = i\xi\hat{\psi} + i\frac{d}{d\xi}\hat{\varphi} = 0\,.$$

Se trata de la misma ecuación, aunque tomando la variable ξ. Por tanto, $\hat{\psi} = c e^{-|\xi|^2/2}$. Necesitamos de nuevo hallar la constante. Sin embargo,

$$\hat{\psi}(0) = c = \int e^{-x^2/2}\,dx = (2\pi)^{1/2}$$

por el uso estándar de las coordenadas polares:

$$c^2 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r\,dr\,d\theta = 2\pi\,.$$

De esta forma, queda demostrado el lema.

En definitiva, hemos demostrado que para cualquier $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$(7.35) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^n \varphi(0)\,.$$

Ya que esto es cierto para $\varphi = \exp(-|x|^2/2)$. La identidad nos permite *invertir* la transformada de Fourier.

8. INVERSION DE FOURIER

Hemos demostrado más arriba que la transformada de Fourier cumple la identidad

$$(8.1) \qquad \varphi(0) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi \;\forall\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Si $y \in \mathbb{R}^n$ y $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ se define $\psi(x) = \varphi(x + y)$. La invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue demuestra que

$$\hat{\psi}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x+y)\,dx$$
$$= e^{iy\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)\,.$$

Aplicada a ψ la fórmula de la inversión (8.1) pasa a ser

$$(8.2) \qquad \varphi(y) = \psi(0) = (2\pi)^{-n}\int \hat{\psi}(\xi)\,d\xi$$
$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi\,.$$

Teorema 8.1. *La transformada de Fourier* $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ *es un isomorfismo con inverso:*

$$(8.3) \qquad \mathcal{G} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\ \mathcal{G}\psi(y) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi\,.$$

Prueba. La identidad (8.2) muestra que $\mathcal{F}$ es 1 – 1; es decir, inyectiva, puesto que no podemos retirar φ de $\hat{\varphi}$. Además,

$$(8.4) \qquad \mathcal{G}\psi(y) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\psi(-y)$$

Por lo que *Ì* es también una correlación lineal continua, *Ì* : $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$. El argumento anterior demuestra que *Ì*∘$\mathcal{F}$ = *Id* y el mismo argumento demuestra también, con algunos cambios de signo, que $\mathcal{F}$ · *Ì* = *Id.* Luego $\mathcal{F}$ y *Ì* son isomorfismos.

Lema 8.2. *Para todo* $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ *se mantiene la identidad de Paseval:*

$$(8.5) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\psi}\,dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}\,d\xi\,.$$

Prueba. Utilizando la fórmula de inversión en φ,

$$\begin{aligned}\int \varphi\overline{\psi}\,dx &= (2\pi)^{-n} \int \left(e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right)\overline{\psi}(x)\,dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi}(\xi)\overline{\int e^{-ix\cdot\xi}\psi(x)\,dx}\,d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\varphi}}(\xi)\,d\xi\,.\end{aligned}$$

Aquí las integrales son absolutamente convergentes, lo que justifica el cambio de órdenes.

Proposición 8.3. *La transformada de Fourier se extiende a un isomorfismo*

$$(8.6) \qquad \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

Prueba. Al fijar $\varphi = \psi$ en (8.5) se demuestra que

$$(8.7) \qquad ||\mathcal{F}\varphi||_{L^2} = (2\pi)^{n/2}||\varphi||_{L^2}\,.$$

Lo que prueba, concretamente, que dada la densidad conocida de $S(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, que $\mathcal{F}$ es un isomorfismo, con un inverso *Ì*, como en (8.6).

Para cualquier $m \in \mathbb{R}$

$$\langle x\rangle^m L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,;\ \langle x\rangle^{-m}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

es un sub-espacio bien definido. Para $m \geq 0$ definimos los *espacios de Sobolev* en $\mathbb{R}^n$ mediante

$$(8.8) \qquad H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n)\,;\ \hat{u} = \mathcal{F}u \in \langle\xi\rangle^{-m}L^2(\mathbb{R}^n)\right\}\,.$$

Por tanto,

$$H^m(\mathbb{R}^n) \subset H^{m'}(\mathbb{R}^n) \text{ if } m \geq m'\,,\ H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

Lema 8.4. *Si $m \in \mathbb{N}$ es un número entero,*

$$(8.9) \qquad u \in H^m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)\ \forall\ |\alpha| \leq m\,.$$

Prueba. Por definición, $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ implica que $\langle\xi\rangle^{-m}\,\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dado que

$$\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}$$

ello implica que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq m$. A la inversa, si $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$ entonces $\xi^\alpha\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\langle\xi\rangle^m \leq C_m \sum_{|\alpha|\leq m} |\xi^\alpha|\,.$$

lo que a su vez implica que $\xi^m\,\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ahora que hemos visto la transformada de Fourier de las funciones test de Schwartz podemos emplear el método habitual (el de la dualidad) para extenderla a distribuciones temperadas. Si fijamos $\eta = \overline{\hat{\psi}}$, entonces $\hat{\psi} = {}^{-}\eta$ y $\psi = \grave{I}\hat{\psi} = \grave{I}^{-}\eta$, luego

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(x) &= (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\cdot\xi}\overline{\hat{\psi}}(\xi)\,d\xi \\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\cdot\xi}\eta(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n}\hat{\eta}(x).\end{aligned}$$

Sustituyendo en (8.5), obtenemos

$$\int \varphi\hat{\eta}\,dx = \int \hat{\varphi}\eta\,d\xi\,.$$

Definición 8.5. *Cuando $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ definimos su transformada de Fourier mediante*

$$(8.11) \qquad \hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi})\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Como correlación continua $\hat{u} = u \cdot \mathcal{F}$, $\hat{u}$ es continua con cada término continuo; es decir, $\hat{u} \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 8.6. *De la definición* (8.7) *obtenemos un isomorfismo*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,,\ \mathcal{F}u = \hat{u}$$

que satisface las identidades

$$(8.12) \qquad \widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha u\,,\ \widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\hat{u}\,.$$

Prueba. Dado que $\hat{u} = u \circ \mathcal{F}$ y $\grave{I}$ es inversa en ambos lados de $\mathcal{F}$,

$$u = \hat{u} \circ \mathcal{G} \tag{8.13}$$

nos da la inversa a $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$, lo que demuestra que es un isomorfismo. Las identidades (8.12) se derivan de sus contrapartidas en $S(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha u}(\varphi) &= D^\alpha u(\hat{\varphi}) = u((-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\varphi}) \\ &= u(\widehat{\xi^\alpha \varphi}) = \hat{u}(\xi^\alpha \varphi) = \xi^\alpha \hat{u}(\varphi) \; \forall \; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \,.\end{aligned}$$

Asimismo podemos definir los espacios de Sobolev de orden *negativo*:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \,;\, \hat{u} \in \langle \xi \rangle^{-m} L^2(\mathbb{R}^n) \right\} \,. \tag{8.14}$$

Proposición 8.7. *If* $m \leq 0$ *es un número entero, entonces* $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ *si, y solamente si, se puede escribir en la forma*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq -m} D^\alpha v_\alpha \,,\; v_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n) \,. \tag{8.15}$$

Prueba. Si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ es de la forma (8.15), entonces

$$\hat{u} = \sum_{|\alpha| \leq -m} \xi^\alpha \hat{v}_\alpha \text{ con } \hat{v}\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n) \,. \tag{8.16}$$

Por consiguiente,

$$\langle \xi \rangle^m \hat{u} \;=\; \textstyle\sum_{|\alpha| \leq -m} \xi^\alpha \langle \xi \rangle^m \hat{v}_\alpha .$$

Dado que todos los factores $\xi^\alpha \langle \xi \rangle^m$ son acotados, cada término aquí se halla en $L^2(\mathbb{R}^n)$, luego $\langle \xi \rangle^m \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ que es la definición, $u \in \langle \xi \rangle^{-m} L^2(\mathbb{R}^n)$.

A la inversa, supongamos $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\langle \xi \rangle^m \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La función

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq -m} |\xi^\alpha| \right) \cdot \langle \xi \rangle^m \in L^2(\mathbb{R}^n) \;\; (m < 0)$$

es acotada por debajo por una constante positiva. Por consiguiente,

$$v = \left(\sum_{|\alpha| \leq -m} |\xi^\alpha| \right)^{-1} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \,.$$

Cada una de las funciones $\hat{\upsilon}_\alpha = \operatorname{sgn} \xi^\alpha \hat{\upsilon} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ luego la identidad (8.16), y por tanto la (8.15) se desprenden de estos resultados.

Proposición 8.8. *Cada uno de los espacios de Sobolev* $H^m(\mathbb{R}^n)$ *es un espacio de Hilbert con la norma y el producto interior*

$$\text{(8.17)} \qquad \|u\|_{H^m} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2m} \, d\xi \right)^{1/2} ,$$
$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} \langle \xi \rangle^{2m} \, d\xi \, .$$

El espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^n) \to H^m(\mathbb{R}^n)$ *es denso para cada m y el par*

$$\text{(8.18)} \qquad H^m(\mathbb{R}^n) \times H^{-m}(\mathbb{R}^n) \ni (u, u') \longmapsto$$
$$((u, u')) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u'}(\xi) \hat{u'}(\cdot \xi) \, d\xi \in \mathbb{C}$$

da una identificación $H^m(\mathbb{R}^n))' = H^{-m}(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. La propiedad del espacio de Hilbert se desprende directamente esencialmente de la definición (8.14) dado que $\langle \xi \rangle^{-m} L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con la norma (8.17). Del mismo modo se desprende la densidad de S en $H^m(\mathbb{R}^n)$, ya que al ser $S(\mathbb{R}^n)$ denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Problema L11.P3), ello implica que $\langle \xi \rangle^{-m} S(\mathbb{R}^n) = S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\langle \xi \rangle^{-m} L^2(\mathbb{R}^n)$ y por tanto, como $\mathcal{F}$ es un isomorfismo en $S(\mathbb{R}^n)$, $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Observemos, por último, que el par en (8.18) tiene sentido, puesto que $\langle \xi \rangle^{-m} \hat{u}(\xi)$, $\langle \xi \rangle^{m} \hat{u}'(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ implica

$$\hat{u}(\xi)) \hat{u'}(-\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n) \, .$$

Además, por la propia dualidad de $L^2(\mathbb{R}^n)$ cada funcional lineal continuo

$$U : H^m(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \, , \, U(u) \leq C \|u\|_{H^m}$$

únicamente se puede escribir en la forma

$$U(u) = ((u, u')) \text{ para algún } u' \in H^{-m}(\mathbb{R}^n) \, .$$

Observemos que si $u, u' \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$((u, u')) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) u'(x) \, dx \, .$$

Esta es siempre la manera en que "emparejamos" funciones: se trata del par natural en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por consiguiente, lo que hemos demostrado en (8.18) es que este emparejamiento en la función test

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni (u, u') \longmapsto ((u, u')) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) u'(x) \, dx$$

se extiende por *continuidad* a $H^m(\mathbb{R}^n)$ x $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ (para cada valor fijado de m) cuando identifica $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ como el dual de $H^m(\mathbb{R}^n)$. Este era el "cuadro" del que hemos partido.

Para $m > 0$ el espacio $H^m(\mathbb{R}^n)$ representa elementos de $L^2(\mathbb{R}^n)$ que tienen "m" derivadas en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para $m < 0$ los elementos son (??) de derivadas "hasta $-m$" de funciones L^2 . ¿Es esto precisamente para números enteros??

9. INMERSION DE TRAZAS DE SOBOLEV

Más arriba ya hemos tratado brevemente las propiedades de los espacios de Sobolev. Si m es un número entero positivo, entonces $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ "significa" que u tiene hasta m derivadas en $L^2(\mathbb{R}^n)$. La cuestión que se plantea es en qué sentido estas derivadas "débiles" se corresponden con las derivadas "fuertes" tradicionales. Naturalmente, cuando m no es un entero positivo resulta algo más difícil imaginar en qué consisten estas "derivadas fraccionarias". No obstante, el principal resultado es:

Teorema 9.1. (Inmersión de trazas de Sobolev). *Si* $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ *siendo* $m > n/2$ *entonces* $u \in C_0^0\mathbb{R}^n$; *es decir*

$$H^m(\mathbb{R}^n) \subset C_0^0(\mathbb{R}^n)\,,\ m > n/2\,. \tag{9.1}$$

Prueba. Por definición, $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ significa que $v \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $\langle\xi\rangle^m\, \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Supongamos primero que $u \in S(\mathbb{R}^n)$. La fórmula de inversión de Fourier demuestra que

$$\begin{aligned}(2\pi)^n\,|u(x)| &= \left|\int e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi\right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{2m}\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{-2m}\,d\xi\right)^{1/2}\,.\end{aligned}$$

Si $m > n/2$, la segunda integral será finita. Como la primera integral es la norma en $H^m(\mathbb{R}^n)$, tenemos

$$\sup_{\mathbb{R}^n}|u(x)| = \|u\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n}\|u\|_{H^m}\,,\ m > n/2\,. \tag{9.2}$$

Esto es todo por lo que respecta a $u \in S(\mathbb{R}^n)$, pero $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^m(\mathbb{R}^n)$ es denso. (9.2) muestra que si $u_j \to u$ en $H^m(\mathbb{R}^n)$, con $u_j \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces $u_j \to u'$ en $C_0^0\mathbb{R}^n$. En realidad, $u' = u$ en $S'(\mathbb{R}^n)$, ya que $u_j \to u$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $u_j \to u'$ en $C_0^0\mathbb{R}^n$ ambos implican que $\int u_j\varphi$ converge, luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_j\varphi \to \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} u'\varphi \ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Aquí observamos el significado exacto de $u = u'$, $u \in H^m(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, $u' \in C_0^0\mathbb{R}^n$. Al identificar $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con la distribución temperada correspondiente, los valores de cualquier conjunto de medida cero "se pierden". De ahí que las "funciones" en (9.1) signifiquen que cada $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ tiene un $u' \in C_0^0\mathbb{R}^n$ representativo.

Podemos extender esto a derivadas de orden superior mediante la

Proposición 9.2. *Si $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$, entonces $D^\alpha u \in H^{m-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ y*

$$D^\alpha : H^m(\mathbb{R}^n) \to H^{m-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \tag{9.3}$$

es continua.

Prueba. Basta con demostrar que D_j define una correlación lineal continua

$$D_j : H^m(\mathbb{R}^n) \to H^{m-1}(\mathbb{R}^n)\ \forall\ j \tag{9.4}$$

desde donde (9.3) se obtiene por composición.

Si $m \in \mathbb{R}$, entonces $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ significa que $\hat{u} \in \langle\xi\rangle^{-m}L^2(\mathbb{R}^n)$. Dado $\widehat{D_j u} =$ que

$\xi_j\,\hat{u}$, y

$$|\xi_j|\,\langle\xi\rangle^{-m} \le C_m\langle\xi\rangle^{-m+1}\ \forall\ m$$

concluimos que $D_ju \in H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|D_j u\|_{H^{m-1}} \le C_m\|u\|_{H^m}\ .$$

Aplicando este resultado tenemos

Corolario 9.3. *Si $k \in \mathbb{N}_0$ y $m > \frac{n}{2} + k$, entonces*

$$H^m(\mathbb{R}^n) \subset C_0^k(\mathbb{R}^n)\ . \tag{9.5}$$

Prueba. Si $|\alpha| \le k$, *luego*

$$D^\alpha u \in H^{m-k}(\mathbb{R}^n) \subset C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

De donde resulta que las "derivadas débiles" $D^\alpha u$ son continuas. Nos falta por comprobar que lo anterior significa que u es en sí continuamente diferenciable k veces. Lo que de hecho resulta otra vez de la densidad de $S(\mathbb{R}^n)$ en $H^m(\mathbb{R}^n)$. La continuidad en (9.3) implica que si $u_j \to u$ en $H^m(\mathbb{R}^n)$, $m > \frac{n}{2} + k$, luego $u_j \to u'$ en $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ (utilizando su completitud). Sin embargo, al igual que antes, $u = u'$, luego $u \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$.

En particular, observamos que

$$H^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_m H^m(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)\ . \tag{9.6}$$

Estas funciones no son en general funciones test de Schwartz.

Proposición 9.4. *El espacio de Schwartz se puede expresar en términos de espacios de Sobolev con pesos*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_k \langle x\rangle^{-k} H^k(\mathbb{R}^n)\ . \tag{9.7}$$

Prueba. Esta expresión se deriva directamente de (9.5) ya que la parte izquierda de la misma se halla contenida en

$$\bigcap_k \langle x\rangle^{-k} \mathcal{C}_0^{k-n}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 9.5. (Representación de Schwartz). *Toda distribución temperada puede expresarse en forma de una suma finita.*

$$(9.8) \qquad u = \sum_{\substack{|\alpha|\le m \\ |\beta|\le m}} x^\alpha D_x^\beta u_{\alpha\beta}\ ,\ u_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n).$$

o en *la forma*

$$(9.9) \qquad u = \sum_{\substack{|\alpha|\le m \\ |\beta|\le m}} D_x^\beta (x^\alpha v_{\alpha\beta}),\ \ v_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n).$$

Por tanto, toda distribución temperada es una suma finita de derivadas de funciones continuas de crecimiento polinomial.

Prueba. Esencialmente por definición, cualquier $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ es continua con respecto a *una* de las normas $\| \langle x\rangle^k \varphi \|_{C^k}$. Del teorema de la inmersión de trazas de Sobolev deducimos que, con $m > k + n/2$,

$$|u(\varphi)| \le C\|\langle x\rangle^k \varphi\|_{H^m}\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Que es lo mismo que

$$\left|\langle x\rangle^{-k} u(\varphi)\right| \le C\|\varphi\|_{H^m}\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

lo que demuestra que $\langle x\rangle^{k-1} u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$; es decir, que a partir de la Proposición 8.8,

$$\langle x\rangle^{-k} u = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha u_\alpha\ ,\ \ u_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)\ .$$

De hecho, escogemos $j > n/2$ y consideramos $\upsilon_a \in H^j(\mathbb{R}^n)$ definido por $\hat{\upsilon}_a = \langle\xi\rangle^{-j}\, \hat{u}_a$. Al igual que en la prueba de la Proposición 8.14 llegamos a la conclusión de que:

$$u_\alpha = \sum_{|\beta|\le j} D^\beta u'_{\alpha,\beta}\ ,\ u'_{\alpha,\beta} \in H^j(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ .$$

Por consiguiente[17],

$$(9.10) \qquad u = \langle x\rangle^k \sum_{|\gamma|\le M} D_\alpha^\gamma v_\gamma\ ,\ \ v_\gamma \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)\ .$$

Para obtener (9.9) "conmutamos" el factor $\langle x\rangle^k$ al interior; no he preparado del todo este argumento hasta ahora, por lo que permítanme que lo presente como un lema.

Lema 9.6. *Para cualquier* $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ *existen polinomios* $p_{\alpha\gamma}(x)$ *de grados* $|\gamma - \alpha|$ *como máximo tales que*

[17] Esta es posiblemente la forma más útil del teorema de representación.

$$\langle x\rangle^k D^\gamma v = \sum_{\alpha\leq\gamma} D^{\gamma-\alpha}\left(p_{\alpha,\gamma}\langle x\rangle^{k-2|\gamma-\alpha|}v\right) .$$

Prueba. Conviene probar un resultado más general. Supongamos que p es un polinomio de grado máximo j; existirán entonces polinomios de grados máximos $j + |\gamma - \alpha|$ tales que

$$p\langle x\rangle^k D^\gamma v = \sum_{\alpha\leq\gamma} D^{\gamma-\alpha}(p_{\alpha,\gamma}\langle x\rangle^{k-2|\gamma-\alpha|}v) . \tag{9.11}$$

De aquí derivamos el lema tomando como valor $p = 1$.

Por otra parte, la identidad (9.11) resulta trivial cuando $\gamma = 0$, y procediendo por inducción podemos suponer que es conocido siempre que $|\gamma| \leq L$. Tomando $|\gamma| = L + 1$,

$$D^\gamma = D_j D^{\gamma'} \quad |\gamma'| = L.$$

Escribiendo la identidad para γ' como

$$p\langle x\rangle^k D^{\gamma'} = \sum_{\alpha'\leq\gamma'} D^{\gamma'-\alpha'}(p_{\alpha',\gamma'}\langle x\rangle^{k-2|\gamma'-\alpha'|}v)$$

podemos diferenciar con respecto a x_j, obteniendo

$$p\langle x\rangle^k D^\gamma = -D_j(p\langle x\rangle^k)\cdot D^{\gamma'}v$$
$$+\sum_{|\alpha'|\leq\gamma} D^{\gamma-\alpha'}(p'_{\alpha',\gamma'}\langle x\rangle^{k-2|\gamma-\alpha|+2}v) .$$

El primer término de la derecha se expande a

$$(-(D_j p)\cdot\langle x\rangle^k D^{\gamma'}v - \frac{1}{i}kpx_j\langle x\rangle^{k-2}D^{\gamma'}v) .$$

Podemos aplicar la hipótesis inductiva a cada uno de estos términos y rescribir el resultado en la forma (9.11); sólo es necesario comprobara el orden de los polinomios y no olvidar que $\langle x\rangle^2$ es un polinomio de grado 2.

Aplicando el Lema 9.6 a (9.10) obtenemos (9.9), una vez absorbidas en las funciones continuas las potencias negativas de $\langle x\rangle$. Y a continuación, obtenemos (9.8) a partir de (9.9) y la fórmula de Leibniz.

10. OPERADORES DIFERENCIALES.

En este último tercio del curso aplicaremos lo aprendido hasta ahora sobre distribuciones, así como algunas otras nociones necesarias para comprender las propiedades de los operadores diferenciales con coeficientes constantes. Antes de pasar a explicar estas cuestiones, me gustaría probar otro resultado de densidad.

Hasta el momento *no* hemos definido una topología en $S'(\mathbb{R}^n)$, algo que dejaremos como ejercicio opcional[18]. Sí que veremos, en cambio, una noción de convergencia. Supongamos que $u_j \in < S'(\mathbb{R}^n)$ es una secuencia de S' ($\mathbb{R}^n$). Se dice que *converge débilmente* hacia $u \in < S'(\mathbb{R}^n)$ cuando

$$(10.1) \qquad u_j(\varphi) \to u(\varphi)\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

En este caso no se presume "uniformidad", sino que más bien se trata de convergencia puntual (salvo que la linealidad de las funciones la hace parecer más fuerte).

Proposición 10.1. *El subespacio $S(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ es débilmente denso; es decir, cada $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ es el límite débil de un subespacio $u_j \in S(\mathbb{R}^n)$.*

Prueba. Podemos utilizar el teorema de la representación de Schwartz para escribir, para una m dependiente de u,

$$u = \langle x\rangle^m \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha u_\alpha\,,\ u_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

Sabemos que $S(\mathbb{R}^n)$ es densa en $L^2(\mathbb{R}^n)$ en el sentido de espacios métricos, luego podemos hallar $u_{\alpha,j} \in S(\mathbb{R}^n)$, $u_{\alpha,j} \to u_\alpha$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. El resultado de densidad provendrá entonces de las propiedades básicas de la convergencia débil.

Proposición 10.2. *Si $u_j \to u$ y $u'_j \to u'$ débilmente en $S'(\mathbb{R}^n)$ entonces $cu_j, \to cu$, $u_j + u'_j \to u + u'$, $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ y $\langle x\rangle^m u_j \to \langle x\rangle^m u$ débilmente en $S'(\mathbb{R}^n)$.*

Prueba. Lo anterior se desprende de escribir todo en términos de pares; por ejemplo, si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$D^\alpha u_j(\varphi) = u_j((-1)^{(\alpha)} D^\alpha\varphi) \to u((-1)^{(\alpha)} D^\alpha\varphi) = D^\alpha u(\varphi)\,.$$

Esta densidad débil prueba que nuestras definiciones de D_j, y x_j x deben ser únicas si necesitamos que la Proposición 10.2 se mantenga.

Ya hemos visto el concepto de la diferenciación entendida como un operador (que consiste simplemente en una correlación lineal entre espacios de objetos tipo función).

$$D_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

Cualquier función polinómica en $\mathbb{R}^n$

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} p_\alpha \xi^\alpha\,,\ p_\alpha \in \mathbb{C}$$

[18] Problema 34.

define un operador diferencial[19]

$$p(D)u = \sum_{|\alpha|\leq m} p_\alpha D^\alpha u\,. \tag{10.2}$$

Antes de pasar a tratar teoremas generales, veamos algunos ejemplos

(10.3) en $\mathbb{R}^2$, $\overline{\partial} = \partial x + i\partial y$ "operador d-bar"

(10.4) en $\mathbb{R}^n$, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} D_j^2$ "laplaciano"

(10.5) en $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, $D_n^2 - \Delta$ "operador de ondas"

(10.6) en $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, $\partial_t + \Delta$ "operador de calor"

(10.7) en $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, $D_t + \Delta$ "operador de Schrödinger"

Se dice que las funciones, o distribuciones, que satisfagan $\partial_u = 0$ son *holomórficas*; mientras que las que satisfacen $\Delta_u = 0$ son *armónicas.*

Definición 10.3. *Se dice que un elemento $E \in S'(\mathbb{R}^n)$ que satisface*

$$P(D)E = \delta \tag{10.8}$$

es una solución fundamental (temperada) de of $P(D)$.

Teorema 10.4 (sin prueba). *Existe una solución fundamental temperada para todo operador diferencial de coeficiente constante distinto de cero.*

Este teorema es bastante difícil de probar y no tan interesante como pudiera parecer. En cualquier caso, daremos unos cuantos ejemplos, comenzando por ∂ Consideremos la función

$$E(x,y) = \frac{1}{2\pi}(x+iy)^{-1}\,,\ \ (x,y)\neq 0\,. \tag{10.9}$$

Lema 10.5. *$E(x, y)$ es integrable localmente y por lo tanto define $E \in S'(\mathbb{R}^2)$ mediante*

$$E(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(x+iy)^{-1}\varphi(x,y)\,dx\,dy\,, \tag{10.10}$$

siendo E así definida una solución fundamental temperada de $\overline{\partial}$.

Prueba. Dado que $(x+iy)^{-1}$ es uniforme y acotada lejos del origen, la integrabilidad local se desprende del cálculo, utilizando coordenadas polares.

$$\int_{|(x,y)|\leq 1}\frac{dx\,dy}{|x+iy|} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,dr\,d\theta}{r} = 2\pi\,. \tag{10.11}$$

[19] Sería más correcto decir un operador diferencial parcial con coeficientes constantes.

Diferenciando directamente en la región en la que es uniforme,

$$\partial_x(x+iy)^{-1} = -(x+iy)^{-2}\,,\ \partial_y(x+iy)^{-1} = -i(x \in iy)^{-2}$$

por lo tanto,

$\overline{\partial}E = 0 \text{ in } (x,y) \neq 0.$[20]

La derivada viene *en realidad* definida por

Aquí he cortado de la integral el espacio $\{|x| \leq \varepsilon\,, |y| < \varepsilon\}$ y he utilizado la integrabilidad local para tomar el límite como $\varepsilon \downarrow 0$. Integrando por partes en x hallamos

$$-\int_{\substack{|x|\geq\epsilon\\|y|\geq\epsilon}}(x+iy)^{-1}\partial_x\varphi\,dx\,dy = \int_{\substack{|x|\geq\epsilon\\|y|\geq\epsilon}}(\partial_x(x+iy)^{-1})\varphi\,dx\,dy$$
$$+\int_{\substack{|y|\leq\epsilon\\x=\epsilon}}(x+iy)^{-1}\varphi(x,y)\,dy - \int_{\substack{|y|\leq\epsilon\\x=-\epsilon}}(x+iy)^{-1}\varphi(x,y)\,dy\,.$$

Existe una formula correspondiente para la integración por partes en y luego, recordando que $\overline{\partial}E= 0$ desde $(0, 0)$,

$$(10.13)\quad 2\pi\overline{\partial}E(\varphi) =$$
$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{|y|\leq\epsilon}[(\epsilon+iy)^{-1}\varphi(\epsilon,y)-(-\epsilon+iy)^{-1}\varphi(-\epsilon,y)]\,dy$$
$$+\,i\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{|x|\leq\epsilon}[(x+i\epsilon)^{-1}\varphi(x,\epsilon)-(x-i\epsilon)^{-1}\varphi(x,\epsilon)]\,dx\,,$$

suponiendo que ambos límites existen. Podemos escribir

$$\varphi(x,y) = \varphi(0,0) + x\psi_1(x_1 y) + y\psi_2(x,y)\,.$$

Sustituyendo φ bien por $x\psi_1$ o bien por $y\psi_1$ en (10.13) ambos límites son cero. Por ejemplo

$$\left|\int_{|y|\leq\epsilon}(\epsilon+iy)^{-1}\epsilon\psi_1(\epsilon,y)\,dy\right| \leq \int_{|y|\leq\epsilon}|\psi_1| \to 0\,.$$

Consiguientemente, obtendremos el mismo resultado en (10.13) sustituyendo $\varphi(x, y)$ por $\varphi(0, 0)$. Luego $2\pi\,\overline{\partial}E(\varphi) = c\,\varphi(0)$,

$$c = \lim_{\epsilon\downarrow 0} 2\epsilon\int_{|y|\leq\epsilon}\frac{dy}{\epsilon^2+y^2} = \lim_{\epsilon\downarrow 0} < \int_{|y|\leq 1}\frac{dy}{1+y^2} = 2\pi\,.$$

[20] En esta fase, por lo tanto, sabemos que $\overline{\partial}E$ debe ser una suma de derivadas de $\boldsymbol{\delta}$.

Recordemos que ya hemos visto la convolución de las funciones

$$u * v(x) = \int u(x-y)v(y)\,dy = v * u(x)\,.$$

Lo cual es factible, dado que *u* es de crecimiento lento y $s \in S(\mathbb{R}^n)$. De hecho, podemos rescribir la definición en términos de pares

$$(u * \varphi)(x) = \langle u, \varphi(x - \cdot)\rangle \tag{10.14}$$

donde el · indica la variable del par.

Teorema 10.6. (Hörmander, Teorema 4.1.1). *Si* $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ *y* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, *entonces* $u * \varphi \in S'(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y si* $\operatorname{supp}(\varphi) \Subset \mathbb{R}^n$.

$$\operatorname{supp}(u * \varphi) \subset \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\varphi)\,.$$

Para cualquier multi-índice α

$$D^\alpha(u * \varphi) = D^\alpha u * \varphi = u * D^\alpha \varphi\,.$$

Prueba. Si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, *entonces para cualquier* $x \in \mathbb{R}^n$ *fijado*,

$$\varphi(x - \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Los cálculos exigidos por la seminorma son

$$\sup_y (1 + |y|^2)^{k/2}\, |D^\alpha{}_y \varphi(x-y)| < \infty\ \forall\ \alpha, k > 0\,.$$

Dado que

$$D^\alpha{}_y \varphi(x-y) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha \varphi)(x-y)$$

y

$$(1 + |y|^2) \leq (1 + |x-y|^2)(1 + |x|^2)$$

concluimos que

$$\|(1 + |y|^2)^{k/2} D^\alpha{}_y(x-y)\|_{L^\infty} \leq (1 + |x|^2)^{k/2} \|\langle y\rangle^k D^\alpha{}_y \varphi(y)\|_{L^\infty}\,.$$

La continuidad de $u \in S(\mathbb{R}^n)$ significa que para algunos valores de *k*

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \|(y)^k D^\alpha \varphi\|_{L^\infty}$$

de donde se sigue que

$$|u * \varphi(x)| = |\langle u, \varphi(x - \cdot)\rangle| \leq C(1 + |x|^2)^{k/2}\,. \tag{10.15}$$

El argumento anterior muestra que $x \mapsto \varphi(x - \cdot)$ es una función continua de $x \in \mathbb{R}^n$ con valores en $S(\mathbb{R}^n)$, luego $u * \varphi$ es continua y satisface (10.15), por lo que es un elemento de $S'(\mathbb{R}^n)$.

De la misma manera se obtiene la diferenciabilidad ya que para cada j con e_j el vector unitario j-ésimo

$$\frac{\varphi(x + se_j - y) - \varphi(x - y)}{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

es continuo en $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, $u * \varphi$ tiene derivadas parciales continuas y

$$D_j u * \varphi = u * D_j \varphi\,.$$

El mismo argumento demuestra entonces que $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Que $D_j(u * \varphi) = D_j(u * \varphi)$ se deriva de la definición de la derivación de las distribuciones

$$\begin{aligned} D_j(u * \varphi(x)) &= (u * D_j\varphi)(x) \\ &= \langle u, D_{x_j}\varphi(x - y)\rangle = -\langle u(y), D_{y_j}\varphi(x - y)\rangle_y \\ &= (D_j u) * \varphi\,. \end{aligned}$$

Por último, veamos la propiedad de soporte. Aquí suponemos que el soporte φ (supp(φ)) es compacto, y sabemos también que el soporte u (supp(u)) es un conjunto cerrado. Tenemos que demostrar que

$$\overline{x} \notin \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\varphi) \tag{10.16}$$

implica $u * \varphi\,(x') = 0$ para x' próxima a $\overline{x}$. Ahora (10.16) significa que

$$\operatorname{supp}\varphi(\overline{x} - \cdot) \cap \operatorname{supp}(u) = \phi\,, \tag{10.17}$$

Dado que

$$\operatorname{supp}\varphi(x - \cdot) = \{y \in \mathbb{R}^n; x - y \in \operatorname{supp}(\varphi)\},$$

ambas expresiones significan que *no* existe $y \in$ supp(φ) con $\overline{x} - y \in$ supp(u). Lo que puede también escribirse:

$$\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp} u(x - \cdot) = \phi$$

y que, como hemos demostrado al ver los soportes, implica

$$u * \varphi(x') = \langle u(x' - \cdot), \varphi\rangle = 0\,.$$

Por (10.17) esta es una condición *abierta* en x', de donde se desprende la propiedad de soporte.

Supongamos ahora que φ, $\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Luego

$$(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)\,. \tag{10.18}$$

Tenemos aquí el Lema de Hörmander 4.1.3 y el teorema de Hörmander 4.1.2; me interesa que lo prueben del modo del Problema 35.
Hemos demostrado que $u * \varphi$ es C^∞ cuando $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$; es decir, la regularidad de $u * \varphi$ se desprende de la regularidad de *uno* de los factores. Es razonable suponer, por lo tanto, que $u * \upsilon$ se puede definir cuando $u \in S(\mathbb{R}^n)$, $\upsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$ y una de ellas tiene soporte compacto.

Si $\upsilon \in C_c^\infty$ y $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$u * v(\varphi) = \int \langle u(\cdot), v(x - \cdot)\rangle \varphi(x)\, dx = \int \langle u(\cdot), v(x - \cdot)\rangle \check{v}\varphi(-x)\, dx$$

donde

$$\check{\varphi}(z) = \varphi(-z).$$

De hecho, aplicando el Problema 35,

$$u * v(\varphi) = ((u * v) * \check{\varphi})(0) = (u * (v * \check{\varphi}))(0)\,. \tag{10.19}$$

Aquí υ, φ son uniformes, pero atención:

Lema 10.7. Si $\upsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$ *tiene soporte compacto* y $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces $\upsilon * \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Dado que $\upsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$, tiene soporte compacto existirá $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi\upsilon = \upsilon$. Luego

$$\begin{aligned} v * \varphi(x) &= (\chi v) * \varphi(x) = \langle \chi v(y), \varphi(x-y)\rangle_y \\ &= \langle u(y), \chi(y)\varphi(x-y)\rangle_y\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, para algunos valores de k,

$$|v * \varphi(x)| \leq C\|\chi(y)\varphi(x-y)\|_{(k)}$$

donde $\| \ \|_{(k)}$ es una de nuestras normas en $S'(\mathbb{R}^n)$. Como χ tiene soporte en una bola de gran tamaño,

$$\begin{aligned} \|\chi(y)\varphi(x-y)\|_{(k)} & \\ &\leq \sup_{|\alpha|\leq k} \left|\langle y\rangle^k D^\alpha{}_y(\chi(y)\varphi(x-y))\right| \\ &\leq C \sup_{|y|\leq R}\ \sup_{|\alpha|\leq k} |(D^\alpha\varphi)(x-y)| \\ &\leq C_N \sup_{|y|\leq R} (1+|x-y|^2)^{-N/2} \\ &\leq C_N(1+|x|^2)^{-N/2}\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$(1+|x|^2)^{N/2}\,|v*\varphi|$$

es acotada para cada *N*. El mismo argumento sirve para la derivada empleando el Teorema 10.6, por lo que

$$v*\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

De hecho, obtenemos algo más, puesto que podemos ver que para cada *k* existe *k'* y *C* (que dependen de *k* y *v)* tal que

$$\|v*\varphi\|_{(k)}\leq C\|\varphi\|_{(k')}\,.$$

Lo que quiere decir que

$$v*:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

es una correlación lineal continua.

(10.19) nos permite definir $u * v$ cuando $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto por

$$u*v(\varphi)=u*(v*\check{\varphi})(0)\,.$$

Empleando la continuidad a la que se hace referencia más arriba, se pide verificar que $u * v \in S'(\mathbb{R}^n)$ en el Problema 36. Por el momento, supondremos que esta convolución tiene las mismas propiedades que antes hemos visto; en el Problema 37 se pide verificar sus partes principales.

Recordemos que $E \in S'(\mathbb{R}^n)$ es una situación fundamental para $P(D)$, un operador diferencial de coeficiente constante, cuando $P(D)E = \delta$. También utilizamos una noción más débil.

Definición 10.8. *Una* paramétrica *para un operador diferencial de coeficiente constante* $P(D)$ *es una distribución* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$P(D)F=\delta+\psi\,,\ \ \psi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,. \tag{10.20}$$

Se dice que un operador $P(D)$ *es* hipoelíptico *cuando tiene una paramétrica que satisface*

$$\operatorname{sing\,supp}(F)\subset\{0\}\ , \tag{10.21}$$

donde, para cualquier $u \in S'(\mathbb{R}^n)$

$$(\operatorname{sing\,supp}(u))^{\complement}=\{\overline{x}\in\mathbb{R}^n;\ \exists\varphi\in\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)\,,\ \varphi(\overline{x})\neq0,\varphi u\in\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)\}\ . \tag{10.22}$$

Dado que la misma φ debe funcionar para puntos próximos en (10.22), el soporte singular (*sing supp*) del conjunto será cerrado. Asimismo,

$$\text{sing supp}(u) \subset \text{supp}(u)\,. \tag{10.23}$$

En el Problema 37 se pide demostrar que si $K \Subset \mathbb{R}^n$ y $K \cap \text{sing supp}(u) = \varnothing$; $\exists\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(x) = 1$ en un vecindario de K tal que

$$\varphi u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

En particular,

$$\text{sing supp}(u) = \phi \Rightarrow u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,. \tag{10.24}$$

Teorema 10.9. Si $P(D)$ es hipoelíptico, entonces

$$\text{sing supp}(u) = \text{sing supp}(P(D)u)\ \forall\ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,. \tag{10.25}$$

Prueba. La mitad de esta expresión es válida para *cualquier* operador diferencial:

Lema 10.10. *Si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ entonces, para cualquier polinomio*

$$\text{sing supp}(P(D)u) \subset \text{sing supp}(u)\ \forall\ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,. \tag{10.26}$$

Prueba. Se trata de demostrar que

$$\overline{x} \notin \text{sing supp}(u) \Rightarrow \overline{x} \notin \text{sing supp}(P(D)u).$$

A continuación, si $\overline{x} \notin$ sing supp(u) podemos hallar $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \equiv 1$ próximo a $\overline{x}$, tal que $\varphi\ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego

$$\begin{aligned} P(D)u &= P(D)(\varphi u + (1-\varphi)u) \\ &= P(D)(\varphi u) + P(D)((1-\varphi)u)\,. \end{aligned}$$

El primer término es C^∞ y $\overline{x} \notin$ supp($P(D)$ $((1-\varphi)u)$), luego $\overline{x} \notin$ sing supp($P(D)u$).

Queda por demostrar el inverso de (10.26), suponiendo que $P(D)$ sea hipoelíptico. Tomamos F, una paramétrica de $P(D)$ con sing supp $u \subset \{0\}$ y suponemos, o mejor fijamos, que F tiene soporte compacto. De hecho, si $\overline{x} \notin$ sing supp($P(D)u$), podemos fijar que

$$(\text{supp}(F) + \overline{x}) \cap \text{sing supp}(P(D)u) = \phi\,.$$

A continuación, $P(D)F = \delta\ \psi$ con $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, luego

$$u = \delta * u = (P(D)F) * u - \psi * u.$$

Dado que $\psi * u \in C^{\infty}$; basta para probar que $\overline{x} \notin \text{supp}((P(D)u) * f)$.
Tomamos $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi f \in C^{\infty}$, $f = P(D)u$, aunque

$$(\operatorname{supp} F + \overline{x}) \cap \operatorname{supp}(\varphi) = 0 .$$

Entonces,

$$f = f_1 + f_2, \; f_1 = \varphi f \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

luego

$$f * F = f_1 * F + f_2 * F$$

donde $f_1 * F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $\overline{x} \notin \text{supp}(f_2 * F)$. De lo que resulta que $\overline{x} \notin \text{singsupp}(u)$.
Ejemplo 10.1. Si u es holomórfica en $\mathbb{R}^n$, $\overline{\partial} u = 0$, luego $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.
Recordemos que se dice que un operador diferencial $P(D)$ es hipoelíptico cuando existe $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ con

(10.27) $\qquad P(D)F - \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y sing supp$(F) \subset \{0\}$.

En este caso, la segunda condición indica que si $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi(x) = 1$ en $|x| < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$; entonces $(1 - \varphi)F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dado que $P(D)((1 - \varphi)F) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ podemos concluir que

$$P(D)(\varphi F) - \delta \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y también podemos suponer que F, sustituido ahora por φF, tiene soporte compacto.
Ya demostramos en el caso anterior que

> Si $P(D)$ es hipoelíptica y $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, entonces
> sing supp(u) = sing supp$(P(D)u)$.

Más adelante recordaremos la prueba.

En primer lugar, no obstante, quisiera comentar un concepto importante: el de *elipticidad.* Recordemos que $P(D)$ "no es más que" un polinomio, conocido como el *polinomio característico*

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} \xi^{\alpha} .$$

Que tiene la propiedad

$$\widehat{P(D)u}(\xi) = P(\xi)\hat{u}(\xi) \;\forall\; u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) .$$

Esto demuestra (por si estuviera suficientemente claro) que podemos separar $P(\xi)$ de $P(D)$ concebido como un operador en $S'(\mathbb{R}^n)$.

Podemos considerar la posibilidad de *invertir* $P(D)$ dividiéndolo por $P(\xi)$, lo que funciona siempre que $P(\xi) \neq 0$. Un ejemplo de ello es

$$P(\xi) = |\xi|^2 + 1 = \sum_{j=1}^{n} +1 \,.$$

Sin embargo, ni siquiera el operador laplaciano,

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} D_j^2,$$

satisface una condición tan estricta como esta.

Es razonable suponer que las derivadas de orden superior sean las de mayor importancia. Consideremos, por lo tanto,

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha \xi^\alpha$$

como la parte principal, o *símbolo principal*, de $P(D)$.

Definición 10.11. *Se dice que un polinomio* $P(\xi)$*, o* $P(D)$*, es elíptico de orden m siempre que* $P_m(\xi) \neq 0$ *para todo* $0 \neq \in \mathbb{R}^n$.

Lo que me gustaría demostrar hoy es

Teorema 10.12. *Todo operador diferencial elíptico* $P(D)$ *es hipoelíptico.*

Deseamos hallar una *paramétrica* para $P(D)$; ya sabemos que podríamos también suponer que F tiene soporte compacto. Tomando la transformada de Fourier vista en (10.27) observamos que $\hat{F}$ debería satisfacer

$$P(\xi)\widehat{F}(\xi) = 1 + \widehat{\psi}, \ \widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \,. \tag{10.28}$$

Aquí aplicamos

$$\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

por lo que también $\hat{\psi} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Supongamos, en primer lugar, que $P(\xi) = P_m(\xi)$ es en realidad un operador homogéneo de grado m. Por tanto

$$P_m(\xi) = |\xi|^m P_m(\widehat{\xi}), \ \widehat{\xi} = \xi / |\xi| \ , \xi \neq 0 \,.$$

La presunción de elipticidad implica que

$$P_m(\widehat{\xi}) \neq 0 \ \forall \ \widehat{\xi} \in \mathcal{S}^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| = 1\} \ . \tag{10.29}$$

Teniendo en cuenta que S^{n-1} *is compacto* y P_m es continuo

$$\left| P_m(\widehat{\xi}) \right| \geq C > 0 \ \forall \ \widehat{\xi} \in \mathcal{S}^{n-1} \,, \tag{10.30}$$

para una constante C. Aplicando la homogeneidad,

$$(10.31) \qquad \left|P_m(\widehat{\xi})\right| \geq C\,|\xi|^m \ , \ C > 0 \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}^n \ .$$

A continuación, para obtener $\hat{F}$ a partir de (10.28) deberemos dividir por $P_m(\xi)$ o multiplicar por $1/P_m(\xi)$. El único problema a la hora de definir $1/P_m(\xi)$ se encuentra en $\xi = 0$. La manera de evitar este punto es seleccionar $P \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ al igual que antes, con $\varphi(\xi) = 1$ en $|\xi| \leq 1$.

Lema 10.13. *Si $P_m(\xi)$ es homogéneo de grado m y elíptico, entonces*

$$(10.32) \qquad Q(\xi) = \frac{(1-\varphi(\xi))}{P_m(\xi)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

es la transformada de Fourier de una paramétrica para $P_m(D)$, que satisfaga (10.27).

Prueba. Está claro que $Q(\xi)$ es una función continua y $|Q(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-m}$ $\forall$ $\xi \in \mathbb{R}^n$, luego $Q \in S'(\mathbb{R}^n)$. Consecuentemente, es la transformada de Fourier de un $F \in S'(\mathbb{R}^n)$. Asimismo,

$$\begin{aligned} \widehat{P_m(D)}F(\xi) &= P_m(\xi)\widehat{F} = P_m(\xi)Q(\xi) \\ &= 1-\varphi(\xi)\,, \\ \Rightarrow P_m(D)F &= \delta + \psi\,,\ \widehat{\psi}(\xi) = -\varphi(\xi)\,. \end{aligned}$$

Dado que

$$\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

F es una paramétrica para $P_m(D)$. Pero aún nos queda por probar la "parte dura"; es decir, que

$$(10.33) \qquad \operatorname{sing\,supp}(F) \subset \{0\} \ .$$

Podemos demostrar (10.33) fijándonos en las distribuciones $x^{\alpha}F$. La idea es que para un valor alto de $|\alpha|$, x^{α} disminuye de un modo bastante rápido en el origen, lo que debería "debilitar" la singularidad de F en ese punto. En realidad, deberíamos demostrar que

$$(10.34) \qquad x^{\alpha}F \in H^{|\alpha|+m-n-1}(\mathbb{R}^n)\,,\ |\alpha| > n+1-m\,.$$

Recordemos que estos espacios de Sobolev se hallan definidos en términos de la transformada de Fourier, lo que quiere decir que debemos demostrar

$$\widehat{x^{\alpha}F} \in \langle\xi\rangle^{-|\alpha|-m+n+1}L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

A continuación,

$$\widehat{x^{\alpha}F} = (-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}{}_{\xi}\widehat{F},$$

por tanto, lo que debemos tener en cuenta es el comportamiento de las derivadas de $\hat{F}$, que es $Q(\xi)$ en (10.32)

Lema 10.14. *Sea $P(\xi)$ un polinomio de grado m que cumple*
(10.35) $|P(\xi)| \geq C\,|\xi|^m$ *en* $|\xi| > 1/C$ *para algún* $C > 0$.

luego para algunas constantes C_α

$$\left| D^\alpha \frac{1}{P(\xi)} \right| \leq C_\alpha \, |\xi|^{-m-|\alpha|} \tag{10.36}$$

en $|\xi| > 1/C$

Prueba. El cálculo de (10.36) para $\alpha = 0$ es de nuevo (10.35). La prueba del valor más alto supone calcular la existencia para cada α de un polinomio cuyo grado ha de ser como máximo $(m-1)$ tal que

$$D^\alpha \frac{1}{P(\xi)} = \frac{L_\alpha(\xi)}{(P(\xi))^{1+|\alpha|}}. \tag{10.37}$$

Una vez conocido (10.37), obtenemos directamente (10.36) a partir de

$$\left| D^\alpha \frac{1}{P(\xi)} \right| \leq \frac{C'_\alpha \, |\xi|^{(m-1)|\alpha|}}{C^{1+|\alpha|} \, |\xi|^{m(1+|\alpha|)}} \leq C_\alpha \, |\xi|^{-m-|\alpha|} \; .$$

Podemos probar (10.37) por inducción, puesto que es cierto para $\alpha = 0$. Supongamos que es también cierto para $|\alpha| \leq k$. Para obtener una misma identidad para cada β con $|\beta| = k + 1$, basta con diferenciar una vez una de las identidades con $|\alpha| = k$. De esta manera

$$D^\beta \frac{1}{P(\xi)} = D_j D^\alpha \frac{1}{P(\xi)} = \frac{D_j L_\alpha(\xi)}{P(\xi)^{1+|\alpha|}} - \frac{(1+|\alpha|) L_\alpha D_j P(\xi)}{(P(\xi))^{2+|\alpha|}}.$$

Al ser

$$L_\beta(\xi) = P(\xi) D_j L_\alpha(\xi) - (1+|\alpha|) L_\alpha(\xi) D_j P(\xi)$$

un polinomio cuyo grado es, como máximo, $(m-1)\,|\alpha| + m - 1\;|\beta|$, el lema queda demostrado.

Volviendo hacia atrás, nos fijamos en que

$$Q(\xi) = \tfrac{1-\varphi}{P_m(\xi)}$$

es uniforme en $|\xi| \leq 1/C$, luego (10.36) implica

$$|D^\alpha Q(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{-m-|\alpha|} \tag{10.38}$$

$$\Rightarrow \langle \xi \rangle^\ell D^\alpha Q \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ if } \ell - m - |\alpha| < -\frac{n}{2},$$

lo que ciertamente sigue siendo válido cuando

$$\ell = |\alpha| + m - n - 1,$$

dando como resultado (10.34). Ahora, por el teorema de la inmersión de trazas de Sobolev

$$x^\alpha F \in C^k \text{ if } |\alpha| > n + 1 - m + k + \frac{n}{2}.$$

Lo que quiere decir, concretamente, que si elegimos $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $0 \notin \text{supp}(\mu)$, entonces, para cada k, $\mu / |x|^{2k}$ es uniforme y

$$\mu F = \frac{\mu}{|x|^{2k}} |x|^{2k} F \in C^{2\ell - 2n}, \ \ell > n.$$

De este modo, $\mu F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, y esto es lo que pretendíamos demostrar, sing supp(F) $\subset \{0\}$.

Así pues ya hemos demostrado que $P_m(D)$ es hipoelíptico cuando es elíptico. Me permitirán ustedes que, en vez de verificarlo repitiendo de nuevo la prueba, vaya al supuesto general y lo repase desde allí.

Prueba. *Prueba del teorema.* Necesitamos demostrar que si $P(\xi)$ es elíptico, $P(D)$ tendrá una paramétrica F como en (10.27). De lo visto anteriormente resulta que la elipticidad de $P(\xi)$ implica (y es equivalente a)

$$|P_m(\xi)| \geq c|\xi|^m, \ c > 0.$$

Por otro lado,

$$P(\xi) - P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|<m} C_\alpha \xi^\alpha$$

es un polinomio de grado máximo $m - 1$, luego

$$|P(\xi) - P_m(\xi)| \, 2 \leq C'(1 + |\xi|)^{m-1}.$$

Lo que supone que si $C > 0$ es lo suficientemente grande en $|\xi| > C$, $C'(1 + |\xi|)^{m-1} < c/2\,|\xi|^m$, luego

$$|P(\xi)| \geq |P_m(\xi)| - |P(\xi) - P_m(\xi)|$$
$$\geq c\,|\xi|^m - C'(1+|\xi|)^{m-1} \geq \frac{c}{2}\,|\xi|^m \ .$$

Lo que quiere decir que $P(\xi)$ cumple por sí mismo las condiciones del Lema 10.14. Por consiguiente, si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es igual a 1 en una bola lo suficientemente grande, entonces $Q(xi) = (1 - \varphi(\xi))/P(\xi)$ en C^∞ y cumplirá (10.36), lo que podemos expresar como

$$|D^\alpha Q(\xi)| \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \ .$$

Así, la explicación anterior muestra que obtenemos una solución a (10.27) definiendo $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ mediante $\hat{F}(\xi) = Q(\xi)$.

El último paso de la prueba consiste en mostrar que si $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto y satisface (10.27), entonces

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\ ,\ P(D)u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$
$$\Rightarrow u = F * (P(D)u) - \psi * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\ .$$

Tratemos ahora de perfeccionar este resultado.

Proposición 10.15. *Si* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $\mu \in S'(\mathbb{R}^n)$ *tiene soporte compacto, entonces*

$$\operatorname{sing\,supp}(u * f) \subset \operatorname{sing\,supp}(u) + \operatorname{sing\,supp}(f)\ .$$

Prueba. Necesitamos demostrar que $p, \notin$ sing supp(u) $\in$ sing supp(f) luego $p \notin$ sing supp($u * f$). Una vez hayamos fijado p, podemos suponer que f tiene también soporte compacto. De hecho, elegiremos una bola grande $B(R,0)$, de tal modo que

$$z \notin B(0,R) \Rightarrow p \notin \operatorname{supp}(u) + B(0,R)\ .$$

Esto es posible por el acotamiento asumido de supp(u). Elegiremos entonces $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi = 1$ en $B(0, R)$; del Teorema L16.2, o más bien de su ampliación a las distribuciones, se desprende que $\varnothing \notin$ supp($u(1 - \varphi)f$), luego podemos sustituir f por φf teniendo en cuenta que sing supp(φf) $\subset$ sing supp(f). Si f tiene soporte compacto podremos elegir los vecindarios compactos K_1, K_2 del sing supp(u) y del sing supp(f) de tal modo que $p \notin K_1 + K_2$. Podemos además descomponer $u = u_1 + u_2, f = f_1 + f_2$ de modo que supp(u_1) $\subset K_1$, supp (f_2) $\subset K_2$ y $u_2, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De donde resulta

$$u * f = u_1 * f_1 + u_2 * f_2 + u_1 * f_2 + u_2 * f_2\ .$$

Ahora, $p \notin \operatorname{supp}(u_1 * f_1)$ por la propiedad de soporte de la convolución; y los otros tres términos son C^∞ ya que al menos uno de los factores es C^∞. En consecuencia, $p \notin \operatorname{supp}(u * f)$.

El ejemplo más importante de operador diferencial que es hipoelíptico, pero no elíptico, es el operador de calor.

$$\partial_t + \Delta = \partial_t - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 \,. \tag{10.39}$$

De hecho la distribución

$$E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \tag{10.40}$$

es una solución fundamental. En primer lugar, deberemos verificar que E es una distribución. Evidentemente, E es C^∞ en $t > 0$. Además, a medida que t ↓ en $x \neq 0$ disminuye con todas las derivadas también lo hace C^∞, excepto en $t = 0$, $x = 0$. Al ser claramente medible, verificaremos que es localmente integrable cerca del origen, es decir,

$$\int_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ |x| \leq 1}} E(t,x)\ dx\, dt < \infty\,, \tag{10.41}$$

ya que $E > 0$. Podemos cambiar las variables, fijando $X = x/t^{1/2}$, con lo que $dx = t^{n/2}\, dX$ y la integral pasa a ser

$$\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^{t} \int_{|X| \leq t^{-1/2}} \exp(-\frac{|X|^2}{4})\, dx\, dt \ < \infty\,.$$

Como E es acotada cerca del infinito, resulta que $E \in S' \mathbb{R}^n$,

$$E(\varphi) = \int_{t \geq 0} E(t,x)\varphi(t,x)\, dx\, dt\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})\,.$$

Al igual que antes, deseamos calcular

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Delta)E(\varphi) &= E(-\partial_t\varphi + \Delta\varphi) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)(-\partial_t\varphi + \Delta\varphi)\, dx\, dt\,. \end{aligned} \tag{10.42}$$

En primer lugar comprobaremos que $(\partial_t + \Delta)E = 0$ en $t > 0$, donde es una función C^{∞}. Se trata de un cálculo sencillo:

$$\partial_t E = -\frac{n}{2t}E + \frac{|x|^2}{4t^2}E$$

$$\partial_{x_j} E = -\frac{x_j}{2t}E\,,\ \partial^2_{x_j} E = -\frac{1}{2t}E + \frac{x_j^2}{4t^2}E$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{n}{2t}E + \frac{|x|^2}{4t^2}E\,.$$

A continuación podemos integrar por partes en (10.42) para obtener

$$(\partial_t + \Delta)E(\varphi) = \lim_{\mathcal{E}\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\mathcal{E},x)\frac{e^{-|x|^2/4\mathcal{E}}}{(4\pi\mathcal{E})^{n/2}}\,dx\,.$$

Y efectuando el mismo cambio de variables que hicimos antes, $X = x/2\mathcal{E}^{1/2}$,

$$(\partial_t + \Delta)E(\varphi) = \lim_{\mathcal{E}\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\mathcal{E},\mathcal{E}^{1/2}X)\frac{e^{-|x|^2}}{\pi^{n/2}}\,dX\,.$$

Como $\mathcal{E}\downarrow 0$, la integral se halla aquí acotada por la función integrable $C\exp(-|X|^2)$, para alguna $C > 0$, así que por el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada, conduce a la integral del límite. Es decir

$$\varphi(0,0)\cdot\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\frac{dx}{\pi^{n/2}} = \varphi(0,0)\,.$$

Por consiguiente

$$(\partial_t + \Delta)E(\varphi) = \varphi(0,0) \Rightarrow (\partial_t + \Delta)E = \delta_t\delta_x\,,$$

lo que demuestra que E es una solución fundamental. Dado que decrece en $t < 0$, se le etiqueta como solución *fundamental hacia adelante*. Veamos ahora para qué podemos utilizarla.

Proposición 10.16. *Si* $f \in S'\mathbb{R}^n$ tiene soporte compacto $\exists!u \in S'\mathbb{R}^n$ *con* $\operatorname{supp}(m) \subset \{t \geq -T\}$ *para alguna* T *y*

$$(10.43)\qquad (\partial_t + \Delta)u = f \ \ in\ \mathbb{R}^{n+1}\,.$$

Prueba. Naturalmente, probaremos $u = E * f$, que cumple (10.43) por las propiedades de convolución. Del mismo modo, si T es tal que $\operatorname{supp}(f) \subset \{t \geq T\}$, tenemos

$$\operatorname{supp}(u) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(E) \subset \{t \geq T]\,.$$

A continuación necesitamos demostrar la *unicidad*. Si $u_1, u_2 \in S'\mathbb{R}^n$ en dos soluciones de (10.43), su diferencia $v = u_1 - u_2$ satisfará la ecuación "homogénea" $(\partial_t + \Delta)v = 0$. Asimismo, $v = 0$ en $t < T'$ para alguna T'.

Dada cualquier $E \in \mathbb{R}$ elegiremos $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $\varphi(t) = 0$ en $t > \overline{t} + 1$, $\varphi(t) = 1$ en t < $\overline{t}$ y consideraremos

$$E_{\overline{t}} = \varphi(t)E = F_1 + F_2\,,$$

donde $F_1 = \psi E_{\overline{t}}$ para alguna $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, ψ próxima a 0. Por tanto, F_1 tiene soporte compacto y de hecho $F_2 \in S(\mathbb{R}^n)$. Comprueben ustedes esta última expresión como el Problema L18.P1.

En cualquier caso,

$$(\partial_t + \Delta)(F_1 + F_2) = \delta + \psi \in \mathcal{S}\mathbb{R}^n\,,\ \psi_{\overline{t}} = 0\ t \le \overline{t}\,.$$

A continuación,

$$(\partial_t + \Delta)(E_t * u) = 0 = u + \psi_{\overline{t}} * u\,.$$

Dado que

$$\operatorname{supp}(\psi_{\overline{t}}) \subset \{t \ge \overline{t}],$$

la segunda fila es soportada aquí en $t \ge \overline{t} \ge T'$. Por tanto, $u = 0$ en $t < \overline{t} + T'$, pero $\overline{t}$ es arbitrario.

Hay que tener en cuenta que la suposición de que $u \in S'\mathbb{R}^n$ no es redundante en el enunciado de la Proposición: si se admiten soluciones "grandes", éstas pierden su unicidad. En el Problema L18.P2 se pide aplicar la solución fundamental para resolver el problema del valor inicial del operador de calor.

A continuación haremos un uso similar de la solución fundamental aplicada al operador de Laplace. Si $n \ge 3$

$$E = C_n\,|x|^{-n+2} \tag{10.44}$$

es una solución fundamental. Es preciso verificar que $\Delta E_n = 0$ en $x \neq 0$ directamente, más adelante demostraré que $\Delta E_n = \delta$ para la elección apropiada de C_n, pero ustedes pueden hacerlo directamente, como en el supuesto $n = 3$.

Teorema 10.17. *Si* $f \in S\mathbb{R}^n$ $\exists! u \in C_0^\infty\ \mathbb{R}^n$ *tal que* $\Delta u = f$.

Prueba. Definida la convolución

$$u\ =\ E * f\ \in\ \mathcal{S}'\mathbb{R}^n \cap \mathcal{C}^\infty\mathbb{R}^n$$

obtenemos por esta vía una solución a $\Delta u = f$. Necesitamos comprobar que $u \in C_0^\infty \mathbb{R}^n$. Sabemos, en primer lugar, que Δ es hipoelíptico, por lo que podemos descomponer

$$E = F_1 + F_2\,,\ F_1 \in \mathcal{S}'\mathbb{R}^n\,,\ \mathrm{supp}\, F, \Subset \mathbb{R}^n$$

y a continuación $F_2\ C^\infty\ \mathbb{R}^n$. En realidad podemos ver en (10.44) que

$$|D^\alpha F_2(x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{-n+2-|\alpha|}\,.$$

Como hemos demostrado más arriba, $F_1 * f \in S\mathbb{R}^n$, y continuando la integral vemos que

$$\begin{aligned} |D^\alpha u| &\leq |D^\alpha F_2 * f| + C_N(1+|x|)^{-N}\ \forall\ N \\ &\leq C'_\alpha(1+|x|)^{-n+2-|\alpha|}\,. \end{aligned}$$

De $n > 2$ se desprende que $u \in C_c^\infty \mathbb{R}^n$.

De esta forma sólo se mantiene la unicidad. Si existen dos soluciones, u_1, u_2 para una f dada, entonces

$$v = u_1 - u_2 \in C_0^\infty \mathbb{R}^n$$

satisface $\Delta v = 0$. Como v $\in S'\mathbb{R}^n$, podemos aplicar la transformada de Fourier y comprobar que

$$|\chi|^2\,\widehat{v}(\chi) = 0 \Rightarrow \mathrm{supp}(\widehat{v}) \subset \{0\}\,.$$

un problema anterior consistía en partir de aquí para obtener como conclusión

$$\widehat{v} = \sum_{|\alpha|\leq m} C_\alpha D^\alpha \delta$$

para algunas constantes C_a. Esto, a su vez, implica que v es un polinomio. Sin embargo, los únicos polinomios en $C_0^0\,\mathbb{R}^n$ son idénticamente 0. De donde se deduce la unicidad y que $v = 0$.

La próxima vez hablaré sobre distribuciones homogéneas. En $\mathbb{R}$ las funciones

$$x_t^s = \begin{cases} x^s & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

donde $S \in \mathbb{R}$ es localmente integrable (y, en consecuencia, es una distribución temperada) precisamente cuando $S > -1$. Como función, es homogénea de grado s. Por lo tanto, si $\alpha > 0$ tenemos

$$(ax)_t^s = a^s x_t^s\,.$$

Si consideramos $x_t^s = \mu$ como una distribución podemos fijar esto como

$$\begin{aligned}\mu_s(ax)(\varphi) &= \int \mu_s(ax)\varphi(x)\,dx \\ &= \int \mu_s(x)\varphi(x/a)\frac{dx}{a} \\ &= a^s\mu_s(\varphi)\,.\end{aligned}$$

Por tanto, si *definimos*

$$\varphi_a(x) = \tfrac{1}{a}\varphi(\tfrac{x}{a}),$$

para cualquier $a > 0$, $\varphi \in S\,\mathbb{R}$ podemos plantearnos si una distribución es homogénea:

$$\mu(\varphi_a) = a^s\mu(\varphi)\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,.$$

11. Problems

Problem 1. Prove that u_+, defined by (1.10) is linear.

Problem 2. Prove Lemma 1.8.

Hint(s). All functions here are supposed to be continuous, I just don't bother to keep on saying it.

(1) Recall, or check, that the local compactness of a metric space X means that for each point $x \in X$ there is an $\epsilon > 0$ such that the ball $\{y \in X; d(x, y) \le \delta\}$ is compact for $\delta \le \epsilon$.
(2) First do the case $n = 1$, so $K \Subset U$ is a compact set in an open subset.

(a) Given $\delta > 0$, use the local compactness of X, to cover K with a finite number of compact closed balls of radius at most δ.

(b) Deduce that if $\epsilon > 0$ is small enough then the set $\{x \in X; d(x,K) \le \epsilon\}$, where
$$d(x,K) = \inf_{y \in K} d(x,y),$$
is compact.

(c) Show that $d(x,K)$, for K compact, is continuous.

(d) Given $\epsilon > 0$ show that there is a continuous function $g_\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ such that $g_\epsilon(t) = 1$ for $t \le \epsilon/2$ and $g_\epsilon(t) = 0$ for $t > 3\epsilon/4$.

(e) Show that $f = g_\epsilon \circ d(\cdot, K)$ satisfies the conditions for $n = 1$ if $\epsilon > 0$ is small enough.

(3) Prove the general case by induction over n.

(a) In the general case, set $K' = K \cap U_1^{\complement}$ and show that the inductive hypothesis applies to K' and the U_j for $j > 1$; let f_j', $j = 2, \dots, n$ be the functions supplied by the inductive assumption and put $f' = \sum_{j \ge 2} f_j'$.

(b) Show that $K_1 = K \cap \{f' \le \frac{1}{2}\}$ is a compact subset of U_1.

(c) Using the case $n = 1$ construct a function F for K_1 and U_1.

(d) Use the case $n = 1$ again to find G such that $G = 1$ on K and $\operatorname{supp}(G) \Subset \{f' + F > \frac{1}{2}\}$.

(e) Make sense of the functions
$$f_1 = F \frac{G}{f' + F}, \ f_j = f_j' \frac{G}{f' + F}, \ j \ge 2$$
and show that they satisfies the inductive assumptions.

Problem 3. Show that σ-algebras are closed under countable intersections.

Problem 4. (Easy) Show that if μ is a complete measure and $E \subset F$ where F is measurable and has measure 0 then $\mu(E) = 0$.

Problem 5. Show that compact subsets are measurable for any Borel measure. (This just means that compact sets are Borel sets if you follow through the tortuous terminology.)

Problem 6. Show that the smallest σ-algebra containing the sets
$$(a, \infty] \subset [-\infty, \infty]$$
for all $a \in \mathbb{R}$, generates what is called above the 'Borel' σ-algebra on $[-\infty, \infty]$.

Problem 7. Write down a careful proof of Proposition 1.1.

Problem 8. Write down a careful proof of Proposition 1.2.

Problem 9. Let X be the metric space

$$X = \{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}\} \subset \mathbb{R}$$

with the induced metric (i.e. the same distance as on $\mathbb{R}$). Recall why X is compact. Show that the space $\mathcal{C}_0(X)$ and its dual are infinite dimensional. Try to describe the dual space in terms of sequences; at least *guess* the answer.

Problem 10. For the space $Y = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$, describe $\mathcal{C}_0(Y)$ and guess a description of its dual in terms of sequences.

Problem 11. Let $(X, \mathcal{M}, \mu)$ be any measure space (so μ is a measure on the σ-algebra $\mathcal{M}$ of subsets of X). Show that the set of equivalence classes of μ-integrable functions on X, with the equivalence relation given by (3.9), is a normed linear space with the usual linear structure and the norm given by

$$\|f\| = \int_X |f| d\mu.$$

Problem 12. Let $(X, \mathcal{M})$ be a set with a σ-algebra. Let $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ be a finite measure in the sense that $\mu(\phi) = 0$ and for any $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ with $E_i \cap E_j = \phi$ for $i \neq j$,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \tag{11.1}$$

with the series on the right *always* absolutely convergenct (i.e., this is part of the requirement on μ). Define

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \tag{11.2}$$

for $E \in \mathcal{M}$, with the supremum over *all* measurable decompositions $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ with the E_i disjoint. Show that $|\mu|$ is a finite, positive measure.

Hint 1. You must show that $|\mu|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i)$ if $\bigcup_i A_i = E$, $A_i \in \mathcal{M}$ being disjoint. Observe that if $A_j = \bigcup_l A_{jl}$ is a measurable decomposition of A_j then together the A_{jl} give a decomposition of E. Similarly, if $E = \bigcup_j E_j$ is any such decomposition of E then $A_{jl} = A_j \cap E_l$ gives such a decomposition of A_j.

Hint 2. See [5] p. 117!

Problem 13. (Hahn Decomposition)

With assumptions as in Problem 12:

(1) Show that $\mu_+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ and $\mu_- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$ are positive measures, $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Conclude that the definition of a measure based on (3.17) is the *same* as that in Problem 12.

(2) Show that $\mu_\pm$ so constructed are orthogonal in the sense that there is a set $E \in \mathcal{M}$ such that $\mu_-(E) = 0$, $\mu_+(X \setminus E) = 0$.

Hint. Use the definition of $|\mu|$ to show that for any $F \in \mathcal{M}$ and any $\epsilon > 0$ there is a subset $F' \in \mathcal{M}$, $F' \subset F$ such that $\mu_+(F') \geq \mu_+(F) - \epsilon$ and $\mu_-(F') \leq \epsilon$. Given $\delta > 0$ apply this result repeatedly (say with $\epsilon = 2^{-n}\delta$) to find a decreasing sequence of sets $F_1 = X$, $F_n \in \mathcal{M}$, $F_{n+1} \subset F_n$ such that $\mu_+(F_n) \geq \mu_+(F_{n-1}) - 2^{-n}\delta$ and $\mu_-(F_n) \leq 2^{-n}\delta$. Conclude that $G = \bigcap_n F_n$ has $\mu_+(G) \geq \mu_+(X) - \delta$ and $\mu_-(G) = 0$. Now let G_m be chosen this way with $\delta = 1/m$. Show that $E = \bigcup_m G_m$ is as required.

Problem 14. Now suppose that μ is a finite, positive Radon measure on a locally compact metric space X (meaning a finite positive Borel measure outer regular on Borel sets and inner regular on open sets). Show that μ is inner regular on all Borel sets and hence, given $\epsilon > 0$ and $E \in \mathcal{B}(X)$ there exist sets $K \subset E \subset U$ with K compact and U open such that $\mu(K) \geq \mu(E) - \epsilon$, $\mu(E) \geq \mu(U) - \epsilon$.

Hint. First take U open, then use *its* inner regularity to find K with $K' \Subset U$ and $\mu(K') \geq \mu(U) - \epsilon/2$. How big is $\mu(E \backslash K')$? Find $V \supset K' \backslash E$ with V open and look at $K = K' \backslash V$.

Problem 15. Using Problem 14 show that if μ is a finite Borel measure on a locally compact metric space X then the following three conditions are equivalent

(1) $\mu = \mu_1 - \mu_2$ with μ_1 and μ_2 both positive finite Radon measures.
(2) $|\mu|$ is a finite positive Radon measure.
(3) μ_+ and μ_- are finite positive Radon measures.

Problem 16. Let $\| \ \|$ be a norm on a vector space V. Show that $\|u\| = (u,u)^{1/2}$ for an inner product satisfying (4.1) - (4.4) if and only if the parallelogram law holds for every pair $u, v \in V$.

Hint (From Dimitri Kountourogiannis)

If $\| \cdot \|$ comes from an inner product, then it must satisfy the polarisation identity:

$$(x,y) = 1/4(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

i.e, the inner product is recoverable from the norm, so use the RHS (right hand side) to define an inner product on the vector space. You will need the paralellogram law to verify the additivity of the RHS. Note the polarization identity is a bit more transparent for real vector spaces. There we have

$$(x, y) = 1/2(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

both are easy to prove using $\|a\|^2 = (a, a)$.

Problem 17. Show (Rudin does it) that if $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ has continuous partial derivatives then it is differentiable at each point in the sense of (5.5).

Problem 18. Consider the function $f(x) = \langle x \rangle^{-1} = (1+|x|^2)^{-1/2}$. Show that

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = l_j(x) \cdot \langle x \rangle^{-3}$$

with $l_j(x)$ a linear function. Conclude by *induction* that $\langle x \rangle^{-1} \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ for *all* k.

Problem 19. Show that $\exp(-|x|^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Problem 20. Prove (6.7), probably by induction over k.

Problem 21. Prove Lemma 6.4.

Hint. Show that a set $U \ni 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ is a neighbourhood of 0 if and only if for some k and $\epsilon > 0$ it contains a set of the form

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \, ; \sum_{\substack{|\alpha| \le k, \\ |\beta| \le k}} \sup \left| x^\alpha D^\beta \varphi \right| < \epsilon \right\} .$$

Problem 22. Prove (7.7), by estimating the integrals.

Problem 23. Prove (7.9) where

$$\psi_j(z; x') = \int_0^{\prime} \frac{\partial \psi}{\partial z_j}(z + tx') \, dt \, .$$

Problem 24. Prove (7.20). You will probably have to go back to first principles to do this. Show that it is enough to assume $u \ge 0$ has compact support. Then show it is enough to assume that u is a simple, and integrable, function. Finally look at the definition of Lebesgue measure and show that if $E \subset \mathbb{R}^n$ is Borel and has finite Lebesgue measure then

$$\lim_{|t| \to \infty} \mu(E \backslash (E + t)) = 0$$

where $\mu =$ Lebesgue measure and

$$E + t = \{ p \in \mathbb{R}^n \, ; \, p' + t \, , \, p' \in E \} \, .$$

Problem 25. Prove Leibniz' formula

$$D^\alpha{}_x(\varphi\psi) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha{}_x\varphi \cdot d_x^{\alpha-\beta}\psi$$

for any $\mathcal{C}^\infty$ functions and φ and ψ. Here α and β are multiindices, $\beta \le \alpha$ means $\beta_j \le \alpha_j$ for each j? and

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_j \binom{\alpha_j}{\beta_j}.$$

I suggest induction!

Problem 26. Prove the generalization of Proposition 7.10 that $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(w) \subset \{0\}$ implies there are constants $c\alpha$, $|\alpha| \le m$, for some m, such that

$$u = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha D^\alpha \delta\,.$$

Hint This is not so easy! I would be happy if you can show that $u \in M(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u \subset \{0\}$ implies $u = c\delta$. To see this, you can show that

$$\begin{aligned}
&\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \varphi(0) = 0\\
&\qquad \Rightarrow \exists \varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\ \varphi_j(x) = 0 \text{ in } |x| \le \epsilon_j > 0(\downarrow 0)\,,\\
&\qquad\qquad \sup|\varphi_j - \varphi| \to 0 \text{ as } j \to \infty\,.
\end{aligned}$$

To prove the general case you need something similar — that given m, if $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ and $D^\alpha{}_x\varphi(0) = 0$ for $|\alpha| \le m$ then $\exists\, \varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_j = 0$ in $|x| \le \epsilon_j$, $\epsilon_j \downarrow 0$ such that $\varphi_j \to \varphi$ in the $\mathcal{C}^m$ norm.

Problem 27. If $m \in \mathbb{N}$, $m' > 0$ show that $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ and $D^\alpha u \in H^{m'}(\mathbb{R}^n)$ for all $|\alpha| \le m$ implies $u \in H^{m+m'}(\mathbb{R}^n)$. Is the converse true?

Problem 28. Show that every element $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ can be written as a sum

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^n D_j u_j\,,\ u_j \in H^1(\mathbb{R}^n)\,,\ j = 0, \dots, n\,.$$

Problem 29. Consider for $n = 1$, the locally integrable function (the Heaviside function),

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 1\,. \end{cases}$$

Show that $D_x H(x) = c\delta$; what is the constant c?

Problem 30. For what range of orders m is it true that $\delta \in H^m(\mathbb{R}^n)$, $\delta(\varphi) = \varphi(0)$?

Problem 31. Try to write the Dirac measure explicitly (as possible) in the form (9.8). How many derivatives do you think are necessary?

Problem 32. Go through the computation of $\overline{\partial} E$ again, but cutting out a disk $\{x^2 + y^2 \le \epsilon^2\}$ instead.

Problem 33. Consider the Laplacian, (10.4), for $n = 3$. Show that $E = c(x^2 + y^2)^{-1/2}$ is a fundamental solution for some value of c.

Problem 34. Recall that a topology on a set X is a collection $\mathcal{F}$ of subsets (called the *open* sets) with the properties, $\phi \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$ and $\mathcal{F}$ is closed under finite intersections and arbitrary unions. Show that the following definition of an open set $U \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ defines a topology:

$$\forall\ u \in U \text{ and all } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\ \exists \epsilon > 0 \text{ st.}$$
$$|(u' - u)(\varphi)| < \epsilon \Rightarrow u' \in U\,.$$

This is called the weak topology (because there are very few open sets). Show that $u_j \to u$ weakly in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ means that for every open set $U \ni u$ $\exists N$ st. $u_j \in U$ $\forall$ $j \ge N$.

Problem 35. Prove (10.18) where $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ and $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Problem 36. Show that for fixed $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ with compact support

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto v * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

is a continuous linear map.

Problem 37. Prove the ?? to properties in Theorem 10.6 for $u * v$ where $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ and $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ with at least one of them having compact support.

Problem 38. Use Theorem 10.9 to show that if $P(D)$ is hypoelliptic then *every* parametrix $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ has $\operatorname{sing\,supp}(F) = \{0\}$.

Problem 39. Show that if $P(D)$ is an ellipitic differential operator of order m, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ and $P(D)u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ then $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

Problem 40 (Taylor's theorem). . Let $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ be a real-valued function which is k times continuously differentiable. Prove that there is a polynomial p and a continuous function v such that

$$u(x) = p(x) + v(x) \text{ where } \lim_{|x| \downarrow 0} \frac{|v(x)|}{|x|^k} = 0.$$

Problem 41. Let $\mathcal{C}(\mathbb{B}^n)$ be the space of continuous functions on the (closed) unit ball, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$. Let $\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n) \subset \mathcal{C}(\mathbb{B}^n)$ be the subspace of functions which vanish at each point of the boundary and let $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1})$ be the space of continuous functions on the unit sphere. Show that inclusion and restriction to the boundary gives a short exact sequence

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{B}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1})$$

(meaning the first map is injective, the second is surjective and the image of the first is the null space of the second.)

Problem 42 (Measures). A measure on the ball is a continuous linear functional $\mu : \mathcal{C}(\mathbb{B}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ where continuity is with respect to the supremum norm, i.e. there must be a constant C such that

$$|\mu(f)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| \ \forall \ f \in \mathcal{C}(\mathbb{B}^n).$$

Let $M(\mathbb{B}^n)$ be the linear space of such measures. The space $M(\mathbb{S}^{n-1})$ of measures on the sphere is defined similarly. Describe an injective map

$$M(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow M(\mathbb{B}^n).$$

Can you define another space so that this can be extended to a short exact sequence?

Problem 43. Show that the Riemann integral defines a measure

$$\mathcal{C}(\mathbb{B}^n) \ni f \longmapsto \int_{\mathbb{B}^n} f(x)dx. \tag{11.3}$$

Problem 44. If $g \in \mathcal{C}(\mathbb{B}^n)$ and $\mu \in M(\mathbb{B}^n)$ show that $g\mu \in M(\mathbb{B}^n)$ where $(g\mu)(f) = \mu(fg)$ for all $f \in \mathcal{C}(\mathbb{B}^n)$. Describe all the measures with the property that

$$x_j\mu = 0 \text{ in } M(\mathbb{B}^n) \text{ for } j = 1, \dots, n.$$

Problem 45 (Hörmander, Theorem 3.1.4). Let $I \subset \mathbb{R}$ be an open, non-empty interval.

i) Show (you may use results from class) that there exists $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ with $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)ds = 1$.
ii) Show that any $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ may be written in the form

$$\phi = \tilde{\phi} + c\psi, \ c \in \mathbb{C}, \ \tilde{\phi} \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \text{ with } \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi} = 0.$$

iii) Show that if $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ and $\int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi} = 0$ then there exists $\mu \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ such that $\frac{d\mu}{dx} = \tilde{\phi}$ in I.

iv) Suppose $u \in \mathcal{C}^{-\infty}(I)$ satisfies $\frac{du}{dx} = 0$, i.e.

$$u(-\frac{d\phi}{dx}) = 0 \;\forall\; \phi \in \mathcal{C}^\infty_c(I),$$

show that $u = c$ for some constant c.

v) Suppose that $u \in \mathcal{C}^{-\infty}(I)$ satisfies $\frac{du}{dx} = c$, for some constant c, show that $u = cx + d$ for some $d \in \mathbb{C}$.

Problem 46. [Hörmander Theorem 3.1.16]

i) Use Taylor's formula to show that there is a fixed $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ such that any $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ can be written in the form

$$\phi = c\psi + \sum_{j=1}^{n} x_j\psi_j$$

where $c \in \mathbb{C}$ and the $\psi_j \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ depend on ϕ.

ii) Recall that δ_0 is the distribution defined by

$$\delta_0(\phi) = \phi(0) \;\forall\; \phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n);$$

explain why $\delta_0 \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

iii) Show that if $u \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ and $u(x_j\phi) = 0$ for all $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ and $j = 1, \dots, n$ then $u = c\delta_0$ for some $c \in \mathbb{C}$.

iv) Define the 'Heaviside function'

$$H(\phi) = \int_0^\infty \phi(x)dx \;\forall\; \phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R});$$

show that $H \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$.

v) Compute $\frac{d}{dx}H \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$.

Problem 47. Using Problems 45 and 46, find all $u \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$ satisfying the differential equation

$$x\frac{du}{dx} = 0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

These three problems are all about homogeneous distributions on the line, extending various things using the fact that

$$x^z_+ = \begin{cases} \exp(z\log x) & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

is a continuous function on $\mathbb{R}$ if $\operatorname{Re} z > 0$ and is differentiable if $\operatorname{Re} z > 1$ and then satisfies

$$\frac{d}{dx}x^z_+ = zx^{z-1}_+.$$

We used this to define

$$x_+^z = \frac{1}{z+k}\frac{1}{z+k-1}\cdots\frac{1}{z+1}\frac{d^k}{dx^k}x_+^{z+k} \text{ if } z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}. \tag{11.4}$$

Problem 48. [Hadamard regularization]

i) Show that (11.4) just means that for each $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

$$x_+^z(\phi) = \frac{(-1)^k}{(z+k)\cdots(z+1)}\int_0^\infty \frac{d^k\phi}{dx^k}(x)x^{z+k}dx,\ \operatorname{Re} z > -k,\ z \notin -\mathbb{N}.$$

ii) Use integration by parts to show that

$$x_+^z(\phi) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left[\int_\epsilon^\infty \phi(x)x^z dx - \sum_{j=1}^k C_j(\phi)\epsilon^{z+j}\right],\ \operatorname{Re} z > -k,\ z \notin -\mathbb{N} \tag{11.5}$$

for certain constants $C_j(\phi)$ which you should give explicitly. [This is called Hadamard regularization after Jacques Hadamard, feel free to look at his classic book [3].]

iii) Assuming that $-k+1 \geq \operatorname{Re} z > -k$, $z \neq -k+1$, show that there can only be one set of the constants with $j < k$ (for each choice of $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$) such that the limit in (11.5) exists.

iiv) Use ii), and maybe iii), to show that

$$\frac{d}{dx}x_+^z = zx_+^{z-1} \text{ in } \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})\ \forall\ z \notin -\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}.$$

v) Similarly show that $xx_+^z = x_+^{z+1}$ for all $z \notin -\mathbb{N}$.

vi) Show that $x_+^z = 0$ in $x < 0$ for all $z \notin -\mathbb{N}$. (Duh.)

Problem 49. [Null space of $x\frac{d}{dx} - z$]

i) Show that if $u \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$ then $\tilde{u}(\phi) = u(\tilde{\phi})$, where $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)\ \forall\ \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, defines an element of $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$. What is $\tilde{u}$ if $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$? Compute $\widetilde{\delta_0}$.

ii) Show that $\frac{d}{dx}\tilde{u} = -\widetilde{\frac{d}{dx}u}$.

iii) Define $x_-^z = \widetilde{x_+^z}$ for $z \notin -\mathbb{N}$ and show that $\frac{d}{dx}x_-^z = -zx_-^{z-1}$ and $xx_-^z = -x_-^{z+1}$.

iv) Suppose that $u \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$ satisfies the distributional equation $(x\frac{d}{dx} - z)u = 0$ (meaning of course, $x\frac{du}{dx} = zu$ where z is a constant). Show that

$$u\big|_{x>0} = c_+x_-^z\big|_{x>0} \text{ and } u\big|_{x<0} = c_-x_-^z\big|_{x<0}$$

for some constants $c_\pm$. Deduce that $v = u - c_+x_+^z - c_-x_-^z$ satisfies

$$(x\frac{d}{dx} - z)v = 0 \text{ and } \operatorname{supp}(v) \subset \{0\}. \tag{11.6}$$

v) Show that for each $k \in \mathbb{N}$, $(x\frac{d}{dx} + k + 1)\frac{d^k}{dx^k}\delta_0 = 0$.

vi) Using the *fact* that any $v \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$ with $\operatorname{supp}(v) \subset \{0\}$ is a finite sum of constant multiples of the $\frac{d^k}{dx^k}\delta_0$, show that, for $z \notin -\mathbb{N}$, the only solution of (11.6) is $v = 0$.

vii) Conclude that for $z \notin -\mathbb{N}$

$$\left\{u \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}); (x\frac{d}{dx} - z)u = 0\right\} \tag{11.7}$$

is a two-dimensional vector space.

Problem 50. [Negative integral order] To do the same thing for negative integral order we need to work a little differently. Fix $k \in \mathbb{N}$.

i) We define *weak convergence* of distributions by saying $u_n \to u$ in $\mathcal{C}^\infty_c(X)$, where $u_n, u \in \mathcal{C}^{-\infty}(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ being open, if $u_n(\phi) \to u(\phi)$ for each $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(X)$. Show that $u_n \to u$ implies that $\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial u}{\partial x_j}$ for each $j = 1, \dots, n$ and $fu_n \to fu$ if $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$.

ii) Show that $(z + k)x_+^z$ is weakly continuous as $z \to -k$ in the sense that for any sequence $z_n \to -k$, $z_n \notin -\mathbb{N}$, $(z_n+k)x_+^{z_n} \to v_k$ where

$$v_k = \frac{1}{-1} \cdots \frac{1}{-k+1}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}x_+,\ x_+ = x_+^1.$$

iii) Compute v_k, including the constant factor.

iv) Do the same thing for $(z + k)x_-^z$ as $z \to -k$.

v) Show that there is a linear combination $(k + z)(x_+^z + c(k)x_-^z)$ such that as $z \to -k$ the limit is zero.

vi) If you get this far, show that in fact $x_+^z + c(k)x_-^z$ also has a weak limit, u_k, as $z \to -k$. [This may be the hardest part.]

vii) Show that this limit distribution satisfies $(x\frac{d}{dx} + k)u_k = 0$.

viii) Conclude that (11.7) does in fact hold for $z \in -\mathbb{N}$ as well. [There are still some things to prove to get this.]

Problem 51. Show that for any set $G \subset \mathbb{R}^n$

$$v^*(G) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} v(A_i)$$

where the infimum is taken over coverings of G by rectangular sets (products of intervals).

Problem 52. Show that a σ-algebra is closed under countable intersections.

Problem 53. Show that compact sets are Lebesgue measurable and have finite volume and also show the inner regularity of the Lebesgue measure on open sets, that is if E is open then

$$v(E) = \sup\{v(K); K \subset E,\ K \text{ compact}\}. \tag{11.8}$$

Problem 54. Show that a set $B \subset \mathbb{R}^n$ is Lebesgue measurable if and only if

$$v^*(E) = v^*(E \cap B) + v^*(E \cap B^{\complement})\ \forall \text{ open } E \subset \mathbb{R}^n.$$

[The definition is this for all $E \subset \mathbb{R}^n$.]

Problem 55. Show that a real-valued continuous function $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ on an open set, is Lebesgue measurable, in the sense that $f^{-1}(I) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ is measurable for each interval I.

Problem 56. Hilbert space and the Riesz representation theorem. If you need help with this, it can be found in lots of places – for instance [6] has a nice treatment.

i) A pre-Hilbert space is a vector space V (over $\mathbb{C}$) with a 'positive definite sesquilinear inner product' i.e. a function

$$V \times V \ni (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$$

satisfying
- $\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle}$
- $\langle a_1 v_1 + a_2 v_2, w\rangle = a_1\langle v_1, w\rangle + a_2\langle v_2, w\rangle$
- $\langle v, v\rangle \geq 0$
- $\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$.

Prove Schwarz' inequality, that

$$|\langle u, v\rangle| \leq \langle u\rangle^{\frac{1}{2}}\langle v\rangle^{\frac{1}{2}}\ \forall\ u, v \in V.$$

Hint: Reduce to the case $\langle v, v\rangle = 1$ and then expand

$$\langle u - \langle u, v\rangle v, u - \langle u, v\rangle v\rangle \geq 0.$$

ii) Show that $\|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2}$ is a norm and that it satisfies the parallelogram law:

$$\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2\ \forall\ v_1, v_2 \in V. \tag{11.9}$$

iii) Conversely, suppose that V is a linear space over $\mathbb{C}$ with a norm which satisfies (11.9). Show that

$$4\langle v, w\rangle = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - i\|v - iw\|^2$$

defines a pre-Hilbert inner product which gives the original norm.

iv) Let V be a Hilbert space, so as in (i) but complete as well. Let $C \subset V$ be a closed non-empty convex subset, meaning $v, w \in C \Rightarrow (v+w)/2 \in C$. Show that there exists a unique $v \in C$ minimizing the norm, i.e. such that

$$\|v\| = \inf_{w \in C} \|w\|.$$

Hint: Use the parallelogram law to show that a norm minimizing sequence is Cauchy.

v) Let $u : H \to \mathbb{C}$ be a continuous linear functional on a Hilbert space, so $|u(\varphi)| \le C\|\varphi\| \ \forall \ \varphi \in H$. Show that $N = \{\varphi \in H; u(\varphi) = 0\}$ is closed and that if $v_0 \in H$ has $u(v_0) \neq 0$ then each $v \in H$ can be written uniquely in the form

$$v = cv_0 + w, \ \ c \in \mathbb{C}, \ \ w \in N.$$

vi) With u as in v), not the zero functional, show that there exists a unique $f \in H$ with $u(f) = 1$ and $\langle w, f \rangle = 0$ for all $w \in N$.
Hint: Apply iv) to $C = \{g \in V; u(g) = 1\}$.

vii) Prove the Riesz Representation theorem, that every continuous linear functional on a Hilbert space is of the form

$$u_f : H \ni \varphi \mapsto \langle \varphi, f \rangle \text{ for a unique } f \in H.$$

Problem 57. Density of $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

i) Recall in a few words why simple integrable functions are dense in $L^1(\mathbb{R}^n)$ with respect to the norm $\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$.

ii) Show that simple functions $\sum_{j=1}^N c_j \chi(U_j)$ where the U_j are open and bounded are also dense in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

iii) Show that if U is open and bounded then $F(y) = v(U \cap U_y)$, where $U_y = \{z \in \mathbb{R}^n; z = y + y', y' \in U\}$ is continuous in $y \in \mathbb{R}^n$ and that

$$v(U \cap U_y^\complement) + v(U^\complement \cap U_y) \to 0 \text{ as } y \to 0.$$

iv) If U is open and bounded and $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ show that

$$f(x) = \int_U \varphi(x-y)dy \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

v) Show that if U is open and bounded then

$$\sup_{|y| \le \delta} \int |\chi_U(x) - \chi_U(x-y)|dx \to 0 \text{ as } \delta \downarrow 0.$$

vi) If U is open and bounded and $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \ge 0$, $\int \varphi = 1$ then

$$f_\delta \to \chi_U \text{ in } L^1(\mathbb{R}^n) \text{ as } \delta \downarrow 0$$

where

$$f_\delta(x) = \delta^{-n} \int \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right) \chi_U(x-y)dy.$$

Hint: Write $\chi_U(x) = \delta^{-n} \int \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right) \chi_U(x)$ and use v).

vii) Conclude that $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ is dense in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

viii) Show that $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ is dense in $L^p(\mathbb{R}^n)$ for any $1 \le p < \infty$.

Problem 58. Schwartz representation theorem. Here we (well you) come to grips with the general structure of a tempered distribution.

i) Recall briefly the proof of the Sobolev embedding theorem and the corresponding estimate

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)| \le C\|\phi\|_{H^m}, \ \frac{n}{2} < m \in \mathbb{R}.$$

ii) For $m = n+1$ write down a(n equivalent) norm on the right in a form that does not involve the Fourier transform.

iii) Show that for any $\alpha \in \mathbb{N}_0$

$$|D^\alpha\left((1+|x|^2)^N\phi\right)| \le C_{\alpha,N}\sum_{\beta\le\alpha}(1+|x|^2)^N|D^\beta\phi|.$$

iv) Deduce the general estimates

$$\sup_{\substack{|\alpha|\le N\\ x\in\mathbb{R}^n}} (1+|x|^2)^N|D^\alpha\phi(x)| \le C_N\|(1+|x|^2)^N\phi\|_{H^{N+n+1}}.$$

v) Conclude that for each tempered distribution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ there is an integer N and a constant C such that

$$|u(\phi)| \le C\|(1+|x|^2)^N\phi\|_{H^{2N}} \ \forall \ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

vi) Show that $v = (1+|x|^2)^{-N}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ satisfies

$$|v(\phi)| \le C\|(1+|D|^2)^N\phi\|_{L^2} \ \forall \ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

vi) Recall (from class or just show it) that if v is a tempered distribution then there is a unique $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ such that $(1+|D|^2)^N w = v$.

vii) Use the Riesz Representation Theorem to conclude that for each tempered distribution u there exists N and $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ such that

$$u = (1+|D|^2)^N(1+|x|^2)^N w. \tag{11.10}$$

viii) Use the Fourier transform on $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (and the fact that it is an isomorphism on $L^2(\mathbb{R}^n)$) to show that any tempered distribution can be written in the form

$$u = (1+|x|^2)^N(1+|D|^2)^N w \text{ for some } N \text{ and some } w \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

ix) Show that any tempered distribution can be written in the form $u = (1+|x|^2)^N (1+|D|^2)^{N+n+1} \tilde{w}$ for some N and some $\tilde{w} \in H^{2(n+1)}(\mathbb{R}^n)$.

x) Conclude that any tempered distribution can be written in the form

$$u = (1 + |x|^2)^N (1 + |D|^2)^M U \text{ for some } N, M$$
$$\text{and a bounded continuous function } U$$

Problem 59. Distributions of compact support.

i) Recall the definition of the support of a distribution, defined in terms of its complement

$$\mathbb{R}^n \backslash \operatorname{supp}(u) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n ; \exists\, U \subset \mathbb{R}^n, \text{ open, with } p \in U \text{ such that } u\big|_U = 0 \right\}$$

ii) Show that if $u \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ and $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ satisfy

$$\operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(\phi) = \emptyset$$

then $u(\phi) = 0$.

iii) Consider the space $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ of all smooth functions on $\mathbb{R}^n$, without restriction on supports. Show that for each N

$$\|f\|_{(N)} = \sup_{|\alpha| \le N,\ |x| \le N} |D^\alpha f(x)|$$

is a seminorn on $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (meaning it satisfies $\|f\| \ge 0$, $\|cf\| = |c|\|f\|$ for $c \in \mathbb{C}$ and the triangle inequality but that $\|f\| = 0$ does not necessarily imply that $f = 0$.)

iv) Show that $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ is dense in the sense that for each $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ there is a sequence f_n in $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ such that $\|f - f_n\|_{(N)} \to 0$ for each N.

v) Let $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ temporarily (or permanantly if you prefer) denote the dual space of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (which is also written $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$), that is, $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ is a linear map $v : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ which is continuous in the sense that for some N

$$|v(f)| \le C\|f\|_{(N)}\ \forall\ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{11.11}$$

Show that such a v 'is' a distribution and that the map $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ is injective.

vi) Show that if $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ satisfies (11.11) and $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ has $f = 0$ in $|x| < N + \epsilon$ for some $\epsilon > 0$ then $v(f) = 0$.

vii) Conclude that each element of $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ has compact support when considered as an element of $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

viii) Show the converse, that each element of $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ with compact support is an element of $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ and hence conclude that $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ 'is' the space of distributions of compact support.

I will denote the space of distributions of compact support by $\mathcal{C}_c^{-\infty}(\mathbb{R})$.

Problem 60. Hypoellipticity of the heat operator $H = iD_t + \Delta = iD_t + \sum\limits_{j=1}^{n} D_{x_j}^2$ on $\mathbb{R}^{n+1}$.

(1) Using τ to denote the 'dual variable' to t and $\xi \in \mathbb{R}^n$ to denote the dual variables to $x \in \mathbb{R}^n$ observe that $H = p(D_t, D_x)$ where $p = i\tau + |\xi|^2$.
(2) Show that $|p(\tau, \xi)| > \frac{1}{2}\left(|\tau| + |\xi|^2\right)$.
(3) Use an inductive argument to show that, in $(\tau, \xi) \neq 0$ where it makes sense,

$$D_\tau^k D_\xi^\alpha \frac{1}{p(\tau,\xi)} = \sum_{j=1}^{|\alpha|} \frac{q_{k,\alpha,j}(\xi)}{p(\tau,\xi)^{k+j+1}} \tag{11.12}$$

where $q_{k,\alpha,j}(\xi)$ is a polynomial of degree (at most) $2j - |\alpha|$.
(4) Conclude that if $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ is identically equal to 1 in a neighbourhood of 0 then the function

$$g(\tau, \xi) = \frac{1 - \phi(\tau, \xi)}{i\tau + |\xi|^2}$$

is the Fourier transform of a distribution $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ with $\operatorname{sing\,supp}(F) \subset \{0\}$. [Remember that $\operatorname{sing\,supp}(F)$ is the complement of the largest open subset of $\mathbb{R}^n$ the restriction of F to which is smooth].
(5) Show that F is a parametrix for the heat operator.
(6) Deduce that $iD_t + \Delta$ is *hypoelliptic* – that is, if $U \subset \mathbb{R}^n$ is an open set and $u \in \mathcal{C}^{-\infty}(U)$ satisfies $(iD_t + \Delta)u \in \mathcal{C}^\infty(U)$ then $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$.
(7) Show that $iD_t - \Delta$ is also hypoelliptic.

Problem 61. Wavefront set computations and more – all pretty easy, especially if you use results from class.

i) Compute $\mathrm{WF}(\delta)$ where $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ is the Dirac delta function at the origin.
ii) Compute $\mathrm{WF}(H(x))$ where $H(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ is the Heaviside function

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

Hint: D_x is elliptic in one dimension, hit H with it.
iii) Compute $\mathrm{WF}(E)$, $E = iH(x_1)\delta(x')$ which is the Heaviside in the first variable on $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, and delta in the others.
iv) Show that $D_{x_1}E = \delta$, so E is a fundamental solution of D_{x_1}.

v) If $f \in \mathcal{C}_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ show that $u = E \star f$ solves $D_{x_1} u = f$.

vi) What does our estimate on $\mathrm{WF}(E \star f)$ tell us about $\mathrm{WF}(u)$ in terms of $\mathrm{WF}(f)$?

Problem 62. The wave equation in two variables (or one spatial variable).

i) Recall that the Riemann function

$$E(t,x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{if } t > x \text{ and } t > -x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is a fundamental solution of $D_t^2 - D_x^2$ (check my constant).

ii) Find the singular support of E.

iii) Write the Fourier transform (dual) variables as τ, ξ and show that

$$\mathrm{WF}(E) \subset \{0\} \times \mathbb{S}^1 \cup \{(t,x,\tau,\xi); x = t > 0 \text{ and } \xi + \tau = 0\} \\ \cup \{(t,x,\tau,\xi); -x = t > 0 \text{ and } \xi = \tau\}.$$

iv) Show that if $f \in \mathcal{C}_c^{-\infty}(\mathbb{R}^2)$ then $u = E \star f$ satisfies $(D_t^2 - D_x^2)u = f$.

v) With u defined as in iv) show that

$$\mathrm{supp}(u) \subset \{(t,x);\ \exists \\ (t',x') \in \mathrm{supp}(f) \text{ with } t' + x' \le t + x \text{ and } t' - x' \le t - x\}.$$

vi) Sketch an illustrative example of v).

vii) Show that, still with u given by iv),

$$\operatorname{sing\,supp}(u) \subset \{(t,x);\ \exists\ (t',x') \in \operatorname{sing\,supp}(f) \text{ with} \\ t \ge t' \text{ and } t + x = t' + x' \text{ or } t - x = t' - x'\}.$$

viii) Bound $\mathrm{WF}(u)$ in terms of $\mathrm{WF}(f)$.

Problem 63. A little uniqueness theorems. Suppose $u \in \mathcal{C}_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ recall that the Fourier transform $\hat{u} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Now, suppose $u \in \mathcal{C}_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ satisfies $P(D)u = 0$ for some non-trivial polynomial P, show that $u = 0$.

Problem 64. Work out the elementary behavior of the heat equation.

i) Show that the function on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, for $n \ge 1$,

$$F(t,x) = \begin{cases} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

is measurable, bounded on the any set $\{|(t,x)| \ge R\}$ and is integrable on $\{|(t,x)| \le R\}$ for any $R > 0$.

ii) Conclude that F defines a tempered distibution on $\mathbb{R}^{n+1}$.
iii) Show that F is $\mathcal{C}^\infty$ outside the origin.
iv) Show that F satisfies the heat equation

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j})F(t,x) = 0 \text{ in } (t,x) \neq 0.$$

v) Show that F satisfies

$$F(s^2t, sx) = s^{-n}F(t,x) \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{11.13}$$

where the left hand side is defined by duality "$F(s^2t, sx) = F_s$" where

$$F_s(\phi) = s^{-n-2}F(\phi_{1/s}),\ \phi_{1/s}(t,x) = \phi(\frac{t}{s^2}, \frac{x}{s}).$$

vi) Conclude that

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j})F(t,x) = G(t,x)$$

where $G(t,x)$ satisfies

$$G(s^2t, sx) = s^{-n-2}G(t,x) \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{11.14}$$

in the same sense as above and has support at most $\{0\}$.
vii) Hence deduce that

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j})F(t,x) = c\delta(t)\delta(x) \tag{11.15}$$

for some real constant c.

Hint: Check which distributions with support at $(0,0)$ satisfy (11.14).

viii) If $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^{n+1})$ show that $u = F \star \psi$ satisfies

$$u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ and} \tag{11.16}$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ t\in[-S,S]} (1+|x|)^N |D^\alpha u(t,x)| < \infty\ \forall\ S > 0, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1},\ N.$$

ix) Supposing that u satisfies (11.16) and is a real-valued solution of

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j})u(t,x) = 0$$

in $\mathbb{R}^{n+1}$, show that

$$v(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u^2(t,x)$$

is a non-increasing function of t.

Hint: Multiply the equation by u and integrate over a slab $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n$.

x) Show that c in (11.15) is non-zero by arriving at a contradiction from the assumption that it is zero. Namely, show that if $c = 0$ then u in viii) satisfies the conditions of ix) and also vanishes in $t < T$ for some T (depending on ψ). Conclude that $u = 0$ for all ψ. Using properties of convolution show that this in turn implies that $F = 0$ which is a contradiction.

xi) So, finally, we know that $E = \frac{1}{c}F$ is a fundamental solution of the heat operator which vanishes in $t < 0$. Explain why this allows us to show that for any $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ there is a solution of

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2)u = \psi,\ u = 0 \text{ in } t < T \text{ for some } T. \tag{11.17}$$

What is the largest value of T for which this holds?

xii) Can you give a heuristic, or indeed a rigorous, explanation of why

$$c = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{|x|^2}{4})dx?$$

xiii) Explain why the argument we used for the wave equation to show that there is *only one* solution, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, of (11.17) does not apply here. (Indeed such uniqueness does not hold without some growth assumption on u.)

Problem 65. (Poisson summation formula) As in class, let $L \subset \mathbb{R}^n$ be an integral lattice of the form

$$L = \left\{ v = \sum_{j=1}^n k_j v_j,\ k_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

where the v_j form a basis of $\mathbb{R}^n$ and using the dual basis w_j (so $w_j \cdot v_i = \delta_{ij}$ is 0 or 1 as $i \neq j$ or $i = j$) set

$$L^\circ = \left\{ w = 2\pi \sum_{j=1}^n k_j w_j,\ k_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Recall that we defined

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}_L) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n); u(z+v) = u(z)\ \forall\ z \in \mathbb{R}^n,\ v \in L\}. \tag{11.18}$$

i) Show that summation over shifts by lattice points:

$$A_L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto A_L f(z) = \sum_{v \in L} f(z - v) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}_L). \tag{11.19}$$

defines a map into smooth periodic functions.

ii) Show that there exists $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that $A_L f \equiv 1$ is the costant function on $\mathbb{R}^n$.

iii) Show that the map (11.19) is surjective. Hint: Well obviously enough use the f in part ii) and show that if u is periodic then $A_L(uf) = u$.

iv) Show that the infinite sum

$$F = \sum_{v \in L} \delta(\cdot - v) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \tag{11.20}$$

does indeed define a tempered distribution and that F is L-periodic and satisfies $\exp(iw \cdot z)F(z) = F(z)$ for each $w \in L^\circ$ with equality in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

v) Deduce that $\hat{F}$, the Fourier transform of F, is L° periodic, conclude that it is of the form

$$\hat{F}(\xi) = c \sum_{w \in L^\circ} \delta(\xi - w) \tag{11.21}$$

vi) Compute the constant c.

vii) Show that $A_L(f) = F \star f$.

viii) Using this, or otherwise, show that $A_L(f) = 0$ in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}_L)$ if and only if $\hat{f} = 0$ on L°.

Problem 66. For a measurable set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, with non-zero measure, set $H = L^2(\Omega)$ and let $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ be the algebra of bounded linear operators on the Hilbert space H with the norm on $\mathcal{B}$ being

$$\|B\|_{\mathcal{B}} = \sup\{\|Bf\|_H; f \in H, \ \|f\|_H = 1\}. \tag{11.22}$$

i) Show that $\mathcal{B}$ is complete with respect to this norm. Hint (probably not necessary!) For a Cauchy sequence $\{B_n\}$ observe that $B_n f$ is Cauchy for each $f \in H$.

ii) If $V \subset H$ is a finite-dimensional subspace and $W \subset H$ is a closed subspace with a finite-dimensional complement (that is $W + U = H$ for some finite-dimensional subspace U) show that there is a closed subspace $Y \subset W$ with finite-dimensional complement (in H) such that $V \perp Y$, that is $\langle v, y \rangle = 0$ for all $v \in V$ and $y \in Y$.

iii) If $A \in \mathcal{B}$ has finite rank (meaning AH is a finite-dimensional vector space) show that there is a finite-dimensional space $V \subset H$ such that $AV \subset V$ and $AV^\perp = \{0\}$ where

$$V^\perp = \{f \in H; \langle f, v\rangle = 0 \ \forall \ v \in V\}.$$

Hint: Set $R = AH$, a finite dimensional subspace by hypothesis. Let N be the null space of A, show that $N^\perp$ is finite dimensional. Try $V = R + N^\perp$.

iv) If $A \in \mathcal{B}$ has finite rank, show that $(\mathrm{Id} - zA)^{-1}$ exists for all but a finite set of $\lambda \in \mathbb{C}$ (just quote some matrix theory). What might it mean to say in this case that $(\mathrm{Id} - zA)^{-1}$ is meromorphic in z? (No marks for this second part).

v) Recall that $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$ is the algebra of compact operators, defined as the closure of the space of finite rank operators. Show that $\mathcal{K}$ is an ideal in $\mathcal{B}$.

vi) If $A \in \mathcal{K}$ show that

$$\mathrm{Id} + A = (\mathrm{Id} + B)(\mathrm{Id} + A')$$

where $B \in \mathcal{K}$, $(\mathrm{Id} + B)^{-1}$ exists and A' has finite rank. Hint: Use the invertibility of $\mathrm{Id} + B$ when $\|B\|_{\mathcal{B}} < 1$ proved in class.

vii) Conclude that if $A \in \mathcal{K}$ then

$$\{f \in H; (\mathrm{Id} + A)f = 0\} \text{ and } \big((\mathrm{Id} + A)H\big)^\perp \text{ are finite dimensional.}$$

Problem 67. [Separable Hilbert spaces]

i) (Gramm-Schmidt Lemma). Let $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ be a sequence in a Hilbert space H. Let $V_j \subset H$ be the span of the first j elements and set $N_j = \dim V_j$. Show that there is an orthonormal sequence $e_1, \ldots, e_j$ (finite if N_j is bounded above) such that V_j is the span of the first N_j elements. Hint: Proceed by induction over N such that the result is true for all j with $N_j < N$. So, consider what happens for a value of j with $N_j = N_{j-1} + 1$ and add element $e_{N_j} \in V_j$ which is orthogonal to all the previous e_k's.

ii) A Hilbert space is separable if it has a countable dense subset (sometimes people say Hilbert space when they mean separable Hilbert space). Show that every separable Hilbert space has a complete orthonormal sequence, that is a sequence $\{e_j\}$ such that $\langle u, e_j\rangle = 0$ for all j implies $u = 0$.

iii) Let $\{e_j\}$ an orthonormal sequence in a Hilbert space, show that for any $a_j \in \mathbb{C}$,

$$\|\sum_{j=1}^{N} a_j e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |a_j|^2.$$

iv) (Bessel's inequality) Show that if e_j is an orthormal sequence in a Hilbert space and $u \in H$ then

$$\|\sum_{j=1}^{N} \langle u, e_j\rangle e_j\|^2 \le \|u\|^2$$

and conclude (assuming the sequence of e_j's to be infinite) that the series

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j\rangle e_j$$

converges in H.

v) Show that if e_j is a complete orthonormal basis in a separable Hilbert space then, for each $u \in H$,

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j\rangle e_j.$$

Problem 68. [Compactness] Let's agree that a compact set in a metric space is one for which every open cover has a finite subcover. You may use the compactness of closed bounded sets in a finite dimensional vector space.

i) Show that a compact subset of a Hilbert space is closed and bounded.

ii) If e_j is a complete orthonormal subspace of a separable Hilbert space and K is compact show that given $\epsilon > 0$ there exists N such that

$$\sum_{j\ge N} |\langle u, e_j\rangle|^2 \le \epsilon \ \forall\ u \in K. \tag{11.23}$$

iii) Conversely show that any closed bounded set in a separable Hilbert space for which (11.23) holds for some orthonormal basis is indeed compact.

iv) Show directly that any sequence in a compact set in a Hilbert space has a convergent subsequence.

v) Show that a subspace of H which has a precompact unit ball must be finite dimensional.

vi) Use the existence of a complete orthonormal basis to show that any bounded sequence $\{u_j\}$, $\|u_j\| \le C$, has a weakly convergent subsequence, meaning that $\langle v, u_j\rangle$ converges in $\mathbb{C}$ along the subsequence for each $v \in H$. Show that the subsequnce can be chosen so that $\langle e_k, u_j\rangle$ converges for each k, where e_k is the complete orthonormal sequence.

Problem 69. [Spectral theorem, compact case] Recall that a bounded operator A on a Hilbert space H is compact if $A\{\|u\| \le 1\}$ is precompact (has compact closure). Throughout this problem A will be a compact operator on a separable Hilbert space, H.

i) Show that if $0 \ne \lambda \in \mathbb{C}$ then

$$E_\lambda = \{u \in H; Au = \lambda u\}.$$

is finite dimensional.

ii) If A is self-adjoint show that all eigenvalues (meaning $E_\lambda \ne \{0\}$) are real and that different eigenspaces are orthogonal.

iii) Show that $\alpha_A = \sup\{|\langle Au, u\rangle|^2\}; \|u\| = 1\}$ is attained. Hint: Choose a sequence such that $|\langle Au_j, u_j\rangle|^2$ tends to the supremum, pass to a weakly convergent sequence as discussed above and then using the compactness to a furhter subsequence such that Au_j converges.

iv) If v is such a maximum point and $f \perp v$ show that $\langle Av, f\rangle + \langle Af, v\rangle = 0$.

v) If A is also self-adjoint and u is a maximum point as in iii) deduce that $Au = \lambda u$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$ and that $\lambda = \pm\alpha$.

vi) Still assuming A to be self-adjoint, deduce that there is a finite-dimensional subspace $M \subset H$, the sum of eigenspaces with eigenvalues $\pm\alpha$, containing all the maximum points.

vii) Continuing vi) show that A restricts to a self-adjoint bounded operator on the Hilbert space $M^\perp$ and that the supremum in iii) for this new operator is smaller.

viii) Deduce that for any compact self-adjoint operator on a separable Hilbert space there is a complete orthonormal basis of eigenvectors. Hint: Be careful about the null space – it could be big.

Problem 70. Show that a (complex-valued) square-integrable function $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ is continuous in the mean, in the sense that

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \sup |y| < \epsilon \int |u(x+y) = u(x)|^2 dx = 0. \tag{11.24}$$

Hint: Show that it is enough to prove this for non-negative functions and then that it suffices to prove it for non-negative simple functions and finally that it is enough to check it for the characteristic function of an open set of finite measure. Then use Problem 57 to show that it is true in this case.

Problem 71. [Ascoli-Arzela] Recall the proof of the theorem of Ascoli and Arzela, that a subset of $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^n)$ is precompact (with respect to the supremum norm) if and only if it is equicontinuous and equi-small at infinity, i.e. given $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for all elements $u \in B$

(11.25)
$$|y| < \delta \Longrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x+y) = u(x)| < \epsilon \text{ and } |x| > 1/\delta \Longrightarrow |u(x)| < \epsilon.$$

Problem 72. [Compactness of sets in $L^2(\mathbb{R}^n)$.] Show that a subset $B \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ is *precompact* in $L^2(\mathbb{R}^n)$ if and only if it satisfies the following two conditions:

i) (Equi-continuity in the mean) For each $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+y) - u(x)|^2 dx < \epsilon \;\forall\; |y| < \delta,\; u \in B. \tag{11.26}$$

ii) (Equi-smallness at infinity) For each $\epsilon > 0$ there exists R such that

$$\int_{|x|>R|} |u|^2 dx < \epsilon \;\forall\; u \in B. \tag{11.27}$$

Hint: Problem 70 shows that (11.26) holds for each $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$; check that (11.27) also holds for each function. Then use a covering argument to prove that both these conditions must hold for a compact subset of $L^2(\mathbb{R})$ and hence for a precompact set. One method to prove the converse is to show that if (11.26) and (11.27) hold then B is bounded and to use this to extract a weakly convergent sequence from any given sequence in B. Next show that (11.26) is equivalent to (11.27) for the set $\mathcal{F}(B)$, the image of B under the Fourier transform. Show, possibly using Problem 71, that if χ_R is cut-off to a ball of radius R then $\chi_R\mathcal{G}(\chi_R\hat{u}_n)$ converges strongly if u_n converges weakly. Deduce from this that the weakly convergent subsequence in fact converges strongly so $\bar{B}$ is sequently compact, and hence is compact.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] G.B. Folland, *Real analysis*, Wiley, 1984.

[2] F. G. Friedlander, *Introduction to the theory of distributions*, segunda edición, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Con material adicional de M. Joshi. MR 2000g:46002.

[3] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équatons aux d´eriv´ees partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris, 1932.

[4] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, *vol.* 3, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Nueva York, Tokyo, 1985.

[5] W. Rudin, *Real and complex analysis*, tercera edición, McGraw-Hill, 1987.

[6] George F. Simmons, *Introduction to topology and modern analysis*, Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, Fla., 1983, reimpresión de la edición original de 1963. MR 84b:54002