Apuntes de
TOPOLOGÍA GENERAL

2001

Índice

0

INTRODUCCIÓN

0.1 Espacio topológico.

0.2 Base de una topología.

0.3 Espacios seudométricos y métricos.

0.4 Sub-base de una topología.

0.5 Aplicación continua y homeomorfismo.

0.1 Espacio topológico

Definición 0.1 Un espacio topológico es un par (X, T) formado por un conjunto X y una familia T de subconjuntos de X tal que:

1. $X \in T, \quad \emptyset \in T$
2. $\forall\, G, G' \in T$ es $G \bigcap G' \in T$
3. $\forall\, \{G_i\}_{i \in I} \subset T$ es $\bigcup\limits_{i \in I} G_i \in T$

Si (X, T) es un espacio topológico, a T se le llama *topología* en X y a los elementos de T se los denomina *abiertos* de (X, T).

Observación 0.1 Sean X un conjunto y $\mathcal{M} = \{M_i \subset X,\, i \in I\}$. Es claro que $\forall\, J \subset I$ es $\bigcup\limits_{i \in J} M_i = \{x \in X \,|\, \exists\, i \in J \,|\, x \in M_i\}$. Asimismo $\bigcap\limits_{i \in J} M_i = \{x \in X \,|\, x \in M_i \,\forall\, i \in J\}$; por otra parte, si $J = \emptyset$ es $\bigcup\limits_{i \in \emptyset} M_i = \emptyset$ y $\bigcap\limits_{i \in \emptyset} M_i = X$.

Así se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 0.1 Sean X un conjunto y $T = \{G_i \subset X,\, i \in I\}$ entonces

$$T \text{ es una topología en } X \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{a) } \forall\, J \subset I \quad \bigcup\limits_{i \in J} G_i \in T \\ \text{b) } \forall\, F \subset I \text{ finito } \bigcap\limits_{i \in F} G_i \in T \end{cases}$$

Dado un conjunto X, una topología T en X es un subconjunto de $\wp(X)$, es decir, $T \subset \wp(X)$. Todas las topologías posibles en un conjunto X constituyen un conjunto

$$\tau(X) = \{T \subset \wp(X) \,|\, T \text{ es topología en } X\} \subset \wp(\wp(X)).$$

El par $(\tau(X), \subset)$, donde " $\subset$ " es la relación de inclusión, constituye un conjunto ordenado con primer y último elemento. Si $T, T' \in \tau(X)$ y $T \subset T'$ se dice que " T es menos *fina* que T' " o que " T' es más *fina* que T." El primer elemento de $(\tau(X), \subset)$ es la denominada *topología trivial* en X y se denota por $T_t = \{X, \emptyset\}$. El último elemento de $(\tau(X), \subset)$ se llama *topología discreta* en X y se denota por $T_D = \wp(X)$. $\forall\, T \in \tau(X)$ es $T_t \subset T \subset T_D$.
En general, $(\tau(X), \subset)$ no es un conjunto totalmente ordenado; en efecto, si X

es un conjunto con más de un elemento, es decir, $|X| \geq 2$ entonces $\exists\, a, b \in X$ con $a \neq b$. Sean las familias $T_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ y $T_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$; es claro que $T_1, T_2 \in \tau(X)$ pero $T_1 \not\subset T_2$ y $T_2 \not\subset T_1$, es decir, existen topologías en X que no son comparables, luego el orden no es total.

0.2 Base de una topología

Definición 0.2 Sea (X, T) un espacio topológico; se dice que la familia $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I} \subset \wp(X)$ es una base de T si cumple:

1. $\mathcal{B} \subset T$
2. $\forall\, G \in T \quad \exists\, J \subset I \quad | \quad G = \bigcup\limits_{i \in J} B_i$

Proposición 0.2 Dado un espacio topológico (X, T) y una familia $\mathcal{B} \subset \wp(X)$ se tiene que

$$\mathcal{B} \text{ es base de } T \iff \begin{cases} 1)\ \mathcal{B} \subset T \\ 2)\ \forall\, G \in T,\ \forall\, x \in G\ \exists\, B_x \in \mathcal{B} \,|\, x \in B_x \subset G \end{cases}$$

Ejemplo 0.1 Dado un conjunto X y dada una familia $\mathcal{B} \subset \wp(X)$, en general, no siempre existe una topología T en X tal que $\mathcal{B}$ es base de T.
$X = \mathbb{R} \qquad \mathcal{B} = \{(\leftarrow, 1), (0, \rightarrow)\}$ Si existiera T topología en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}$ es base de T entonces $\mathcal{B} \subset T \implies (\leftarrow, 1) \in T$ y $(0, \rightarrow) \in T$ de donde $(\leftarrow, 1) \bigcap (0, \rightarrow) = (0, 1) \in T$ lo cual es absurdo, pues el intervalo (0,1) no puede expresarse como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Proposición 0.3 Sean X un conjunto y $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I} \subset \wp(X)$
$\exists\, T$ topología en X tal que $\mathcal{B}$ es base de $T \iff$

1. $X = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$
2. $\forall\, i, j \in I,\ \forall\, x \in B_i \bigcap B_j \quad \exists\, k \in I$ tal que $x \in B_k \subset B_i \bigcap B_j$

Demostración:
"$\implies$"
$\exists\, T$ topología en X tal que $\mathcal{B}$ es base de T; como $X \in T, \quad \forall\, x \in X$
$\exists\, i_x \in I \,|\, x \in B_{i_x} \subset X \implies X = \bigcup\limits_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in X} B_{i_x} \subset \bigcup\limits_{i \in I} B_i \subset X \implies$
$X = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$. Además, $\forall\, i, j \in I$ como $\mathcal{B} \subset T$, se tiene que $B_i \bigcap B_j \in T \implies$
$\forall\, x \in B_i \bigcap B_j \quad \exists\, k \in I \,|\, x \in B_k \subset B_i \bigcap B_j$.

“ $\Longleftarrow$ ”

Sea $T = T(\mathcal{B}) = \{\bigcup_{i\in J} B_i \,|\, J \in \wp(I)\}$; veamos que $T = T(\mathcal{B})$ es topología en X y que $\mathcal{B}$ es base de $T(\mathcal{B})$.

1. $I \in \wp(I) \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} B_i = X \in T(\mathcal{B})$
   $\emptyset \in \wp(I) \Longrightarrow \bigcup_{i\in\emptyset} B_i = \emptyset \in T(\mathcal{B})$.

2. Sea $\{G_k\}_{k\in K} \subset T(\mathcal{B}) \Longrightarrow \forall\, k \in K\, \exists\, J_k \subset I$ tal que $G_k = \bigcup_{i\in J_k} B_i \Longrightarrow$

$$\bigcup_{k\in K} G_k = \bigcup_{k\in K}\left(\bigcup_{i\in J_k} B_i\right) = \bigcup_{i\in \bigcup_{k\in K} J_k} B_i \text{ donde } \bigcup_{k\in K} J_k \in \wp(I)$$

   y por tanto $\bigcup_{k\in K} G_k \in T(\mathcal{B})$.

3. Sean $G, G' \in T(\mathcal{B}) \Longrightarrow \exists\, J \subset I$ y $\exists\, J' \subset I$ tales que $G = \bigcup_{i\in J} B_i$ y $G' = \bigcup_{j\in J'} B_j \Longrightarrow$

$$G\bigcap G' = \left(\bigcup_{i\in J} B_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in J'} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in J\\ j\in J'}} (B_i \bigcap B_j);$$

   Ahora bien, $\forall\, i \in J, \forall\, j \in J'$ y $\forall\, x \in B_i \bigcap B_j \quad \exists\, k_{ij}^x \in I$ tal que $x \in B_{k_{ij}^x} \subset B_i \bigcap B_j \Longrightarrow$

$$B_i \bigcap B_j = \bigcup_{x\in B_i\bigcap B_j} B_{k_{ij}^x} = B_{ij} \in T(\mathcal{B}) \Longrightarrow G\bigcap G' = \bigcup_{\substack{i\in J\\ j\in J'}} B_{ij} \in T(\mathcal{B}).$$

Veamos finalmente que $\mathcal{B}$ es base de $T(\mathcal{B})$.

1. $\forall\, i \in I$, $\{i\} \in \wp(I) \Longrightarrow \bigcup_{j\in\{i\}} B_j = B_i \in T(\mathcal{B})$, luego $\mathcal{B} \subset T(\mathcal{B})$.

2. Sea $G \in T(\mathcal{B}) \Longrightarrow \exists\, J \subset I \,|\, G = \bigcup_{i\in J} B_i$; por tanto, $\forall\, x \in G\, \exists\, i_x \in J \subset I$ tal que $x \in B_{i_x} \subset G$.

Además, si se cumplen 1. y 2. existe una única topología en X tal que $\mathcal{B}$ es base suya, y ésta es la topología menos fina de todas las topologías en X

que contienen a $\mathcal{B}$. En efecto, se ha visto que $T(\mathcal{B})$ es una topología en X tal que $\mathcal{B}$ es base de $T(\mathcal{B})$; veamos que es la única topología en X que tiene a $\mathcal{B}$ por base; sea T' una topología en X tal que $\mathcal{B}$ es base de T', veamos que $T' = T(\mathcal{B})$. Sea $G \in T'$; como $\mathcal{B}$ es base de T', $\forall\, x \in G\, \exists\, i_x \in I\,|$ $x \in B_{i_x} \subset G \Longrightarrow G = \bigcup\limits_{x\in G} B_{i_x} \in T(\mathcal{B})$ puesto que $\mathcal{B} \subset T(\mathcal{B})$ y $T(\mathcal{B})$ es topología en X. Sea ahora $G \in T(\mathcal{B}) \Longrightarrow \exists\, J \subset I\,|\,G = \bigcup\limits_{i\in J} B_i$; como $\mathcal{B} \subset T'$ y T' es topología en X se tiene que $G \in T'$ como queríamos demostrar. Finalmente, veamos que $T(\mathcal{B})$ es la topología en X menos fina de todas las que contienen a $\mathcal{B}$; sea T' una topología en $X\,|\,\mathcal{B} \subset T'$, y sea $G \in T(\mathcal{B}) \Longrightarrow \exists\, J \subset I\,|\,G = \bigcup\limits_{i\in J} B_i$. Como $\forall\, i \in J,\ B_i \in \mathcal{B} \subset T'$, y como T' es topología en X se tiene que $G \in T'$, luego $T(\mathcal{B}) \subset T'$ c.q.d.

Definición 0.3 Sean X un conjunto y $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I} \subset \wp(X)$; diremos que $\mathcal{B}$ es *base de topología* en X si se cumplen:

1. $X = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$

2. $\forall\, i, j \in I,\ \forall\, x \in B_i \bigcap B_j,\ \exists\, k \in I\,|\,x \in B_k \subset B_i \bigcap B_j$

Definición 0.4 Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de topología en X; diremos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son equivalentes, lo cual se denota por $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si se cumple que $T(\mathcal{B}) = T(\mathcal{B}')$

Proposición 0.4 Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases de topología en X.

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \Longleftrightarrow \begin{array}{l} 1)\ \forall\, B \in \mathcal{B}\, \forall\, x \in B,\ \exists\, B' \in \mathcal{B}'\,|\,x \in B' \subset B \\ 2)\ \forall\, B' \in \mathcal{B}'\, \forall\, x \in B',\ \exists\, B \in \mathcal{B}\,|\,x \in B \subset B' \end{array}$$

Demostración:
"$\Longrightarrow$"
$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \Longleftrightarrow T(\mathcal{B}) = T(\mathcal{B}')$, por tanto, si $B \in \mathcal{B} \subset T(\mathcal{B}) = T(\mathcal{B}') \Longrightarrow$ $\forall\, x \in B,\ \exists\, B' \in \mathcal{B}'\,|\,x \in B' \subset B$, ya que $\mathcal{B}'$ es base de $T(\mathcal{B}')$; análogamente, si $B' \in \mathcal{B}' \subset T(\mathcal{B}') = T(\mathcal{B}) \Longrightarrow \forall\, x \in B'\, \exists\, B \in \mathcal{B}\,|\,x \in B \subset B'$ ya que $\mathcal{B}$ es base de $T(\mathcal{B})$.
"$\Longleftarrow$"
Sea $G \in T(\mathcal{B})$ y sea $x \in G \Longrightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}\,|\,x \in B \subset G$, ya que $\mathcal{B}$ es base de $T(\mathcal{B})$. Ahora bien, por 1) $\exists\, B' \in \mathcal{B}'\,|\,x \in B' \subset B \subset G$ y como $\mathcal{B}' \subset T(\mathcal{B}')$ y $T(\mathcal{B}')$ es topología en X, se tiene que $G \in T(\mathcal{B}')$. Análogamente se prueba que si $G \in T(\mathcal{B}')$ entonces $G \in T(\mathcal{B})$; en definitiva, $T(\mathcal{B}) = T(\mathcal{B}') \Longleftrightarrow \mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$, c.q.d.

0.3 Espacios seudométricos y métricos (Fréchet, 1906)

Definición 0.5 Un espacio seudométrico es un par (X, d) donde X es un conjunto y
$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación que cumple:

1. $\forall\, x, y \in X$, es $d(x, y) \geq 0$
2. $\forall\, x \in X$ es $d(x, x) = 0$
3. $\forall\, x, y \in X$ es $d(x, y) = d(y, x)$
4. $\forall\, x, y, z \in X$ es $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

A la aplicación d se le denomina *seudométrica* en X.

Definición 0.6 Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto y d es una seudométrica en X tal que $\forall\, x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.

Proposición 0.5 Sea (X, d) un espacio seudométrico, $\forall\, x \in X$, $\forall\, \varepsilon > 0$, ($\varepsilon \in \mathbb{R}^+$) sea
$B^d_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ (*bola abierta centrada en el punto x y de radio ε*), y sea la familia $\mathcal{B}_d = \{B^d_\varepsilon(x) \mid x \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$, veamos que $\mathcal{B}_d$ es base de topología en X.

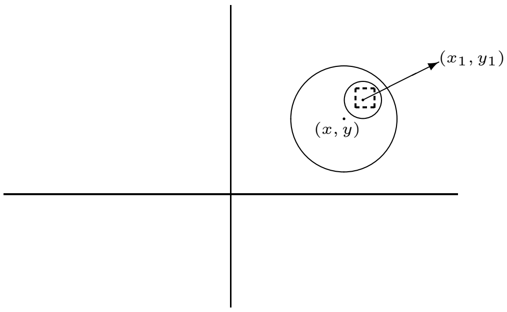
Demostración:

1. $\forall\, x \in X, \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad B^d_\varepsilon \subset X \Longrightarrow$
$$\bigcup_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \\ x \in X}} B^d_\varepsilon(x) \subset X$$
Sea $x \in X$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ $x \in B^d_\varepsilon(x)$ ya que $d(x, x) = 0 < \varepsilon$, por tanto,
$$X = \bigcup_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \\ x \in X}} B^d_\varepsilon(x)$$

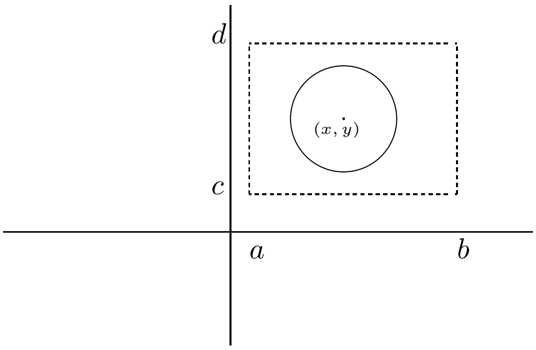
2. Sean $x, y \in X$, $\varepsilon, \rho \in \mathbb{R}^+$ y sea $z \in B^d_\varepsilon(x) \bigcap B^d_\rho(y)$; como $d(x, z) < \varepsilon$ y $d(y, z) < \rho$ consideremos $\delta = \min\{\varepsilon - d(x, z), \rho - d(y, z)\}$ y veamos que $z \in B^d_\delta(z) \subset B^d_\varepsilon(x) \bigcap B^d_\rho(y)$; sea $t \in B^d_\delta(z)$ entonces
$d(t, x) \leq d(t, z) + d(z, x) < \delta + d(z, x) \leq \varepsilon - d(x, z) + d(z, x) = \varepsilon \Longrightarrow t \in B^d_\varepsilon(x)$; por otra parte, $d(t, y) \leq d(t, z) + d(z, y) < \delta + d(z, y) \leq \rho - d(y, z) + d(z, y) = \rho \Longrightarrow t \in B^d_\rho(y)$ c.q.d.

Así, $T_d = T(\mathcal{B}_d) = \{G \subset X \,|\, \forall\, x \in G,\, \exists\, \varepsilon > 0,\, \exists\, y \in X,\, x \in B^d_\varepsilon(y) \subset G\} = \{G \subset X \,|\, \forall\, x\, \exists\, \delta > 0,\, x \in B^d_\delta(x) \subset G\}$ es la topología asociada a la seudométrica d. $\quad (\delta = \varepsilon - d(x, y))$

Ejemplo 0.2 Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, T^2_u)$ y las familias $\mathcal{B} = \{B^d_\varepsilon((x, y)) \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ donde d es la métrica euclídea, y $\mathcal{B}' = \{(a, b) \times (c, d) \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R},\, a < b,\, c < d\}$; pues bien, se tiene que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de la topología usual T^2_u y además $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$.
En efecto, veamos que $T(\mathcal{B}) = T(\mathcal{B}')$. Sea un abierto básico de $\mathcal{B}$, $B^d_\varepsilon((x, y))$, donde $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son arbitrarios, y sea $(x_1, y_1) \in B^d_\varepsilon((x, y))$; como $B^d_\varepsilon((x, y)) \in \mathcal{B} \subset T(\mathcal{B}) \Longrightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0 \,|\, (x_1, y_1) \in B^d_{\varepsilon_1}((x_1, y_1)) \subset B^d_\varepsilon((x, y))$



Sean $a = x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1, \quad b = x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1, \quad c = y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1, \quad d = y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1$
entonces $(x_1, y_1) \in (a, b) \times (c, d) \subset B^d_{\varepsilon_1}((x_1, y_1)) \subset B^d_\varepsilon((x, y))$; en efecto, $a < x_1 < b$ y $c < y_1 < d$; además, si $(z_1, z_2) \in (a, b) \times (c, d) \Longrightarrow$ $x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1 < z_1 < x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1$ y $y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1 < z_2 < y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1$, y por tanto, $d^{\,2}((z_1, z_2), (x_1, y_1)) = (z_1 - x_1)^2 + (z_2 - y_1)^2 < \frac{\varepsilon_1^2}{2} + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \Longleftrightarrow$ $d((z_1, z_2), (x_1, y_1)) < \varepsilon_1$, luego $(z_1, z_2) \in B^d_{\varepsilon_1}((x_1, y_1)) \subset B^d_\varepsilon((x, y))$ y así $T(\mathcal{B}) \subset T(\mathcal{B}')$.
Veamos ahora que $T(\mathcal{B}') \subset T(\mathcal{B})$. Sea $(a, b) \times (c, d) \in \mathcal{B}'$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ verifican $a < b$ y $c < d$; sea $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ y consideremos $\varepsilon = \min\{d - y, y - c, x - a, b - x\}$ entonces $(x, y) \in B^d_\varepsilon((x, y)) \subset (a, b) \times (c, d)$;



En efecto, sea $(x', y') \in B^d_\varepsilon((x, y))$, veamos que $(x', y') \in (a, b) \times (c, d)$; se tiene que

$$|x' - x|^2 \leq |x' - x|^2 + |y' - y|^2 = d^{\,2}((x, y), (x', y')) < \varepsilon^2 \Longrightarrow |x' - x| < \varepsilon$$

y análogamente se deduce que $|y' - y| < \varepsilon$, luego $|x' - x| < \varepsilon \leq x - a \Longrightarrow a - x < x' - x < x - a \Longrightarrow a < x'$ y por otra parte
$|x'-x| < \varepsilon \leq b-x \Longrightarrow x-b < x'-x < b-x \Longrightarrow x' < b$; por tanto, $a < x' < b$. Igualmente, $|y' - y| < \varepsilon \leq y - c \Longrightarrow c - y < y' - y < y - c \Longrightarrow c < y'$ y $|y' - y| < \varepsilon \leq d - y \Longrightarrow y - d < y' - y < d - y \Longrightarrow y' < d$ y así $c < y' < d$, luego $(x', y') \in (a, b) \times (c, d)$, lo cual implica que $B^d_\varepsilon((x, y)) \subset (a, b) \times (c, d)$ y como consecuencia $T(\mathcal{B}') \subset T(\mathcal{B})$ c.q.d.

0.4 Sub-base de una topología

Definición 0.7 Sea (X, T) un espacio topológico y sea $\Sigma = \{S_i\}_{i \in I} \subset \wp(X)$; se dice que Σ es una sub-base de T si $\mathcal{B}(\Sigma) = \left\{ \bigcap\limits_{i \in F} S_i \,|\, F \subset I \text{ es finito} \right\}$ es una base de T.

Observación 0.2 Si Σ es sub-base de $T \Longrightarrow \Sigma \subset \mathcal{B}(\Sigma) \subset T$.

Ejemplo 0.3 En el espacio topológico $(\mathbb{R}, T_u)$ la familia
$\Sigma_u = \{(\leftarrow, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(y, \rightarrow) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$ es sub-base de T_u.
Se tiene que $\mathcal{B}(\Sigma_u) = \{\mathbb{R}\} \bigcup \{\emptyset\} \bigcup \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}, \text{ con } x < y\} \bigcup \Sigma_u$ es base de T_u; téngase en cuenta que si $F = \emptyset \subset I$ entonces $\bigcap\limits_{i \in \emptyset} S_i = \mathbb{R}$.

Proposición 0.6 Sea X un conjunto y $\Sigma = \{S_i\}_{i \in I} \subset \wp(X)$; existe una única topología en X, que designaremos por $T(\Sigma)$, tal que Σ es sub-base de $T(\Sigma)$. A esta topología se le denomina topología generada por Σ; además $T(\Sigma)$ es la topología menos fina de todas las topologías en X que contienen a Σ.

Demostración:

Consideremos $\mathcal{B}(\Sigma) = \left\{ \bigcap_{i \in F} S_i \,|\, F \in \wp_{\mathcal{F}}(I) \right\}$; veamos que $\mathcal{B}(\Sigma)$ es base de topología en X.

1. Es claro que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}(\Sigma)} B \subset X$; ahora, $\emptyset \in \wp_{\mathcal{F}}(I) \Longrightarrow$
   $\bigcap_{i \in \emptyset} S_i = X \in \mathcal{B}(\Sigma) \Longrightarrow X \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}(\Sigma)} B$ y así $\bigcup_{B \in \mathcal{B}(\Sigma)} B = X$

2. Sean $B, B' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ y sea $x \in B \bigcap B'$, veamos que $\exists\, B'' \in \mathcal{B}(\Sigma) \,|\, x \in B'' \subset B \bigcap B'$; como $B, B' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ se tiene que $\exists\, F, F' \in \wp_{\mathcal{F}}(I)$ tales que

   $$B = \bigcap_{i \in F} S_i \text{ y } B' = \bigcap_{i \in F'} S_i \Longrightarrow B \bigcap B' = \left(\bigcap_{i \in F} S_i \right) \bigcap \left(\bigcap_{i \in F'} S_i \right) = \bigcap_{i \in F \bigcup F'} S_i$$

   donde $F \bigcup F' \in \wp_{\mathcal{F}}(I)$, (partes finitas de I), y por tanto,
   $B \bigcap B' \in \mathcal{B}(\Sigma) \Longrightarrow \exists\, B'' = B \bigcap B' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ tal que $x \in B'' \subset B \bigcap B'$.
   Sea entonces $T(\Sigma) = T(\mathcal{B}(\Sigma))$; como $T(\mathcal{B}(\Sigma))$ es la única topología en X de la cuál $\mathcal{B}(\Sigma)$ es base, es claro que $T(\mathcal{B}(\Sigma))$ es la única topología en X de la cuál Σ es sub-base.

Finalmente, si T es una topología en X tal que $\Sigma \subset T \Longrightarrow T(\Sigma) \subset T$; en efecto, sea $G \in T(\Sigma)$, $\forall\, x \in G$, $\exists\, B \in \mathcal{B}(\Sigma) \,|\, x \in B \subset G \Longrightarrow \exists\, F \in \wp_{\mathcal{F}}(I) \,|\, B = \bigcap_{i \in F} S_i$; pero como $\forall\, i \in F$ es $S_i \in \Sigma \subset T \Longrightarrow B \in T$ y por tanto, $G \in T$.

Observación 0.3

$$T(\Sigma) = \left\{ \bigcup_{F \in \mathcal{J}} \left(\bigcap_{i \in F} S_i \right) \,|\, \mathcal{J} \subset \wp_{\mathcal{F}}(I) \right\}$$

0.5 Aplicación continua y homeomorfismo

Definición 0.8 Sean (X, T) y (X', T') espacios topológicos y $f : X \longrightarrow X'$ una aplicación; se dice que la aplicación $f : (X, T) \longrightarrow (X', T')$ es continua si $\forall\, G' \in T'$ es $f^{-1}(G') \in T$

El siguiente resultado será útil en los capítulos posteriores:

Proposición 0.7 Sean $(X, T), (X', T')$ espacios topológicos,Σ'una sub-base de T' y $f : X \longrightarrow X'$ una aplicación; entonces:
$f : (X, T) \longrightarrow (X', T')$ es continua $\Longleftrightarrow \forall\, S' \in \Sigma'$ es $f^{-1}(S') \in T$

Demostración:
" $\Longrightarrow$ "
Evidente, puesto que $\Sigma' \subset T'$
" $\Longleftarrow$ "
Si $\Sigma' = \{S'_i\}_{i\in I} \subset \wp(X')$, como Σ' es sub-base de T', $\forall\, G' \in T'$,
$\exists\, \mathcal{J} \subset \wp_{\mathcal{F}}(I), |\, G' = \bigcup\limits_{F\in\mathcal{J}} \left(\bigcap\limits_{i\in F} S'_i \right) \Longrightarrow f^{-1}(G') = f^{-1}\left(\bigcup\limits_{F\in\mathcal{J}} \left(\bigcap\limits_{i\in F} S'_i \right)\right) = \bigcup\limits_{F\in\mathcal{J}} \left(\bigcap\limits_{i\in F} f^{-1}(S'_i)\right)$; ahora bien, $\forall\, i \in F$, es $f^{-1}(S'_i) \in T$, y como $F \subset I$ es finito se tiene que $\forall\, F \in \mathcal{J}$ es $\bigcap\limits_{i\in F} f^{-1}(S'_i) \in T \Longrightarrow f^{-1}(G') \in T$ c.q.d.

Definición 0.9 Sean $(X, T), (X', T')$ espacios topológicos, y $f : X \longrightarrow X'$ una aplicación; se dice que $f : (X, T) \longrightarrow (X', T')$ es un *homeomorfismo* si f es biyectiva y tanto $f : (X, T) \longrightarrow (X', T')$ como su inversa
$f^{-1} : (X', T') \longrightarrow (X, T)$ son aplicaciones continuas. Se dice que el espacio topológico (X, T) es *homeomórfico* u *homeomorfo* a (X', T') lo cual se denota por $(X, T) \approx (X', T')$ si existe un homeomorfismo $f : (X, T) \longrightarrow (X', T')$.

Proposición 0.8 La relación binaria " $\approx$ " (homeomórfico a) es una relación de equivalencia.

Demostración:

1. Reflexiva: $(X, T) \approx (X, T)$ ya que $1_X : (X, T) \longrightarrow (X, T)$ es homeomorfismo
2. Simétrica: $(X, T) \approx (X', T') \Longrightarrow \exists\, f : (X, T) \longrightarrow (X', T')$ homeomorfismo $\Longrightarrow f^{-1} : (X', T') \longrightarrow (X, T)$ es homeomorfismo
$\Longrightarrow (X', T') \approx (X, T)$

3. Transitiva: $(X,T) \approx (X',T')$ y $(X',T') \approx (X'',T'') \Longrightarrow$
   $\exists\, f : (X,T) \longrightarrow (X',T')$ homeomorfismo y $\exists\, g : (X',T') \longrightarrow (X'',T'')$ homeomorfismo $\Longrightarrow g \circ f : (X,T) \longrightarrow (X'',T'')$ es homeomorfismo $\Longrightarrow$ $(X,T) \approx (X'',T'')$

Observación 0.4 La composición de aplicaciones continuas entre espacios topológicos es una aplicación continua.

1

TOPOLOGÍAS INICIALES

1.1 Definición. Caracterizaciones. Casos particulares

Observación 1.1 Sean X un conjunto, $\{(X_i, T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, y
$\forall\, i \in I \quad f_i : X \longrightarrow X_i$ una aplicación. Si tomamos en X la topología discreta $T_D = \wp(X)$ se tiene que $\forall\, i \in I \quad f_i : (X, T_D) \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua; esta observación pone de manifiesto que existe alguna topología en X que hace continuas a todas las aplicaciones f_i; pues bien, a la topología menos fina de entre todas ellas se la denomina *topología inicial* en X para la familia de aplicaciones dada.

Definición 1.1 Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F} = \{(f_i, (X_i, T_i))\}_{i\in I}$ donde
$\forall\, i \in I \quad f_i : X \longrightarrow X_i$ es una aplicación; se llama *topología inicial* en X para la familia $\mathcal{F}$, y se denota por $T_{\mathcal{F}}$, a la topología que tiene por sub-base $\Sigma_{\mathcal{F}} = \{f_i^{-1}(G_i) \,|\, G_i \in T_i,\, i \in I\}$
Teniendo en cuenta que si $i_0 \in I$ y $G^1_{i_0}, \dots, G^p_{i_0} \in T_{i_0}$, entonces
$f_{i_0}^{-1}(G^1_{i_0}) \bigcap \cdots \bigcap f_{i_0}^{-1}(G^p_{i_0}) = f_{i_0}^{-1}(G^1_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap G^p_{i_0})$ donde $G^1_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap G^p_{i_0} \in T_{i_0}$, resulta que $\mathcal{B}(\Sigma_{\mathcal{F}}) = \mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \left\{ \bigcap\limits_{i\in F} f_i^{-1}(G_i) \,|\, F \in \wp_{\mathcal{F}}(I),\, G_i \in T_i \,\forall\, i \in I \right\}$ y así
$T_{\mathcal{F}} = T(\Sigma_{\mathcal{F}}) = \{G \subset X \,|\, \forall\, x \in G\, \exists\, F \in \wp_{\mathcal{F}}(I),\, \forall\, i \in F,\, \exists\, G_i \in T_i$ con $x \in \bigcap\limits_{i\in F} f_i^{-1}(G_i) \subset G\}$

Proposición 1.1 Sea X un conjunto, $\mathcal{F} = \{(f_i, (X_i, T_i))\}_{i\in I}$ con
$f_i : X \longrightarrow X_i$ aplicación $\forall\, i \in I$ y T una topología en X, entonces

$$T = T_{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\, \forall\, i \in I\, f_i : (X, T) \longrightarrow (X_i, T_i) \text{ es continua} \\ 2)\, \forall\, T' \text{ topología en } X \text{ tal que } \forall\, i \in I \text{ es} \\ f_i : (X, T') \longrightarrow (X_i, T_i) \text{ continua} \Longrightarrow T \subset T' \end{cases}$$

Demostración:
"$\Longrightarrow$"
Sean $i \in I$ y $G_i \in T_i$ y veamos que $f_i^{-1}(G_i) \in T$; ahora bien,
$f_i^{-1}(G_i) \in \Sigma_{\mathcal{F}} \subset T_{\mathcal{F}} = T$, luego $\forall\, i \in I, \quad f_i : (X, T) \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua.
Sea ahora T' una topología en X tal que $\forall\, i \in I$, es $f_i : (X, T') \longrightarrow (X_i, T_i)$ continua, y veamos que $T \subset T'$; sea $G \in T = T_{\mathcal{F}}$, entonces $\forall\, x \in G$,
$\exists\, F \in \wp_{\mathcal{F}}(I) \,|\, \forall\, i \in F, \exists\, G_i \in T_i$ con $x \in \bigcap\limits_{i\in F} f_i^{-1}(G_i) \subset G$. Pero $\forall\, i \in F$, es $f_i^{-1}(G_i) \in T'$ y puesto que $F \subset I$ es finito se tiene $\bigcap\limits_{i\in F} f_i^{-1}(G_i) \in T'$ y así $G \in T'$ c.q.d.

" $\Longleftarrow$ "
$T_{\mathcal{F}}$ es una topología en X tal que $\forall\, i \in I, f_i : (X, T_{\mathcal{F}}) \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua, luego por 2) $T \subset T_{\mathcal{F}}$. Veamos que $T_{\mathcal{F}} \subset T$. Sea $G \in T_{\mathcal{F}} \Longrightarrow$ $\forall x \in G \,\exists\, F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I), \forall\, i \in F \,\exists\, G_i \in T_i$ con $x \in \bigcap\limits_{i\in F} f_i^{-1}(G_i) \subset G$. Por 1), $\forall\, i \in F$, $f_i^{-1}(G_i) \in T$, luego como $F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$, es $\bigcap\limits_{i\in F} f_i^{-1}(G_i) \in T$, y por tanto, $G \in T$ c. q. d.

Proposición 1.2 Sean X un conjunto, $\mathcal{F} = \{(f_i, (X_i, T_i))\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos donde $\forall\, i \in I$ es $f_i : X \longrightarrow X_i$ una aplicación, y sea T una topología en X, entonces:

$$T = T_{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall\,(X', T') \text{ espacio topológico}, \forall\, g : X' \longrightarrow X \text{ aplicación, es} \\ g : (X', T') \longrightarrow (X, T) \text{ continua } \Leftrightarrow f_i \circ g : (X', T') \longrightarrow (X_i, T_i) \\ \text{es continua } \forall\, i \in I \end{array} \right\}$$

Demostración:
" $\Longrightarrow$ "
" $\Rightarrow$ " Si $g : (X', T') \longrightarrow (X, T)$ es continua, como por hipótesis $T = T_{\mathcal{F}}$ es $\forall\, i \in I$, $f_i : (X, T) \longrightarrow (X_i, T_i)$ continua, y así $\forall\, i \in I$, $f_i \circ g : (X', T') \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua.
" $\Leftarrow$ "
Para probar que $g : (X', T') \longrightarrow (X, T)$ es continua, al ser $T = T_{\mathcal{F}}$ es suficiente probar que dado un abierto sub-básico arbitrario de $\Sigma_{\mathcal{F}}$, su imagen inversa por g es abierto en T'; sean, pues, $i \in I$, $G_i \in T_i$; es $f_i^{-1}(G_i) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$, y es claro que $g^{-1}(f_i^{-1}(G_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(G_i) \in T'$, ya que $f_i \circ g : (X', T') \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua por hipótesis.
" $\Longleftarrow$ "
Tomemos el espacio topológico $(X', T') = (X, T)$ y la aplicación identidad en X, es decir, $g = 1_X$; es $g = 1_X : (X, T) \longrightarrow (X, T)$ continua, luego por hipótesis $\forall\, i \in I$, $f_i \circ g = f_i \circ 1_X = f_i : (X, T) \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua, y así $T \subset T_{\mathcal{F}}$. Consideremos ahora el espacio topológico $(X', T') = (X, T_{\mathcal{F}})$ y la aplicación $g = 1_X$; $\forall\, i \in I$, $f_i \circ g = f_i \circ 1_X = f_i : (X, T_{\mathcal{F}}) \longrightarrow (X_i, T_i)$ es continua, luego por hipótesis $1_X : (X, T_{\mathcal{F}}) \longrightarrow (X, T)$ es continua de donde $T \subset T_{\mathcal{F}}$; en definitiva, $T = T_{\mathcal{F}}$

Proposición 1.3 Sea X un conjunto y $\mathcal{F} = \{(f_i, (X_i, T_i))\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos donde $\forall\, i \in I$ es $f_i : X \longrightarrow X_i$ una aplicación; sea $\forall\, i \in I$, Σ_i una sub-base de T_i, entonces $\Sigma'_{\mathcal{F}} = \{f_i^{-1}(S_i) \,|\, i \in I, S_i \in \Sigma_i\}$ es una sub-base de $T_{\mathcal{F}}$.

Demostración:
$\forall\, i \in I$, $\Sigma_i \subset T_i \Longrightarrow \Sigma'_{\mathcal{F}} \subset \Sigma_{\mathcal{F}} \subset T_{\mathcal{F}}$. Sea $G \in T_{\mathcal{F}}$ y sea $x \in G \Longrightarrow$

$\exists\, F \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(I)$ y $\forall\, i \in F\, \exists\, G_i \in T_i \,|\, x \in \bigcap\limits_{i\in F} f_i^{-1}(G_i) \subset G \Longrightarrow \forall\, i \in F$, $f_i(x) \in G_i \in T_i \Longrightarrow \forall\, i \in F\, \exists\, S_i^{j_1}, \dots, S_i^{j_{p_i}} \in \Sigma_i$ tales que $f_i(x) \in \bigcap\limits_{k=1}^{p_i} S_i^{j_k} \subset G_i$, y por tanto $x \in \bigcap\limits_{i\in F} \left(\bigcap\limits_{k=1}^{p_i} f_i^{-1}(S_i^{j_k}) \right) \subset \bigcap\limits_{i\in F} f_i^{-1}(G_i) \subset G$ donde los $f_i^{-1}(S_i^{j_k}) \in \Sigma'_{\mathcal{F}}$, donde F es finito y $\forall\, i \in F\, \{1, \dots, p_i\}$ es finito, por lo que $\bigcap\limits_{i\in F} \left(\bigcap\limits_{k=1}^{p_i} f_i^{-1}(S_i^{j_k}) \right) \in \mathcal{B}(\Sigma'_{\mathcal{F}})$ c. q. d.