Capítulo 1

Conceptos Básicos

1.1 Conjuntos

La definición formal de *conjunto* es bastante técnica y delicada. Los grandes pensadores de la matemática y de la lógica han llevado nuestro concepto intuitivo de conjunto a todo un mamotreto teórico, que, si bien es necesario para fundamentar sólidamente a la matemática, está lleno de conflictos lógico-filosóficos de los cuales no nos ocuparemos. Para una introducción más detallada a la teoría de conjuntos y lógica, el lector interesado, podría consultar [8] o bien el clásico [5].

Para nuestros fines bastará que el lector use la noción de conjunto que todos llevamos intuitivamente grabada en la mente: una colección de objetos, definidos quizás por alguna propiedad. La notación para conjuntos que usaremos es la canónica: letras mayúsculas para indicar conjuntos y si el conjunto esta definido por alguna propiedad, digamos P, la notación será: $\{x : P\}$ (léase el conjunto de las x's tales que P).

A los objetos que constituyen un conjunto los llamaremos *elementos* del conjunto y la relación de pertenencia la denotamos en la forma usual: si A es un conjunto y x es un elemento de A, escribiremos $x \in A$. Del mismo modo, si x no es un elemento del conjunto A, escribiremos $x \notin A$. Un conjunto muy importante es el conjunto sin elementos, llamado el *conjunto vacío* y que será denotado por $\emptyset$.

Veamos algunos ejemplos de conjuntos:

a) El conjunto de figuras del póker $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

b) El conjunto de números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

c) El conjunto de números enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

d) El conjunto de números primos

$$\{p \in \mathbb{N} : p \text{ es un número primo}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}.$$

La relación de pertenencia nos permite comparar conjuntos: si A y B son conjuntos diremos que A es un *subconjunto* de B si cada elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B. Note, por ejemplo, que cada conjunto es subconjunto de si mismo y que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto. El símbolo $\subset$ será el que usemos para denotar la relación de contención: $A \subset B$ se lee A es un subconjunto de B (o bien, B *contiene* a A).

La negación: A no está contenido en B (¿que quiere decir esto?) será denotada por $A \not\subseteq B$ y cuando A esté contenido en B pero existan elementos de B que no están en A (i.e., A es un *subconjunto propio* de B) escribiremos $A \subsetneqq B$.

Al poder comparar conjuntos vía la contención, tenemos una manera de decidir si dos conjuntos son iguales o no:

Definición 1.1.1 *Si A y B son conjuntos, decimos que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.*

Observe que, en particular, la definición 1.1.1 muestra que hay un único conjunto vacío. Otro ejemplo interesante de conjunto, es el siguiente.

Definición 1.1.2 *Si X es un conjunto definimos el* conjunto potencia *de X, denotado por 2^X o $\mathcal{P}(X)$, como:*

$$\{A : A \text{ es conjunto y } A \subset X\}$$

Por ejemplo si X es un conjunto con tres elementos, digamos, $X = \{a, b, c\}$ entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Definición 1.1.3 (Operaciones básicas de conjuntos) *Sea X un conjunto y sean A y B subconjuntos de X,*

a) $A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ y } x \in B\}$ *(intersección de A con B)*

b) $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ o } x \in B\}$ *(unión de A con B)*

c) $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ y } x \notin B\}$ *(complemento de B en A)*

d) $X \setminus A = \{x \in X : x \in X \text{ y } x \notin A\}$ *(complemento de A)*

e) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *(diferencia simétrica entre A y B).*

Al conjunto $X \setminus A$, cuando es claro qué es X se le denota como $A^c = X \setminus A$. Algunas propiedades sencillas de las operaciones de conjuntos se listan en la siguiente proposición, se deja al lector comprobarlas como una buena práctica de la definición 1.1.1. En algunos incisos es útil hacer una representación gráfica usando los famosos diagramas de Venn[1].

Proposición 1.1.4 *Sea X un conjunto y A, B, C subconjuntos de X entonces*

a) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ *(idempotencia)*

b) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ *(conmutatividad)*

c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(asociatividad)*

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributividad)*

e) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

[1] John Venn, 1834-1923.

f) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ *(Leyes de De Morgan*[2]*)*

Las leyes de De Morgan también se pueden escribir de una manera más compacta como

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Las operaciones de conjuntos se pueden extender a familias arbitrarias de conjuntos. Si J denota un conjunto de índices y $\{A_j : j \in J\}$ es una familia de subconjuntos de un conjunto X (intuitivamente pensaríamos que tenemos tantos conjuntos A's como elementos tiene el conjunto J) entonces

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \in X : x \in A_j \text{ para alguna } j \in J\},$$
$$\bigcap_{j \in J} A_j = \{x \in X : x \in A_j \text{ para toda } j \in J\}.$$

Usando los cuantificadores lógicos cuya notación tradicional es $\forall$ y $\exists$, las operaciones de unión e intersección se pueden escribir del siguiente modo

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \in X : (\exists j \in J)\, x \in A_j\},$$
$$\bigcap_{j \in J} A_j = \{x \in X : (\forall j \in J)\, x \in A_j\}.$$

En el ejercicio 1.3 se pide demostrar una versión general de las leyes de De Morgan a partir de la definición anterior de unión e intersección arbitrarias de una familia de conjuntos.

Concluimos esta sección con una operación más de conjuntos, el *producto cartesiano*:

Definición 1.1.5 *Si A y B son conjuntos, el* producto cartesiano *de A con B, $A \times B$, es el conjunto de parejas ordenadas $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$, dónde cada pareja ordenada (a, b) se define a su vez como el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.*

[2] Augustus De Morgan, 1806-1871.

La definición conjuntista de pareja ordenada dada arriba permite, entre otras cosas, mostrar que dos parejas ordenadas (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Algunas propiedades útiles del producto cartesiano relacionadas con las operaciones básicas de conjuntos se listan en los ejercicios.

1.2 Funciones

Sin duda una de las nociones más importantes de la matemática y, en general, del pensamiento humano, es el concepto de *función*. La misma definición intuitiva, como la de una regla de correspondencia entre dos conjuntos, digamos, A y B, que asigna a cada elemento del conjunto A, un y sólo un elemento del conjunto B, ofrece inmediatamente una lista innumerable de ejemplos (no damos alguno para recreo del lector).

La definición formal de función reza como sigue:

Definición 1.2.1 *Un subconjunto $f \subset A \times B$ es una* función *si siempre que $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$ entonces $b = b'$. Alternativamente, se dice que f es una* función *de A en B si f es una regla de correspondencia que asocia a* cada *elemento de A uno y sólo uno de B.*

Usaremos la notación y la terminología usual para funciones, $f : A \to B$, denotará a la función f de A en B. $f(a)$ será el elemento de B asociado por f al elemento a. A f se le llama la *regla de correspondencia* de la función, mientras que a A se le llama el *dominio* y a B el *codominio* de la función respectivamente. Note que, por definición, *a fortiori* para cada a en A debe haber un $f(a)$ mientras que si b está en B entonces b no necesariamente es de la forma $f(a)$ para alguna a en A.

A continuación daremos algunos ejemplos de funciones.

Ejemplo 1.2.2 Sea $f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$, dada por $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = c$. Aunque el dominio sea un conjunto bastante simple, f es una función. Por otro lado, $g : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$, dada por $g(a) = a$, $g(a) = b$, $g(b) = c$, $g(c) = b$ *no* es una función pues al elemento a se le asocian dos elementos del contradominio

Ejemplo 1.2.3 Si A y B son conjuntos y $b_0 \in B$, $f : A \to B$ dada por $f(a) = b_0$ para todo $a \in A$ es una función, la llamada función *constante*.

Ejemplo 1.2.4 Si A es un conjunto, $id_A : A \to A$, y definimos $id_A(a) = a$ para todo $a \in A$, obtenemos la llamada función *identidad* en A.

Ejemplo 1.2.5 $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(a) = \{a\}$ es una función.

Ciertamente las funciones que hallamos en nuestros cursos de cálculo (polinomios, funciones trigonométricas, logaritmos, exponenciales, etc.) son ejemplos de funciones: las funciones reales de variable real.

Definición 1.2.6 *Sea $f : A \to B$ una función*

a) *Al subconjunto de B,* $\mathrm{Im}(f) = \{b \in B : b = f(a)$ *para alguna* $a \in A\}$*, se le llama la* imagen *de A bajo f o simplemente el* rango *de f. Si $C \subset A$ entonces $f(C) = \{f(c) : c \in C\}$ es la* imagen *de C bajo f.*

b) *Sea $D \subset B$. Al subconjunto de A, $f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$, se la llama la* imagen inversa *de D bajo f.*

La notación para la imagen inversa es un poco desafortunada porque puede confundirse con la función inversa de f o bien, pensar que $f^{-1}(b)$ es $1/f(b)$. Aquí $f^{-1}(D)$ *siempre* denotará un *subconjunto* del dominio de la función, como ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.2.7 Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$, entonces el rango de f es $f([-1, 1]) = f([0, 1]) = [0, 1]$, $f^{-1}(1/4) = \{-1/2, 1/2\}$, $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $f^{-1}((-\infty, -1)) = \emptyset$.

Ejemplo 1.2.8 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$. Entonces, $\mathrm{Im}(g) = \{(\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$. Geométricamente, este conjunto es la circunferencia de radio 1 en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.2.9 En el ejemplo del inciso anterior $g^{-1}((0, 1)) = \{\pi/2 + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ y si S es el arco superior de la circunferencia que une los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Entonces,

$$g^{-1}(S) = \cdots [-3\pi, -4\pi] \cup [-\pi, -2\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \cdots$$

Definición 1.2.10 *Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que*

a) f *es* inyectiva *o* uno a uno *si siempre que a, a' en A son tales que $a \neq a'$ entonces $f(a) \neq f(a')$, es decir, puntos distintos del dominio A van, bajo f, a puntos distintos del codominio B.*

b) f *es* suprayectiva *o* sobre *si* $\mathrm{Im}(f) = B$. *Equivalentemente, para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.*

c) f *es* biyectiva *si es inyectiva y suprayectiva.*

d) *si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones entonces la* composición *de f seguida de g es la función $g \circ f : A \to C$ dada por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.*

Recordemos que la función identidad en un conjunto A es la función $id_A : A \to A$ tal que $id_A(x) = x$. Tenemos la siguiente proposición que se da sin demostración.

Proposición 1.2.11 *Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Entonces existe una única función $g : B \to A$ tal que*

a) $f \circ g = id_B$,

b) $g \circ f = id_A$.

A esta función se le llama la función inversa de f y se denota por $f^{-1} = g$.

En el ejercicio 1.12 se pide demostrar que tanto la función identidad como la función inversa, son funciones biyectivas.

Una observación que será de utilidad en nuestro estudio posterior de cardinalidad es el hecho de que la relación "estar biyectado con" es una relación de equivalencia entre conjuntos: $A \sim B$ si y sólo si existe $f : A \to B$ biyectiva. Recordemos que $\sim$ sea de equivalencia quiere decir que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Proposición 1.2.12 *La relación $A \sim B$ es de equivalencia.*

Demostración

Vamos a de mostrar que la relación

a) es reflexiva: $A \sim A$ para todo conjunto A,

b) es simétrica: si $A \sim B$ entonces $B \sim A$ y

c) es transitiva: si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.

Demostremos cada una de las condiciones.

a) Queremos encontrar una biyección $f : A \to A$. Escogemos $f = id_A$. Es fácil ver que id_A es una biyección. Ver ejercicio 1.12.

b) Supongamos que $A \sim B$. Queremos demostrar que $B \sim A$. Sabemos que existe una biyección $f : A \to B$. Dado que f es biyectiva f^{-1} es biyectivo. Por lo tanto $f^{-1} : B \to A$ y esto implica $B \sim A$.

c) Supongamos que $A \sim B$ y $B \sim C$. Sabemos que existen dos funciones biyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Notemos que $g \circ f$ es una función $g \circ f : A \to C$ nos haría falta demostrar que $g \circ f$ es biyectiva.

Primero demostraremos inyectividad. Sean $a \neq a\,'$ elementos de A por la inyectividad de f se tiene que $f(a) \neq f\left(a'\right)$ y por la inyectividad de g, se cumple $g(f(a)) \neq g(f(a))$. Esto implica $g \circ f(a) \neq g \circ f\left(a'\right)$ y por lo tanto $g \circ f$ es inyectiva.

Finalmente demostraremos la suprayectividad. Sea $c \in C$ por la suprayectividad de g, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$ y, por la suprayectividad de f, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Por lo tanto, con esta $a \in A$, se tiene que $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Concluimos que $g \circ f$ es suprayectiva.

Esto termina la demostración. ■

Siempre que se tiene una relación de equivalencia en un conjunto o familia $\mathcal{F}$, (la familia de conjuntos en nuestro caso) ésta induce una *partición* de la familia en *clases de* *equivalencia*, es decir, si $[A] = \{B \in \mathcal{F} : B \sim A\}$ es la clase de equivalencia del conjunto A, entonces $[A] \neq \emptyset$, para toda A. Además se tiene

a) si A, B están en $\mathcal{F}$ entonces $[A] = [B]$ ó $[A] \cap [B] = \emptyset$, y

b) $\mathcal{F} = \bigcup\{[A] : A \in \mathcal{F}\}$.

1.3 Los números naturales

Quizás el conjunto de números con el que estamos más familiarizados es el conjunto de los *números naturales*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

Es, a fin de cuentas, el conjunto de números que usamos para contar. Los números naturales se definen en forma axiomática vía los llamados *axiomas de Peano*[3]. Aquí no presentaremos con detalle la axiomatización de Peano y asumiremos sin mayor justificación que tenemos una operación de suma $(+)$ entre naturales y la relación de orden usual $(\leq)$. Sin embargo, uno de los axiomas de Peano que si debemos considerar es el archiconocido *Principio de Inducción Matemática*.

El lector seguramente ha tenido oportunidad de "hacer pruebas por inducción" y recordará que este es el argumento que se usa por excelencia cuando uno quiere demostrar que cierta fórmula o propiedad se satisface para todos los números naturales. El enunciado del axioma o principio de inducción es como sigue:

Teorema 1.3.1 (Primer Principio de Inducción) *Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:*

a) $1 \in S$,

b) *Si $k \in S$ entonces $k + 1 \in S$.*

Entonces $S = \mathbb{N}$

[3]Giuseppe Peano, 1858-1932.

Ejemplo 1.3.2 El ejemplo clásico para ilustrar el uso del principio de inducción es la fórmula de Gauss[4] para calcular la suma de los primeros m números naturales

$$1+2+3+\cdots+m-1+m=\frac{m(m+1)}{2}$$

en efecto, sea

$$S=\left\{m\in\mathbb{N}:1+2+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2}\right\}.$$

Claramente $1\in S$ porque $1=\frac{1(2)}{2}$. Si suponemos que $k\in S$, es decir, $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, entonces debemos probar que $k+1\in S$. Pero

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Luego, $k+1\in S$ y por lo tanto $S=\mathbb{N}$.

No siempre es necesario demostrar una propiedad de los números naturales por inducción: la fórmula de Gauss también puede demostrarse haciendo

$$\begin{aligned}S&=1+2+\cdots+n,\\ S&=n+n-1+\cdots+1,\end{aligned}$$

sumando término a término da,

$$2S=(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1),\qquad (n\text{ sumandos})$$

Luego $S=n(n+1)/2$. La historia cuenta que este fue el argumento que descubrió Gauss a los 7 años cuando fue "invitado" por su maestro a sumar los primeros 100 números naturales.

Ejemplo 1.3.3 (Desigualdad de Bernoulli) [5] Si $x>-1$ entonces

$$(1+x)^n\geq 1+nx\qquad\text{para todo}\qquad n\in\mathbb{N}.$$

[4]Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855.

[5]Jacob Bernoulli, 1654-1705.

Solución

Nuevamente sea $S = \{n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx\}$. Note que $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$, luego $1 \in S$. Por otro lado si $k \in S$, es decir, $(1+x)^k \geq 1 + kx$, entonces

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k &\geq (1+x)(1+kx)\\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x\end{aligned}$$

de donde por el principio de inducción se concluye que $S = \mathbb{N}$, es decir, la fórmula es válida para todo número natural. ❦

Ejemplo 1.3.4 (Proceder inductivamente) La frase *proceder inductivamente* aparecerá a menudo en secciones subsecuentes y merece un apartado especial porque es una frase que evita a quién escribe abundar en detalles formales en algún argumento. Esencialmente se refiere a lo siguiente: para tratar de exhibir algún conjunto X cuyos elementos tengan alguna propiedad P, en ocasiones es necesario dar el conjunto paso a paso: damos un elemento x_1 que goce la propiedad P y decimos como a partir de x_1 se obtiene un siguiente elemento x_2 que también tenga la propiedad P.

Habiendo construido $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con la propiedad P, decimos como construir un siguiente elemento x_{n+1} también con la propiedad P y así sucesivamente. Este argumento permite obtener para cada $n \in nat$ un elemento x_n con la propiedad P.

Existen dos maneras alternativas de formular el principio de inducción. En el teorema 1.3.7 se demostrará que los tres principios son equivalentes. Esto es, bastaría tener uno de los tres para tener los tres teoremas.

Teorema 1.3.5 (Segundo Principio de Inducción) *Sea $S \subset \mathbb{N}$ y supongamos que,*

a) $1 \in S$

b) *Si* $\{1, 2, \ldots, k\} \subset S$ *entonces* $k + 1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Teorema 1.3.6 (Principio del Buen Orden) *Si $S \subset \mathbb{N}$ y $S \neq \emptyset$ entonces S tiene un* primer elemento*; es decir, existe un elemento $m \in S$ tal que $m \leq n$ para toda $n \in S$.*

Teorema 1.3.7 *Los siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *El Principio del Buen Orden (PBO)*

b) *El Primer Principio de Inducción (PPI)*

c) *El Segundo Principio de Inducción (SPI)*

Demostración

a) $\Longrightarrow$ *b)* Para probar que el PBO implica el PPI sea $S \subset \mathbb{N}$ tal que satisface las hipótesis del PPI. Veamos que $S = \mathbb{N}$. Procedemos por reducción al absurdo y suponemos que $S \subsetneqq \mathbb{N}$ entonces $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$. Luego por el PBO $\mathbb{N} \setminus S$ tiene un primer elemento, digamos m. Observemos que $m \neq 1$ porque $1 \in S$. También, $m - 1 \in S$ porque m es el primer elemento de $\mathbb{N} \setminus S$. Pero por la segunda hipótesis del PPI, $m \in S$, lo cual contradice que $m \in \mathbb{N} \setminus S$. Así, $S = \mathbb{N}$.

b) $\Longrightarrow$ *c)* Claramente el PPI implica el SPI ya que si S es como en el SPI entonces $k \in \{1, 2, \ldots, k\} \subset S$ luego $S = \mathbb{N}$.

c) $\Longrightarrow$ *a)* Finalmente, supongamos cierto el SPI y sea $S \subset \mathbb{N}$ no vacío. Si S no tiene un primer elemento, entonces $1 \notin S$ de donde $1 \in \mathbb{N} \setminus S$. Si $\{1, \ldots, k\} \subset \mathbb{N} \setminus S$ entonces $k + 1 \in \mathbb{N} \setminus S$ de lo contrario, $k + 1$ sería un primer elemento de S. Entonces, por el SPI $\mathbb{N} \setminus S = \mathbb{N}$ de donde $S = \emptyset$, lo cual contradice que $S \neq \emptyset$. Luego S tiene un primer elemento. ■

EJERCICIOS

✎ **1.1** Si A, B son conjuntos cualesquiera demostrar que

a) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

✎ **1.2** Demostrar que $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B^c = \emptyset$.

✎ **1.3** Sea X un conjunto cualquiera y $\mathcal{J}$ un conjunto de índices. Si A_j es un subconjunto de X para cada $j \in \mathcal{J}$, demuestre que,

$$X \setminus \left(\bigcap_{j \in \mathcal{J}} A_j \right) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} (X \setminus A_j),$$

y

$$X \setminus \left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j \right) = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} (X \setminus A_j).$$

✎ **1.4** Si B_1, B_2 son subconjuntos de B tales que $B = B_1 \cup B_2$, compruebe que $A \times B = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$.

✎ **1.5** Determine si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas (dé un contraejemplo o una demostración, según sea el caso, para justificar sus aseveraciones). f, g son funciones, A, B son subconjuntos del dominio de f, C y D subconjuntos del co-dominio de f.

a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

b) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$,

c) $f(AUB) = f(A)Uf(B)$.

d) Existe una función g tal que $(g \circ f)(x) = x$ para toda $x \in \mathrm{Dom}(f)$ si y sólo si f es inyectiva.

✎ **1.6** Sea $f : X \to Y$. Demostrar las siguientes propiedades de la imagen inversa.

a) Si $A \subset Y$ entonces $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$.

b) Sea $D \subset Y$. Entonces $f^{-1}(D) = \emptyset$ si y sólo si $D \cap \mathrm{Im}(f) = \emptyset$.

c) Sea $D \subset Y$. Entonces $f^{-1}(D) = X$ si y sólo si $\mathrm{Im}(f) \subset D$.

✎ **1.7** Sea $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{J}$ un conjunto de índices. Si A_j es un subconjunto de Y para cada $j \in \mathcal{J}$, demuestre que se cumple

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j\right) = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} f^{-1}\left(A_j\right),$$

y

$$f^{-1}\left(\bigcap_{j\in\mathcal{J}} A_j\right) = \bigcap_{j\in\mathcal{J}} f^{-1}\left(A_j\right).$$

✎ **1.8** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 - 1$. Sea $\mathcal{J} = (0, \infty)$. Para cada $j \in \mathcal{J}$ se define el conjunto

$$A_j = [0, j)$$

a) Calcular, para cada $j \in \mathcal{J}$, el conjunto $f^{-1}\left(A_j\right)$.

b) Encontrar $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} A_j$ y $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} f^{-1}\left(A_j\right)$.

c) Verificar que se cumple $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in\mathcal{J}} A_j\right) = \bigcap_{j\in\mathcal{J}} f^{-1}\left(A_j\right)$.

✎ **1.9** Calcule $f^{-1}(0)$ para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^6 - 14t^4 + 49t^2 - 36$ y $T^{-1}(0)$ para $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y, x + y)$.

✎ **1.10** Si $f : A \to B$ es tal que para todo $b \in B$, $f^{-1}(\{b\})$ tiene a lo más un punto ¿será f inyectiva?

✎ **1.11** Demuestre que si $f : X \to Y$ es una función inyectiva y $A \subset X$ entonces $f^{-1}(f(A)) = A$. Demuestre también que si f es suprayectiva y $B \subset Y$ entonces $f(f^{-1}(B)) = B$ ¿Son ciertas las proposiciones si se omiten las hipótesis de inyectividad y suprayectividad respectivamente?

✎ **1.12** Demostrar que la función identidad y la función inversa son biyectivas.

✎ **1.13** Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función dada por $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$. Demostrar que f es biyectiva.

✎ **1.14** Use el Principio de Inducción para probar la siguiente variante del Principio de Inducción: Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que para alguna $n_0 \in \mathbb{N}$ se cumple:

a) $n_0 \in S$,

b) si $k \geq n_0$ y $k \in S$ entonces $k + 1 \in S$.

Entonces S contiene al conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$.

✎ **1.15** Practique la inducción,

a) Compruebe que $n^3 + 5n$ es divisible entre 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestra que $2^n < n!$ si $n \geq 4$.

c) Conjeture una fórmula para la suma de los primeros n números naturales impares y demuéstrela por inducción.

d) Demuestre que para toda $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

1.4 Los números enteros y los números racionales

Una vez que tenemos el conjunto de números naturales, una simple construcción formal (ver, por ejemplo [6, Capítulos 6 y 8]) permite construir a partir de $\mathbb{N}$ a los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

y de éstos a los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$$

Observe que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ y que desde el punto de vista algebraico, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son estructuras distintas, por ejemplo, mientras que, tanto en $\mathbb{Z}$ como en $\mathbb{Q}$, cada elemento tiene un "negativo", en $\mathbb{Z}$ hay elementos que no tienen "inverso multiplicativo" mientras que en $\mathbb{Q}$ todo racional distinto de cero lo tiene ($1/7$ es inverso multiplicativo de 7). El nombre técnico que el Algebra Moderna provee para estructuras como $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ es *dominio entero* y *campo* respectivamente. Para estudiar propiedades aritméticas de los números racionales y más adelante de los números reales, damos a continuación los axiomas que definen a un campo, el lector podrá notar que efectivamente con la idea intuitiva que se tiene de los números racionales, éstos forman un campo.

Definición 1.4.1 *Un* campo *es un conjunto no vacío, $\mathcal{C}$, en el cual se definen dos operaciones aritméticas,*

$$\oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \quad y \quad \odot : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C},$$

llamadas suma *y* producto *respectivamente, que satisfacen las siguientes propiedades:*

a) *Propiedades de la Suma:*

i. $a \oplus b = b \oplus a$ *para todas* $a, b \in \mathcal{C}$ *(conmutatividad).*

ii. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ *para todas* $a, b, c \in \mathcal{C}$ *(asociatividad).*

iii. Existe un elemento en $\mathcal{C}$, denotado por 0*, tal que* $a \oplus 0 = a$ *para todo* $a \in \mathcal{C}$ *(neutro aditivo).*

iv. Para toda $a \in \mathcal{C}$ *existe* $b \in \mathcal{C}$ *tal que* $a \oplus b = 0$ *(inverso aditivo).*

b) *Propiedades del Producto:*

i. $a \odot b = b \odot a$ *para todas* $a, b \in \mathcal{C}$ *(conmutatividad).*

ii. $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ *para todas* $a, b, c \in \mathcal{C}$ *(asociatividad).*

iii. Existe un elemento en $\mathcal{C}$, denotado por 1*, tal que* $1 \neq 0$ *y* $a \odot 1 = a$ *para todo* $a \in \mathcal{C}$ *(neutro multiplicativo).*

iv. Para toda $a \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ *existe* $c \in \mathcal{C}$ *tal que* $a \odot c = 1$ *(inverso multiplicativo).*

c) *Propiedades Conjuntas:*

i. $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$ *para todas* $a, b, c \in \mathcal{C}$ *(distributividad).*

De la definición de campo se puede demostrar fácilmente que tanto el inverso aditivo como el inverso multiplicativo son únicos. Por ejemplo, si quisiéramos comprobar que el inverso aditivo es único, supongamos que para $a \in \mathcal{C}$ existen b y b' en $\mathcal{C}$ tales que $a \oplus b = 0$ y $a \oplus b' = 0$. Entonces,

$$b = b \oplus 0 = b \oplus (a \oplus b') = (b \oplus a) \oplus b' = (a \oplus b) \oplus b' = 0 \oplus b' = b' \oplus 0 = b'.$$

Cada igualdad en la línea anterior se justifica usando el axioma de campo correspondiente, por ejemplo, la tercera igualdad de izquierda a derecha se sigue de la propiedad asociativa de la suma. La prueba anterior ilustra el llamado *método axiomático* por excelencia: de una colección de axiomas o principios básicos podemos deducir todas aquellas propiedades aritméticas obvias que usamos de manera natural y que nos parece tan extraño que sean propiedades demostrables.

Siendo únicos los inversos aditivos y multiplicativos de los elementos de un campo, los denotaremos por $-a$ y (a^{-1} ó $1/a$) respectivamente. Usualmente escribiremos $a + b$ en lugar de $a \oplus b$ y ab ó $a \cdot b$ en vez de $a \odot b$.

Ejemplo 1.4.2 A continuación listamos algunas propiedades aritméticas básicas cuya demostración dejamos al lector para practicar el método axiomático. Supondremos que todos los elementos dados pertenecen a un campo $\mathcal{C}$.

a) $a + 0 = 0$ y $a \cdot 0 = 0$.

b) $-(-a) = a$.

c) $-a + (-b) = -(a + b)$.

d) Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$ (ley de cancelación para la suma).

e) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$ (ley de cancelación para el producto).

f) $(a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1}$.

g) $a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}$.

Además de las reglas aritméticas que definen un campo, en muchas instancias tenemos una relación de orden entre los elementos del campo, por ejemplo en $\mathbb{Q}$ podemos decir cuando un número es menor a otro. En general, la definición de orden es como sigue,

Definición 1.4.3 *Sea $\mathcal{C}$ es un campo. Diremos que $\mathcal{C}$ es* ordenado *si existe $\mathcal{P} \subset \mathcal{C} \setminus \{0\}$, llamada* clase positiva*, tal que:*

a) *Si $a, b \in \mathcal{P}$ entonces $a + b \in \mathcal{P}$ y $a \cdot b \in \mathcal{P}$ (cerradura).*

b) *Si $a \in \mathcal{C}$ entonces una y sólo una de las siguientes propiedades se cumple: $a \in \mathcal{P}$ ó $-a \in \mathcal{P}$ ó $a = 0$ (tricotomía).*

Si $a, b \in \mathcal{C}$, diremos que *a es menor que b* (notación: $a < b$) si $b - a \in \mathcal{P}$. En este caso también se dice que b es *mayor* que a. Diremos que *a es menor o igual que b* si $a < b$ ó $a = b$ (notación $a \leq b$). Observe que si $b \in \mathcal{P}$ entonces $b > 0$ pues $b = b - 0$.

En el caso del campo de los números racionales, la clase positiva $\mathcal{P}$ corresponde a los "racionales positivos", es decir, $\mathcal{P} = \{p/q : p, q \in \mathbb{N}\}$. Las siguientes son algunas propiedades de orden que sugerimos al lector probar,

Ejemplo 1.4.4 Sea $\mathcal{C}$ un campo y sean $a, b, c \in \mathcal{C}$ entonces

a) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

b) Para a y b en $\mathcal{C}$ se cumple una y sólo una de las siguientes propiedades: ó $a < b$ ó $b < a$ ó $a = b$.

c) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.

d) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

e) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $bc < ac$.

f) Si a^2 se define como $a \cdot a$ entonces $a^2 \geq 0$.

EJERCICIOS

✎ **1.16** Demostrar los incisos del ejemplo 1.4.2.

✎ **1.17** Demostrar los incisos del ejemplo 1.4.4.

✎ **1.18** En este ejercicio se muestra como construir $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$. Definimos en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ la siguiente relación $(p, q) \backsim (p', q')$ si y sólo si $pq' = p'q$. Pruebe que $\backsim$ es una relación de equivalencia. Denotamos por $\mathbf{Q}$ al conjunto de clases de equivalencia. Defina una suma $(\oplus)$, un producto $(\odot)$ y una clase positiva $\mathcal{P}$ en $\mathbf{Q}$ que hagan a $(\mathbf{Q}, \oplus, \odot, P)$ un campo ordenado. (De hecho, ¡éste será $\mathbb{Q}$!).

✎ **1.19** Demostrar que $\mathcal{C} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es un campo si definimos las operaciones de la siguiente manera:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

(*Sugerencia:* en este caso el neutro aditivo será $\mathbf{0} = (0, 0)$ y el neutro multiplicativo $\mathbf{1} = (1, 0)$. Demostrar primero que si $(a, b) \neq (0, 0)$ entonces $a^2 - 2b^2 \neq 0$.)

✎ **1.20** En el ejercicio anterior demostrar que la siguiente es una clase positiva.

$$\mathcal{P} = \left\{(a, b) \in \mathcal{C} : a > 0, a^2 > 2b^2\right\} \cup \left\{(a, b) \in \mathcal{C} : b > 0, a^2 < 2b^2\right\}.$$

(*Sugerencia:* Demostrar que si $(a, b) \neq (0, 0)$ entonces $(a, b) \in \mathcal{P}$ ó $-(a, b) \in \mathcal{P}$.)

1.5 Cardinalidad

¿Qué hacemos cuando contamos? Básicamente establecemos una correspondencia biunívoca entre los elementos de un conjunto y, lo que podríamos llamar, un *segmento inicial* de los números naturales. Por ejemplo, si queremos cerciorarnos de que la bolsa de naranjas del súper efectivamente contiene las 24 naranjas que anuncia, tomaríamos una a una las naranjas de la bolsa recitando a la vez, una, dos, tres, ..., veinticuatro. En términos rimbombantes diríamos que el conjunto de naranjas en la bolsa tiene por *cardinal* o *número de elementos* 24. El propósito de esta sección es extender esta idea de contar a conjuntos arbitrarios (léase infinitos).

Recordemos que la correspondencia biunívoca entre conjuntos es una relación de equivalencia (ver la proposición 1.2.12). La etiqueta o nombre que usaremos para identificar a las clases de equivalencia de conjuntos bajo esta relación es *cardinal* y denotaremos al cardinal de un conjunto A por $\#(A)$. Intuitivamente, dos conjuntos en la misma clase de equivalencia "tienen el mismo número de elementos". Por ejemplo, el cardinal del conjunto $\{a, b, c, d\}$ es 4 (aquí el símbolo 4 es la etiqueta que llevan todos los conjuntos que se biyectan con $\{a, b, c, d\}$). En definitiva, contar consiste en hacer a dos conjuntos *equivalentes* y esto sucede si existe una función biyectiva entre ellos.

Definición 1.5.1 *Un conjunto A es* finito *si $A = \emptyset$ o si existe una biyección*

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A,$$

para alguna $n \in \mathbb{N}$. En este caso, diremos que A tiene n elementos y escribiremos $\#(A) = n$. Si denotamos por a_j a $f(j)$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, diremos que $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es una numeración *de A.*

Definición 1.5.2 *Un conjunto A es* infinito *si no es finito.*

Proposición 1.5.3 *$\mathbb{N}$ es infinito.*

Demostración

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathbb{N}$ es finito. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y $f : \{1, 2, \ldots, m\} \to \mathbb{N}$ biyectiva. Sea $x_i := f(i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y sea $p = x_1 + \cdots + x_n$. Como $p \in \mathbb{N}$ y f es suprayectiva entonces $p = x_i$ para alguna i, lo cual no es posible pues $p > x_j$ para toda j. Luego, $\mathbb{N}$ es infinito. ■

Note que por transitividad cualquier conjunto biyectable con el conjunto de números naturales es, en consecuencia, infinito. Por ejemplo, el conjunto de números naturales impares (aquellos de la forma $2n - 1$ con $n \in \mathbb{N}$) es infinito.

Definición 1.5.4 *Un conjunto A es* numerable *si existe una función $f : \mathbb{N} \to A$ biyectiva. Si $a_j := f(j)$, $j \in \mathbb{N}$, diremos que $\{a_1, a_2, \ldots\}$ es una* numeración *de A. Diremos además que A tiene la cardinalidad de $\mathbb{N}$ y escribiremos $\#(A) = \#(\mathbb{N})$. El símbolo $\aleph_0$ (léase aleph cero) denotará a $\#(\mathbb{N})$ y por lo tanto, si A es numerable entonces $\#(A) = \aleph_0$.*

Ejemplo 1.5.5 El conjunto de los números enteros en apariencia "más grande" que el conjunto de los números naturales es numerable, en efecto, la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 1, \\ k, & \text{si } n = 2k,\ k \geq 1, \\ -k, & \text{si } n = 2k+1,\ k \geq 1. \end{cases}$$

es biyectiva:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2k & 2k+1 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots & k & -k & \cdots \end{array}$$

Esencialmente conjuntos equivalentes a los conjuntos finitos o a los números naturales son los conjuntos que podemos contar. Adoptaremos en consecuencia la siguiente terminología:

Definición 1.5.6 *Un conjunto es* contable *si es finito o numerable.*

Veamos algunas propiedades de conjuntos contables.

Lema 1.5.7 *Sea A finito, $A \neq \emptyset$ con $\#(A) = n$ y sea $a \in A$. Entonces $\#(A \setminus \{a\}) = n - 1$.*

$\boxed{\text{Demostración}}$

Si $\#(A) = 1$ entonces $A = \{a\}$. Así, $A \setminus \{a\} = \emptyset$ y $\#(\emptyset) = 0$. Supongamos ahora que $\#(A) = n > 1$ y sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ una numeración de A. Entonces $a = a_i$ para alguna $i = 1, 2 \ldots, n$. Sea $g : \{1, \ldots, n-1\} \to A \setminus \{a\}$ la siguiente función: si $a = a_1$ entonces $g(j) = a_{j+1}$ y si $a = a_n$ entonces $g(j) = a_j$ para toda $j = 1, \ldots, n-1$. Por otro lado si $1 < i < n$ sea

$$g(j) = \begin{cases} a_j, & 1 \leq j \leq i-1, \\ a_{j+1}, & i \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

g es una función biyectiva y por lo tanto, $\#(A\backslash\{a\}) = n - 1$. ■

Proposición 1.5.8 *Si A, B, son conjuntos finitos entonces $A \cup B$ es un conjunto finito.*

Demostración

Si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$ entonces $A \cup B = B$ ó $A \cup B = A$, respectivamente. Luego $A \cup B$ es finito. Supongamos que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Procedemos por inducción sobre $\#(B)$. Si $\#(B) = 1$ entonces $B = \{b\}$ y si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ entonces en el caso de que $b = a_i$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $A \cup B = A$ y A es finito. Por otro lado si $b \neq a_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $f : \{1, \ldots, n+1\} \to A \cup B$ dada por

$$f(i) = \begin{cases} a_i, & 1 \leq i \leq n, \\ b, & i = n+1. \end{cases}$$

Entonces $A \cup B$ es finito y $\#(A \cup B) = n + 1$. Supongamos ahora que si $\#(B) = m$ entonces $A \cup B$ es finito. Debemos probar que si $\#(B) = m + 1$ entonces $A \cup B$ es finito. Sea $b \in B$, por el lema 1.5.7, $B \setminus \{b\}$ tiene m elementos. Entonces, por hipótesis de inducción, $A \cup (B \setminus \{b\})$ es finito. Entonces $A \cup (B \setminus \{b\}) \cup \{b\}$ es finito. Por lo tanto $A \cup B$ es finito. ■

La proposición anterior se extiende fácilmente por inducción a la unión finita de conjuntos finitos:

Proposición 1.5.9 *Si $\mathcal{F}$ es un conjunto finito de conjuntos finitos, entonces $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ es finito.*

La proposición anterior la pudimos haber escrito de otra manera. Dado que $\mathcal{F}$ es un conjunto finito de conjuntos finitos, podemos numerar los elementos de la siguiente manera

$$\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$$

Por lo tanto, si cada A_k es finito entonces

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$

es finito.

Corolario 1.5.10 *Si A es un conjunto finito y $B \subset A$, entonces B es finito.*

Demostración

Si $A = \emptyset$ entonces $B = \emptyset$ y es B finito. Procedemos ahora por inducción sobre $\#(A)$. Si $\#(A) = 1$ entonces $B = \emptyset$ ó $B = A$, luego B es finito. Supongamos que si $\#(A) = n$ y $B \subset A$ entonces B es finito. Sea A un conjunto con $\#(A) = n + 1$ y sea $B \subset A$. Sea $a \in A$ entonces, por el lema 1.5.7, $A \setminus \{a\}$ tiene n elementos. Si $a \notin B$ entonces $B \subset (A \setminus \{a\})$, de donde, por hipótesis de inducción, B es finito. Finalmente, si $a \in B$ entonces $(B \setminus \{a\}) \subset (A \setminus \{a\})$, pero $B \setminus \{a\}$ es finito, luego $(B \setminus \{a\}) \cup \{a\}$ es finito (por la proposición 1.5.8). Por lo tanto B es finito. ■

Como consecuencia del corolario anterior tenemos,

Corolario 1.5.11 *Si B es un conjunto infinito y $B \subset A$, entonces A es infinito.*

Demostración

Si A fuese finito entonces por el corolario anterior, B sería finito. ■

En general si se tiene un conjunto A siempre es posible construir un conjunto con cardinal *estrictamente* mayor que el del conjunto A. Por ejemplo, si $\#(A) = n$ entonces $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^n > n = \#(A)$.

En el caso de conjuntos infinitos también podemos comparar la cardinalidad. El concepto de que un cardinal sea mayor que otro consiste en lo siguiente. Dados dos conjuntos X y Y, diremos que la cardinalidad de X menor que la cardinalidad de Y si $X \nsim Y$, esto es X y Y no son equivalentes y si X es equivalente a un subconjunto de Y. Esto lo escribiremos como $\#(X) < \#(Y)$. De hecho, siempre es cierto que para cualquier conjunto A no vacío, $\#(A) < \#(\mathcal{P}(A))$. Esto nos permite definir una sucesión de infinitos unos más grandes que otros. Esto es, si $\aleph_0 = \#(\mathbb{N})$ definimos $\aleph_1 = \#(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\aleph_2 = \#(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, etc. Por lo que hemos dicho, se tiene que $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$.

Las siguientes dos proposiciones muestran que el cardinal infinito $\aleph_0$ que corresponde a los números naturales es, en cierto sentido, el cardinal infinito más pequeño posible.

Proposición 1.5.12 *Si A es numerable y $B \subset A$ entonces B es contable. Es decir, un conjunto numerable sólo contiene subconjuntos finitos o numerables.*

Demostración

Si B es finito entonces B es contable. Si B no es finito, probemos que B es numerable. Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ una numeración de A. Definimos $S_1 := \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B\}$. Nótese que $S_1 \neq \emptyset$ porque $B \subset A$. Por el PBO existe $n_1 \in \mathbb{N}$, primer elemento de S_1 y $a_{n_1} \in B$. Sea $S_2 := \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B, n > n_1\}$. Nuevamente, $S_2 \neq \emptyset$ porque B es infinito. Por PBO existe $n_2 \in \mathbb{N}$ primer elemento de S_2, $a_{n_2} \in B$ y $n_2 > n_1$. Procediendo inductivamente se obtiene $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\} \subset B$ numerable. Veamos que de hecho $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$.

Sea $b \in B$. Como $B \subset A$ entonces $b = a_j$ para alguna $j \in \mathbb{N}$. Comparamos a_j con a_{n_1}, si $a_j = a_{n_1}$ hemos terminado. Si no, comparamos a_j con a_{n_2}, si son iguales, hemos terminado. Si no, comparamos con el siguiente elemento, etc. Necesariamente este proceso de comparación termina a lo más en j pasos, porque si $a_j \neq a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_{j-1}}$, como n_j es el primer elemento de $S_j = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B, n > n_j - 1\}$ entonces $a_j = a_{n_j}$. Luego, $B \subset \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$. ■

En particular, del teorema de Euclides[6] (que dice que el conjunto de números primos es infinito) y de la proposición 1.5.12 se tiene que el conjunto de números primos es numerable. Sin embargo, no se conoce, en forma explícita, una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \{p \in \mathbb{N} : p \text{ es primo}\}$. La existencia de tal función está íntimamente relacionada con uno de los "Problems of the Millennium": la llamada conjetura de Riemann[7], por cuya solución el Instituto Clay de Matemáticas ofrece la bicoca de un millón de dólares.

Proposición 1.5.13 *Si A es un conjunto infinito entonces A contiene un subconjunto numerable.*

Demostración

Como A es infinito, en particular es no-vacío, luego existe $a_1 \in A$. De nuevo, como A es infinito, $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$. Sea $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Entonces $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$. Procedemos inductivamente para obtener un conjunto $B = \{a_1, a_2, \ldots, \}$ que es numerable. ■

Quizás la primera antítesis filosófica que encontramos con los conjuntos infinitos es el hecho de que no necesariamente el todo es mayor que cada una de sus partes, al menos,

[6] Euclides de Alejandría, 325(?)ac-265ac.

[7] Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866.

en cuanto a cardinalidad se refiere. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ se biyecta con su subconjunto propio $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ vía la función $n \mapsto n+1$ o también con $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ par }\}$ con la función $m \mapsto 2m$. En general, tenemos la siguiente proposición, cuya prueba se deja al lector.

Proposición 1.5.14 *A es infinito si y sólo si existe un subconjunto propio B de A que es equivalente a A.*

1.6 Criterios para la equivalencia entre conjuntos

En esta sección nuestro interés será encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto sea numerable. Existen criterios generales para garantizar la equivalencia de conjuntos, el más famoso sin duda es el teorema de Cantor[8], Schroeder[9], Bernstein[10] que enunciamos a continuación. Una demostración sencilla y bonita de este resultado puede consultarse en [2, pág. 340], una más se encontrará en los ejercicios.

Teorema 1.6.1 (Cantor-Schroeder-Bernstein) *Dos conjuntos A y B son equivalentes si y sólo si A es equivalente a un subconjunto de B y B es equivalente a un subconjunto de A, es decir, si existen $f : A \to B$ y $g : B \to A$ inyectivas.*

Para decidir si un conjunto es numerable o no el siguiente teorema y su corolario son quizás las herramientas más útiles para hacerlo, pues solamente es necesario exhibir una función suprayectiva de los naturales sobre el conjunto (o una función inyectiva del conjunto en los naturales).

Teorema 1.6.2 *Si $A \neq \emptyset$, A es contable si y sólo si existe una función $f : \mathbb{N} \to A$ suprayectiva.*

Demostración

[8] George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845-1918.
[9] Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schroeder, 1841-1902.
[10] Sergei Natanovich Bernstein, 1880-1968.

Supongamos primero que A es contable. Si A es finito, sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$. una numeración de A y sea $f : \mathbb{N} \to A$ la función dada por

$$f(j) = \begin{cases} a_j, & 1 \leq j \leq n, \\ a_1, & j \geq n+1. \end{cases}$$

Claramente f es suprayectiva. Por otro lado, si A es numerable, digamos $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, sea $f : \mathbb{N} \to A$ la función suprayectiva dada por $f(j) = a_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Para probar la suficiencia, consideremos $f : \mathbb{N} \to A$ suprayectiva. Para cada $a \in A$ podemos elegir $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_a) = a$. La función $g : A \to \mathbb{N}$, dada por $g(a) = n_a$ es inyectiva, porque f es función. Luego, A y $g(A)$ son equivalentes. Como $g(A) \subset \mathbb{N}$ entonces $g(A)$ es contable y por lo tanto A es contable. ■

Corolario 1.6.3 *Un conjunto A es contable si y sólo si existe $g : A \to \mathbb{N}$ inyectiva.*

Demostración

Si A es contable, cualquier numeración de A proporciona la función inyectiva deseada. Por otro lado si $g : A \to \mathbb{N}$ es inyectiva entonces la función $f : \mathbb{N} \to A$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} a, & \text{si } g(a) = n, \\ 7, & \text{si } g(a) \neq n \text{ para toda } n. \end{cases}$$

es suprayectiva. ■

Ejemplo 1.6.4 $\mathbb{Z}$ es numerable Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(z) = \begin{cases} -2z+1, & \text{si } z \leq 0. \\ 2z, & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

f es inyectiva (de hecho biyectiva).

Un conjunto que, a priori, sería mucho más grande en cardinalidad que el del conjunto de los números naturales, es el de los números racionales. Sin embargo, como muestran los siguientes dos ejemplos, hay tantos racionales como números naturales.

Ejemplo 1.6.5 $\mathbb{Q}$ es numerable. Recordemos que

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1 \right\}.$$

Sea $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ dada por

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 2^p 3^q, & \text{si } p \geq 0, \\ 5^{-p} 7^q, & \text{si } p < 0. \end{cases}$$

g es inyectiva por el Teorema Fundamental de la Aritmética (aunque no es suprayectiva).

Ejemplo 1.6.6 $\mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ es numerable. Una figura dice más que mil palabras.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & \rightarrow & \cdot \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \cdot & \cdot & \cdot \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \swarrow & & & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Ejemplo 1.6.7 Sea $\mathcal{P} = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : n \in \{0, 1, \ldots\}, a_i \in \mathbb{Z}, i \in \{0, 1, \ldots\}\}$ el conjunto de polinomios con coeficientes enteros y variable real. Sea

$$\mathcal{R} = \{ \text{ raíces reales de elementos de } \mathcal{P}\}$$

Entonces $\mathcal{R}$ es numerable. La demostración de este hecho se puede ver en [15].

Concluimos esta sección mostrando la proposición análoga a 1.5.9 para unión numerables de conjuntos numerables.

Proposición 1.6.8 *Sea $\mathcal{F}$ una familia numerable de conjuntos contables no vacíos entonces $\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$ es numerable.*

La demostración de 1.6.8 se basa en el siguiente lema:

Lema 1.6.9 *Si A, B son conjuntos numerables entonces $A \times B$ es numerable.*

Demostración

Como A y B son numerables entonces por el teorema 1.6.2 existen funciones $f : \mathbb{N} \to A$ y $g : \mathbb{N} \to B$ suprayectivas. Entonces la función $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ dada por $h(n, m) = (f(n), g(m))$ es suprayectiva y como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable (porque, por ejemplo, la función $(n, m) \mapsto 2^{n-1}(2m-1)$ es una función biyectiva de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$) entonces $A \times B$ es numerable. ■

Probemos ahora la proposición 1.6.8. Como $\mathcal{F}$ es numerable existe $G : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ suprayectiva. También, para cada $A \in \mathcal{F}$ existe $f_A : \mathbb{N} \to A$ suprayectiva. Definimos

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A \quad \text{dada por} \quad h(n, m) = f_{G(n)}(m).$$

La función h es suprayectiva y por el lema anterior tenemos que $\cup_{A\in\mathcal{F}} A$ es numerable. ■

A la luz de la proposición 1.6.8 podemos dar una prueba más de que el conjunto de los números racionales es numerable. En efecto, para cada $j \in \mathbb{N}$ considere el conjunto $A_j = \{p/q \in \mathbb{Q} : |p| + |q| \leq j\}$. Cada A_j es finito (¿cuál sería una cota superior para el número de elementos de cada A_j?) y ciertamente $\mathbb{Q} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(A_j)$.

1.7 Algunos no-numerables

¿Existen conjuntos infinitos no-numerables? la respuesta es que sí, de hecho, hemos comentado que $\#(\mathcal{P}(\mathbb{N})) > \#(\mathbb{N})$. A continuación damos un ejemplo conocido de un conjunto infinito que no es numerable.

Aunque no hemos dicho bien a bien quién es $\mathbb{R}$ (lo haremos en el siguiente capítulo) asumiremos como hechos algunas propiedades de $\mathbb{R}$ que sin duda le son familiares al lector.

Proposición 1.7.1 *El intervalo* $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ *es infinito no numerable.*

Antes de probar la proposición 1.7.1 veamos algo sobre la *expansión decimal* de los números reales. Sabemos que los números reales tienen representación decimal en la forma $a.a_1a_2a_3a_4\ldots$ donde a es un número entero y cada a_i es un número (dígito) entre $0, 1\ldots, 9$. Para números racionales p/q de hecho sabríamos como encontrar una expansión decimal utilizando el algoritmo de la división, por ejemplo, al dividir 1 entre 4 obtenemos $1/4 = 0.2500\ldots$ y similarmente $1/3 = 0.3333\ldots$, $1/7 = 0.142857142857142857\ldots$. Note que algunos racionales tienen expansión decimal finita (en el sentido de que su expansión decimal tiene una "cola" de ceros) como el $1/4$, mientras que otros tienen una expansión decimal infinita como el $1/3$ o el $1/7$. Aquellos números que tienen expansión decimal finita admiten dos representaciones decimales, por ejemplo, las expansiones $0.12500000\ldots$ y $0.12499999\ldots$ son el mismo número $(1/8)$, porque si $\alpha = 0.12499999\ldots$ entonces

$$9000\alpha = 10000\alpha - 1000\alpha = 1125 \quad \text{luego} \quad \alpha = \frac{1125}{9000} = \frac{1}{8}.$$

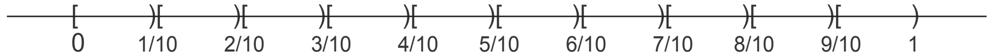
Para tener un criterio de unicidad podemos convenir que nuestras expansiones decimales siempre sean infinitas, es decir, no permitir "cola" de nueves en la expansión. El lector deberá convencerse, basado en la siguiente construcción, de que exactamente éstos son los únicos números que admiten dos representaciones decimales. Veamos entonces cómo obtener la expansión decimal de un número entre 0 y 1. La discusión es informal, más adelante tendremos oportunidad de justificar adecuadamente los detalles.

Supongamos que x es un número en el intervalo $[0, 1)$ y sea $a_1 \in \{0, \ldots, 9\}$ el menor dígito (elegimos las décimas de x) tal que

$$\frac{a_1}{10} \leq x < \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

Gráficamente lo que hacemos es dividir el intervalo $[0, 1)$ en diez partes iguales y elegimos el subintervalo en el que se ubica x.

Si por azares del destino, x se encuentra simultáneamente en dos subintervalos (¿cuándo ocurre esto?) elegimos el subintervalo a la derecha (así evitaremos potenciales colas de nueves). Subdividimos ahora el subintervalo en el que se encuentra x en diez partes iguales



y elegimos de estos nuevos subsubintervalos aquel en el que se encuentra x, es decir, sea $a_2 \in \{0, \ldots, 9\}$ el menor dígito (elegimos las centésimas de x) tal que

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \le x < \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}$$

Procedemos inductivamente, si se han elegido $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, sea $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ el menor dígito tal que

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \le x < \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

Así, se encuentran dígitos $a_1, a_2, \ldots$ en $\{0, 1, \ldots, 9\}$ tales que $x = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots$ o bien

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots$$

Note que esta construcción no produce expansiones decimales con cola de nueves.

En el caso de $x = 1/4$ los tres primeros pasos para obtener su expansión decimal serían:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{10} \le x < \frac{2}{10} + \frac{1}{10} & \qquad\qquad x = 0.2\ldots, \\
\frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} \le x < \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{1}{10^2} & \qquad\qquad x = 0.24\ldots, \\
\frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{0}{10^3} \le x < \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{0}{10^3} & \qquad\qquad x = 0.250\ldots
\end{aligned}$$

El método para construir expansiones decimales se puede copiar verbatim para construir expansiones en base p, donde $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ (ver ejercicio 1.34). Estas se llaman expansiones p-ádicas. De especial interés para nosotros serán los casos $p = 2$ (expansión binaria) y $p = 3$ (expansión ternaria). De hecho, no es difícil obtener el siguiente resultado.

Proposición 1.7.2 *Usando la construcción anterior, dos números $x, y \in [0, 1)$ son iguales si y sólo si tienen la misma expansión p-ádica.*

Demostremos ahora 1.7.1. La técnica ilustra el llamado *método diagonal de Cantor*. Primero note que, en efecto, el intervalo $[0, 1)$ es infinito porque contiene a un conjunto infinito, por ejemplo, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 1\}$. Para probar que es no-numerable, supongamos, por reducción al absurdo, que sí lo es, digamos que $[0, 1) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Escribimos los x_i's en su expansión decimal y los listamos como sigue,

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 &=& 0.\boxed{a_1^1}a_2^1a_3^1a_4^1\ldots\ldots \\
x_2 &=& 0.a_1^2\boxed{a_2^2}a_3^2a_4^2\ldots\ldots \\
x_3 &=& 0.a_1^3a_2^3\boxed{a_3^3}a_4^3\ldots\ldots \\
\vdots &=& \quad\vdots \quad \ddots \\
x_n &=& 0.a_1^na_2^na_3^n\ldots\boxed{a_n^n}\ldots \\
\vdots & & \vdots \qquad\qquad \ddots
\end{array}
$$

El método diagonal consiste en mirar la diagonal del arreglo para construir un número del intervalo $[0, 1)$ que no está en la lista. En efecto, vamos a construir un elemento $y = 0.b_1b_2b_3\ldots \in [0, 1)$ donde, para cada $i \in \mathbb{N}$, $b_i \in \{1, \ldots, 8\}$. En la construcción eliminamos el 0 y el 9 para evitar una expansión decimal con cola de ceros o nueves y producir posiblemente alguna otra representación decimal de algún x_j. Se define

$$
b_i = \begin{cases} 3, & a_i^i \in \{6, \ldots, 9\}, \\ 7, & a_i^i \in \{0, \ldots, 5\}. \end{cases}
$$

Observe que $y \neq x_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y pues y difiere de cada x_j precisamente en el elemento diagonal a_j^j. Entonces $y \in [0, 1)$ y $y \neq x_j$ para toda $j \in \mathbb{N}$, lo cual no es posible. Luego, $[0, 1)$ es no-numerable.

Ejemplo 1.7.3 Los intervalos $[0, 1)$ y $[0, 1]$ son equivalentes. Sea $\varphi : (0, 1) \to [0, 1)$ dada por

$$
\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t = 1/2, \\ \frac{1}{n-1}, & t = 1/n, n \geq 3, \\ t, & t \neq 1/n, n \geq 2. \end{cases}
$$

Ejemplo 1.7.4 Los intervalos (0, 1) y (0, 1] también son equivalentes a [0, 1).

EJERCICIOS

✎ **1.21** Demostrar que si $A \sim A'$ y $B \sim B'$ entonces $A \times B \sim A' \times B'$.

✎ **1.22** Demostrar que la siguiente es una biyección

$$\begin{aligned} F &: \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, mn\}, \\ F(p, q) &= (p - 1)m + q. \end{aligned}$$

✎ **1.23** Demostrar que si A y B son conjuntos finitos entonces $\#(A \times B) = \#(A)\#(B)$.

✎ **1.24** Demostrar la proposición 1.5.9.

✎ **1.25** Sea A un conjunto. Probar que existe una biyección entre el conjunto

$$\mathcal{F}(A) = \{g : A \to \{0, 1\}\}$$

de funciones con dominio A y codominio $\{0, 1\}$ y el conjunto potencia $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$. (*Sugerencia:* demostrar que $H : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{P}(A)$ dada por $H(g) = g^{-1}(\{1\})$ es una biyección.)

✎ **1.26** Si A es finito con $\#(A) = n$ entonces $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

✎ **1.27** Supongamos que $A \sim B$ a través de una biyección $f : A \to B$. Demostrar:

a) para todo $C \subset A$ se cumple que $C \sim f(C)$ y por ende $\#(C) = \#(f(C))$,

b) para todo $D \subset B$ se cumple que $D \sim f^{-1}(D)$ y por ende $\#(D) = \#(f^{-1}(D))$.

✎ **1.28** En este ejercicio se hace una generalización del lema 1.5.7. Sea A finito y no vacío. Demostrar que, si $B \subset A$ entonces $\#(A \setminus B) = \#(A) - \#(B)$.

✎ **1.29** Sea A es finito con $\#(A) = n$. A partir de A se define el conjunto

$$\Omega = \{(a, b) \in A \times A : a \neq b\}$$

demostrar $\Omega \sim \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n-1\}$.

✎ **1.30** Probar la proposición 1.5.14.

✎ **1.31** Sean A, B, y C tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C$. Suponer que $A \sim C$. Demostrar que $A \sim B \sim C$.

✎ **1.32** Sea $f : A \to B$ inyectiva. Demostrar que $\#(A) \leq \#(B)$. Usar esto para demostrar que $\#([0, 1]) \leq \aleph_1$.

✎ **1.33** Sea E un conjunto no vacío.

a) Demostrar que E es equivalente al siguiente subconjunto de $\mathcal{P}(E)$.

$$\{\{x\} \in \mathcal{P}(E) : x \in E\}.$$

b) Sea $\varphi : E \to \mathcal{P}(E)$ una función. Demostrar que el conjunto

$$A = \{x \in E : x \notin \varphi(x)\}$$

no está en la imagen de φ y por tanto no existe una función suprayectiva $E \to \mathcal{P}(E)$.

c) Demostrar que $E \nsim \mathcal{P}(E)$ y por tanto $\#(E) < \#(\mathcal{P}(E))$.

✎ **1.34** Sea $x \in (0, 1)$ y sea $p > 1$ un número natural. Probar que existen dígitos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ tales que $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ o bien

$$x = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \cdots$$

(expansión p-ádica). Prueba que los dígitos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son únicos excepto en el caso en el que x sea un número de la forma q/p^n; en este caso hay exactamente dos expansiones p-ádicas.

1.8 El conjunto ternario de Cantor

Si alguien nos pide un subconjunto de los números reales, es probable que demos un intervalo o un conjunto finito. En realidad, ¿qué tan raro puede ser un subconjunto de los números reales? Bueno, para muestra basta un botón. Imagine que alguien le pide remover del intervalo $[0, 1]$ un subconjunto de longitud uno (la misma longitud que la del intervalo) con la condición de que en el resto queden tantos puntos como en el intervalo original. Parafraseando podría decirse así: dar un subconjunto de la recta real que tenga longitud cero y que tenga tantos puntos como la recta real. El famosísimo *Conjunto de Cantor* es tal ejemplo y será un conjunto que encontremos a lo largo de varios capítulos, pues es fuente de ejemplos y contraejemplos para una gran variedad de conceptos. La construcción del conjunto de Cantor es recursiva y se hace como sigue:

Sea $F_0 = [0, 1]$ el intervalo unitario. Removemos del intervalo $[0, 1]$ el intervalo $(1/3, 2/3)$ (el tercio medio) para obtener $F_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Ahora, de cada uno de los intervalos que conforman a F_1 removemos el tercio medio, es decir, los intervalos $(1/9, 2/9)$ y $(7/9, 8/9)$. Obtenemos, $F_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$. En el siguiente paso removemos de cada uno de los intervalos de F_2 el tercio medio y queda $F_3 = [0, 1/27] \cup [2/27, 1/9] \cup [2/9, 6/27] \cup [7/27, 1/3] \cup \cdots \cup [26/27, 1]$. Continuamos este proceso de eliminación inductivamente. Así, en el paso n tenemos un subconjunto F_n del intervalo $[0, 1]$ que consiste de 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$ cada uno. El conjunto F_n se obtiene de F_{n-1} removiendo los tercios medios de cada uno de los 2^{n-1} intervalos que conforman a F_{n-1}. El conjunto de Cantor finalmente es:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

Note que para obtener el conjunto de Cantor hemos quitado del intervalo $[0, 1]$ intervalos con la siguiente longitud total:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \cdots \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots\right) = \frac{1}{3\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = 1. \end{aligned}$$

Luego la longitud de $\mathcal{C}$ es cero y sin embargo $\mathcal{C} \neq \emptyset$ pues, por ejemplo, 0, 1/3, 2/9, 7/9 y en general todo extremo de intervalo que conforma a cada F_n pertenece a $\mathcal{C}$.

Se puede argumentar que $\mathcal{C} \sim [0, 1]$. La idea de la demostración de este hecho es la siguiente. Si $x \in \mathcal{C}$ entonces x tiene una expansión ternaria que sólo usa los dígitos 0 y 2. Algunos elementos de $\mathcal{C}$ tienen dos expansiones ternarias (de hecho son aquellos números en [0, 1] cuyo denominador es potencia de 3). Como hicimos en el caso de expansiones decimales, podemos elegir, para tales elementos, la expansión ternaria que tiene cola de 2. Inversamente cada expansión ternaria que sólo usa los dígitos 0 y 2 corresponde a un elemento del conjunto de Cantor. El método diagonal de Cantor puede usarse ahora para concluir la no-numerabilidad de $\mathcal{C}$ y como $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ entonces $\#(\mathcal{C}) = \#([0, 1])$.

El lector avezado habrá notado aquí un pequeño detalle técnico: ¿cómo sabemos que no hay infinitos no-numerables "más chicos" que el cardinal infinito que corresponde a $\#([0, 1])$? La respuesta es la llamada *hipótesis del continuo* que se discute brevemente en la siguiente sección. Si se desea evitar la hipótesis del continuo, otra manera de mostrar la equivalencia entre $\mathcal{C}$ y el intervalo [0, 1] es establecer una correspondencia biunívoca entre $\mathcal{C}$ y [0, 1] usando la expansión ternaria de los elementos de $\mathcal{C}$ y la expansión binaria de los elementos de [0, 1] (la correspondencia sería "dividir entre 2" cada dígito de la expansión.).

1.9 La hipótesis del continuo

De la no-numerabilidad de los números reales tenemos que $\#(\mathbb{R}) > \#(\mathbb{N})$. En general, puede probarse que si A es un conjunto no vacío (¿quién es $\mathcal{P}(\emptyset)$?) entonces, $\#(A) < \#(\mathcal{P}(A))$.

Recuerde que designamos por $\aleph_0$ a $\#(\mathbb{N})$. Los resultados de la sección anterior muestran que $\#(\mathcal{P}(\mathbb{N})) > \aleph_0$. Se define $\aleph_1 = \#(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\aleph_2 = \#(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, etcétera. Una pregunta natural es ¿corresponde $\#(\mathbb{R})$ a algún aleph? Está pregunta se la hizo Cantor durante sus estudios sobre cardinalidad y también apareció como el problema número uno en la lista de los ya famosos 23 problemas de Hilbert[11] que éste anunció durante el Congreso

[11] David Hilbert, 1862-1943.

Internacional de Matemáticas en 1900.

A $\#(\mathbb{R})$ se le conoce como el *cardinal del continuo* y se le denota usualmente por c. En 1963, Cohen[12] demostró que el problema de decidir cual de los alephs es c es un problema *insoluble*, en el sentido de que diferentes ubicaciones de c en la sucesión de alephs son compatibles con los axiomas en los que se basa la teoría de conjuntos. La demostración le valió a Cohen la medalla Fields[13] de matemáticas en 1964. La hipótesis del continuo es suponer que no hay un conjunto infinito cuyo cardinal este entre $\aleph_0$ y c.

EJERCICIOS

✎ **1.35** En este ejercicio $\mathcal{C}$ denota al conjunto de Cantor.

a) Probar que cada elemento de $\mathcal{C}$ admite una expansión ternaria que sólo usa los dígitos 0 y 2.

b) Pruebe que $1/4 \in \mathcal{C}$.

c) Pruebe que $\mathcal{C} \sim [0, 1]$.

[12] Paul Joseph Cohen, 1934-.
[13] John Charles Fields, 1863-1932.

Capítulo 2

Los Números Reales

La Sangre y el Número

Apenas se adivina Orión, hace horas que se ocultaron las Pléyades. Soy filósofo y, como tal, encuentro en los avatares cotidianos signos de lo que será; como amante de los números y miembro de la Hermandad, estuve presente en la hecatombe para agradecer al Dios: la irrefutabilidad de la prueba que el Maestro desveló es símbolo de lo divino, cuyo atributo evidente es la eternidad. Sin importar, pues, esa medida en la que no confío y que llaman tiempo, cualquier cuerpo en el universo cuyos tres ángulos, en total, alcancen media circunferencia está contenido en aquella demostración.

Declina la noche y espero con ansiedad, aunque conozco al Maestro y puedo esperar confiado su llegada. El descubrimiento al que me he acercado, con humildad aunque por una ocasión sin necesidad de su mano, lo dejó desde ayer sumido en un pozo de pensamientos. Tardé en comprender que el simposio no es un lugar idóneo para transmitir secretos; en ello cifro la reprimenda que sus ojos veladamente me hicieron, al tiempo que con firmeza no exenta de ternura me instó a no beber como los escitas. Sin embargo, dijo que vendría antes de que apareciera la aurora de rosados dedos. No ocultaré que le amo: Él me enseñó, desde mi llegada de Metaponto que, para quienes los saben fatigar, los números revelan al Universo todo, pues son el mayor espejo para aquel que interroga con ojos adiestrados y afilada razón.

Con paciencia me hizo conocer las ternas, bellas combinaciones de números enteros: γ' dos veces por sí, y añadido a δ' sujeto a la misma operación, obtiene como producto a ε' dos veces por sí, lo cual suele aplicarse hermosamente a una cantidad suficiente de números, por decir $\iota\beta'$, ε', $\iota\beta'$ si siguen la misma disposición. Asimismo, me ha mostrado la correspondencia numérica de los fenómenos naturales, pues si los números son enteros o pueden incluso fraccionarse sin perder su proporción, entonces son perfectos como es el Universo perfecto. En ello descansaba mi paz.

Imposible olvidar cuando el sabio de Samos nos demostró con la tetracorde lira la serena armonía que emana de la fracción del entero: una octava arriba y el sonido es magnífico; tercios, cuartos, quintos, fracciones simples y se mantenía el equilibrio. Confieso que más tarde probé tanto con el bárbiton como con el báromos, e incluso con el mágadis de veinte cuerdas, y todo resultó abrumadoramente cierto. Me maravillaba la claridad de su mente: es cierto que los poetas conocían el secreto de la armonía pero ninguno procuró otorgarle la gracia de la explicación absoluta y, jamás, su sagrado significado. Decidí seguir al Grande hasta la muerte.

He memorizado los versos del dulce Anacreonte, quien compartiera un tiempo con mi Maestro el rigor del cetro de Polícrates, tirano en Samos; por ello, no creo exagerar ya que conozco el alcance de mi compromiso hasta el fin del aliento:

> “pues el Hades es terrible abismo,
> y el descenso hasta él, funesto;
> pues cierto, para quien desciende,
> el no regresar.”

Me cuesta trabajo no pensar en la gloria que junto con él compartiré. El, ya famoso, crecerá en gloria y estima por toda la negra tierra, desde Tracia hasta Tartesos, desde Teos hasta el lugar donde moran los pueblos que se alimentan de moluscos y sangre humana. ¿Permanecerán nuestros nombres unidos como los de Aquiles y Patroclo? Pero se dibujó en mi mente, perfilada apenas, la sombra de una inquietud: si la perfección del Universo es entera y divisible en fracciones proporcionales, ¿no será acercarse a los dioses demostrar que lo sublime es la perfección que contiene la imperfección en su origen?

Indagué hasta adelgazar mi cuerpo, obtuve una certeza. ¿Me llamará, quizá, mi Maestro, señor de señores en el pensamiento y me invitará a discutir la demostración mientras miramos el ponto rico en peces? ¿De cuál ejemplo he de servirme? Lo mejor será presentar el Número nuevo de la forma menos compleja y al mismo tiempo más diáfana: aún lo inconmensurable, por tanto no reductible por la razón, debe ser bello y bueno para ser absoluto. Solamente en la mano esta tablilla, y en ella el Número que es la evidencia de la más excelsa areté: $\lceil\beta'$. De mi propia mano la emoción escribe que $\lceil\beta'$ dos veces por si mismo nos da lo imposible. La demostración de este milagro es una maravilla que al Maestro seguro emocionará del mismo modo.

Febo lanzó sus corceles y el cielo se tiñó de suave púrpura. Los pasos que se acercaban dejaron de escucharse. Se abrieron las dobles puertas y la voz de Pitágoras resonó en el espacio.

–El Universo es Uno, perfecto, armónico, y sólo lo que podemos captar con la razón subsiste.

Los ojos se agrandaron y la voz retumbó como si dentro de su pecho habitara una fragua.

–Fuiste el mejor de los alumnos y no he de ocultar que tal vez te amé. Pero es imposible permitir la existencia de este Número infame. ¿ Qué sería del Cosmos? ¿ En dónde habría de buscarse la inteligente Proporción que es Belleza? Mas, si callas para siempre, nadie conocerá este ignominioso secreto. La Hermandad, a salvo, y con ella los pueblos de la Tierra prolífica, olvidará tu nombre. Y añadió con rudeza: –Te permito partir.

La confusión cegó por un instante la mente del discípulo. Como si, persiguiéndole, las Furias se apiñaran a su alrededor, se adelantó a tumbos. No escuchó, ya, la orden que el Maestro impartió a dos sicarios quienes, resguardados por los jirones de la noche, hicieron centellear hábilmente las hojas de sus dagas y arrojaron su cadáver al río. La Hermandad sostuvo siempre que Hippasio nunca alcanzó destreza alguna en las artes del reino de Poseidón.

MAURICIO LÓPEZ NORIEGA

2.1 ¿Por qué queremos a $\sqrt{2}$?

No es difícil encontrar situaciones en donde aparezcan números que no son racionales. Desde tiempos inmemoriales, pongamos por ejemplo los griegos del siglo V a.c., salieron a la luz números como $\sqrt{2}$. Se descubrió en ese entonces que existen pares de segmentos de línea (por ejemplo un lado y la diagonal de un cuadrado) que no son conmensurables, es decir, que no pueden, ambos segmentos, dividirse en múltiplos enteros de segmentos de la misma longitud. Esto dice que la razón de las longitudes de tales segmentos no es igual a la razón entre dos números enteros. Suponer que la razón de un lado a la diagonal de un cuadrado es un número racional, digamos de la forma p/q donde p y q son números enteros *sin* factores comunes, lleva a concluir que necesariamente tanto p como q comparten el factor 2, contrario al supuesto.

Otra manera de exhibir números no racionales es vía la expansión decimal discutida en el capítulo uno. Usando el algoritmo de la división puede probarse fácilmente que los números racionales son exactamente aquellos que tienen una expansión decimal eventualmente periódica, en efecto, si p/q es un número racional, al dividir p entre q el residuo siempre es un número entre 0 y $q-1$, si se continua la división, eventualmente (¿en a lo más cuántos pasos?) el residuo será un valor repetido iniciando ahí el período. Por ejemplo, $1/4 = 0.249999\ldots$ (eventualmente el período es 9), $3/7 = .428571428571\ldots$ (el período es 428571), etc. Por otro lado, una expansión decimal periódica fácilmente se convierte a una fracción (¿cómo?). Es fácil concebir números cuya expansión decimal no es periódica y por lo tanto no son números racionales, por ejemplo,

$$0.101001000100001000001\ldots$$

Números de todos conocidos y que aparecen por doquier como

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419 7\ldots$$

y

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775 7\ldots$$

también resultan no ser números racionales. O bien, números famosos como la constante de Euler[1]

$$\gamma = 0.57721566490153286060651209008240243104 2\ldots$$

que ni siquiera se sabe si es racional o no.

¿Además de su presencia natural, que otras razones podemos dar para justificar la necesidad de los números no racionales (*irracionales*)?. Bueno, si el lector recuerda sus cursos de cálculo, uno de los teoremas centrales en el cálculo es el teorema de Bolzano[2] (teorema de valor intermedio). Si quisiéramos quedarnos solamente con los números racionales como espacio ambiente el cálculo perdería al teorema de Bolzano y por consiguiente muchas de sus útiles consecuencias. En efecto, considere la función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida como $f(x) = x^2 - 2$. A pesar de que f toma valores positivos y negativos nunca toma el valor 0 y por lo tanto no satisface el teorema de Bolzano.

2.2 Otro campo ordenado

En secciones anteriores comentamos como a partir de los números naturales se pueden construir los números enteros y de éstos los números racionales. Los números reales se pueden obtener de los números racionales agregando un *axioma de completación o completez* a los axiomas de campo y orden (ver definiciones 1.4.1 y 1.4.3) de los racionales. Sin saber aún quién es el axioma de completez, la existencia de los números reales podría formularse formalmente de la siguiente manera:

Teorema 2.2.1 *Existe un único campo ordenado que satisface el axioma de completez y que contiene a $\mathbb{Q}$ como subcampo. Denotaremos a tal campo por $\mathbb{R}$.*

La demostración de éste teorema se puede hacer vía las llamadas *cortaduras de Dedekind*[3] o bien considerando clases de equivalencia de objetos conocidos como *sucesiones de*

[1]Leonhard Euler, 1707-1783.
[2]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, 1781-1848
[3]Julius Wihelm Richard Dedekind, 1831-1916

Cauchy[4] de racionales. Aquí no presentaremos la demostración pero el lector interesado puede consultar [15, Cap. 1] para la prueba con cortaduras de Dedekind o bien [4, Apén. A] para la construcción con sucesiones de Cauchy.

De fundamental importancia para el Análisis Matemático es el entendimiento del axioma de completez; sin exagerar puede decirse que este axioma es el que hace la diferencia: sin él, el análisis sería vil álgebra (sin ánimo de ofender, sólo para enfatizar).

El axioma de completez tiene diferentes versiones, en estas notas presentaremos dos de ellas: el *axioma del supremo* y el *principio de intervalos anidados* y en su momento mostraremos la equivalencia entre ambas. Seguiremos la ruta clásica y comenzaremos explicando en la siguiente sección el axioma del supremo.

2.3 Completez de los números reales

En lo sucesivo usaremos la notación usual para intervalos de números reales, si a, b son números reales entonces $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, etcétera.

Definición 2.3.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Diremos que $a_0 \in \mathbb{R}$ es* máximo *de A si:*

a) *$a_0 \in A$ y,*

b) *$a_0 \geq a$ para toda $a \in A$*

Similarmente, diremos que $a_0 \in \mathbb{R}$ es mínimo *de A si:*

a) *$a_0 \in A$ y,*

b) *$a_0 \leq a$ para toda $a \in A$*

[4] Augustin Louis Cauchy, 1789-1857

Note que de existir un máximo o mínimo de un conjunto este es necesariamente único. Algunos ejemplos son,

$$\max\{2, 3, 5, 7\} = 7, \quad \max\{[0, 1]\} = 1, \quad \max\{(-\infty, 0) \text{ no existe.}$$

Ejemplo 2.3.2 El intervalo $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ no tiene ni un mínimo ni un máximo. En efecto, supongamos que $a_0 = \max(A)$. Veremos que es posible construir un número en A mayor a a_0. En principio tenemos que $0 < a_0$ y $a_0 \geq a$ para toda $a \in A$. Consideremos el número $\frac{1+a_0}{2}$ entonces

$$0 < a_0 < \frac{1 + a_0}{2} < 1$$

Luego $\frac{1+a_0}{2} \in A$, lo cual contradice que $a_0 = \max(A)$. De donde A no tiene un máximo. Análogamente se prueba que A no tiene un mínimo.

Definición 2.3.3 *Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Diremos que $a_0 \in \mathbb{R}$ es*

a) cota superior *de A si $a_0 \geq a$ para toda $a \in A$.*

b) cota inferior *de A si $a_0 \leq a$ para toda $a \in A$.*

Si A tiene alguna cota superior diremos que A está acotado superiormente. *Si A tiene alguna cota inferior diremos que A está* acotado inferiormente. *A está* acotado *si está acotado superior e inferiormente.*

Note que a diferencia de un máximo o un mínimo las cotas superiores o inferiores de un conjunto *no necesariamente* pertenecen al conjunto. Así, 1 es cota superior del intervalo $(0, 1)$, que como sabemos no tiene un máximo. Sin embargo, si un conjunto tiene un máximo entonces este número es también una cota superior del conjunto. Note también que si un número es cota superior de un conjunto entonces automáticamente cualquier número más grande también es cota superior del conjunto. Siguiendo un principio de optimalidad, es natural preguntarse por la menor cota superior de un conjunto acotado superiormente y la respuesta es el contenido del

Axioma del Supremo 2.3.4 *Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si A está acotado superiormente entonces A tiene una mínima cota superior. Es decir, existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

a) *$a_0 \geq a$ para toda $a \in A$ (a_0 es cota superior) y,*

b) *Si $b \geq a$ para toda $a \in A$ entonces $b \geq a_0$ (a_0 es la menor cota superior)*

Llamamos a a_0 el supremo *de A y lo denotamos por* $\sup(A)$.

Si A es el conjunto vacío, se conviene en poner $\sup(A) = -\infty$ (pensando en que cualquier número real es cota superior del conjunto vacío). La versión operativa del axioma del supremo se da a continuación:

Teorema 2.3.5 *Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si A está acotado superiormente, entonces para $a_0 \in \mathbb{R}$ son equivalentes:*

a) $a_0 = \sup(A)$

b) *a_0 es cota superior de A y para toda $\varepsilon > 0$ existe $a = a(\varepsilon)$ en A tal que $a_0 - \varepsilon < a \leq a_0$*

$\boxed{\text{Demostración}}$

Supongamos primero que $a_0 = \sup(A)$ entonces, por definición, a_0 es cota superior de A. Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_0 - \varepsilon < a_0$ entonces a_0 no puede ser cota superior de A. Luego existe $a \in A$ tal que $a_0 - \varepsilon < a \leq a_0$. Para la otra implicación, supongamos que a_0 no es la mínima cota superior de A, entonces existe $b < a_0$ tal que b es cota superior de A. Sea $\varepsilon = a_0 - b > 0$. Por hipótesis existe $a \in A$ tal que $a_0 - \varepsilon < a \leq a_0$, es decir, $b < a \leq a_0$, lo cual no es posible porque b es cota superior de A. Entonces a_0 es la mínima cota superior de A y por lo tanto, $a_0 = \sup(A)$. ■

Ejemplo 2.3.6 Si $A \subset \mathbb{R}$ es finito y no vacío, $\sup(A) = \max(A)$ y en general si $\max(A) \in A$ entonces $\sup(A) = \max(A)$.

Ejemplo 2.3.7 Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados superiormente. Definimos $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Entonces $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Primero observe que $A + B \neq \emptyset$ y que $A + B$ es acotado superiormente por $\sup(A) + \sup(B)$ luego $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$. Ahora sea $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe $a + b \in A + B$ tal que

$$\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$$

Usamos 2.3.5 con $\varepsilon/2$ para encontrar $a \in A$ tal que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \sup(A)$ y $b \in B$ tal que $\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < b \leq \sup(B)$. Entonces, sumando término a término las desigualdades obtenemos $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$. Por lo tanto $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Ejemplo 2.3.8 (Principio de los supremos iterados) Sean A, B conjuntos no vacíos y $h : A \times B \to \mathbb{R}$ una función acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|h(x, y)| < M$ para todo $(x, y) \in A \times B$. Entonces

$$\sup\{h(x, y) : (x, y) \in A \times B\} = \sup\{g(x) : x \in A\} = \sup\{f(y) : y \in B\}$$

dónde $g(x) = \sup\{h(x, y) : y \in B\}$ y $f(y) = \sup\{h(x, y) : x \in A\}$.

Sea $\alpha = \sup\{h(x, y) : (x, y) \in A \times B\}$. Probemos que $\sup\{g(x) : x \in A\} = \alpha$. Claramente $\sup\{g(x) : x \in A\} \leq \alpha$ porque si $x' \in A$ es fija entonces

$$g(x') = \sup\{h(x', y) : y \in B\} \leq \sup\{h(x, y) : (x, y) \in A \times B\} = \alpha$$

lo cual exhibe a α como cota superior de $\{g(x) : x \in A\}$ de donde $\sup\{g(x) : x \in A\} \leq \alpha$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\sup\{g(x) : x \in A\} < \alpha$. Como $\alpha = \sup\{h(x, y) : (x, y) \in A \times B\}$ entonces existe (x_0, y_0) en $A \times B$ tal que

$$\sup\{g(x) : x \in A\} < h(x_0, y_0) \leq \alpha.$$

Pero como $g(x_0) = \sup\{h(x_0, y) : y \in B\}$ entonces

$$h(x_0, y_0) \leq g(x_0)$$

luego

$$h(x_0, y_0) \leq g(x_0) \leq \sup\{g(x) : x \in A\} < h(x_0, y_0)$$

lo cual no es posible. Por lo tanto $\sup\{g(x) : x \in A\} = \alpha$.

Análogamente se prueba que $\alpha = \sup\{f(y) \mid y \in B\}$.

Note que para comprobar que cierto número es el supremo de un conjunto, el teorema 2.3.5 obliga a encontrar elementos del conjunto arbitrariamente cercanos al posible supremo (pensando, como siempre, que la ε es pequeña). La siguiente sección está dedicada a una propiedad importante de los números reales que permite, entre otras cosas, encontrar números arbitrariamente pequeños a partir de los números naturales.

Paralela a la noción de supremo de un conjunto, como la mínima cota superior, si un conjunto es acotado inferiormente deberá tener una *máxima cota inferior*. Esta efectivamente existe y se conoce como el *ínfimo* del conjunto. Su existencia se deduce del axioma del supremo como sigue:

Proposición 2.3.9 *Si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene una única máxima cota inferior, denotada por* $\inf(A)$. *En otras palabras existe $c \in \mathbb{R}$ tal que c es cota inferior de A y para toda $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $c \leq a < c + \varepsilon$.*

Demostración

Considerar el conjunto $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Claramente $-A$ está acotado superiormente. Sea $b = \sup(-A)$. Veamos que $c := -b$ es máxima cota inferior de A. En efecto, como $b \geq -a$ para toda $a \in A$ entonces $a \geq -b$ para toda $a \in A$ por lo tanto $-b$ es cota inferior de A. Ahora, sea $\varepsilon > 0$. Como $b = \sup(-A)$ existe $-a \in -A$ tal que $b - \varepsilon < -a \leq b$ de donde $-b < a \leq -b + \varepsilon$ como se quería demostrar ■

Note que la proposición anterior en particular dice que $\inf(A) = -\sup(-A)$.

EJERCICIOS

✎ **2.1** En los siguientes incisos A y B son subconjuntos acotados de números reales positivos. Demuestre que

a) Si $A \cdot B := \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$ entonces $\sup(A \cdot B) = \sup(A)\sup(B)$.

b) Si $A^{-1} := \{1/a : a \in A\}$ entonces $\sup(A^{-1}) = 1/\inf(A)$.

✎ **2.2** Demuestre que si S es un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$ y $a < 0$ entonces $\sup(a \cdot S) = a\inf(S)$ y $\inf(a \cdot S) = a\sup(S)$.

✎ **2.3** Encuentre el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos. Si no existen indíquelo y justifique sus respuestas.

a) $\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

b) $\{0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots\}$ (la expansión es decimal).

c) $\{\frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

d) $\{x + \frac{1}{x} : x > 0\}$.

e) $(0, 1) \setminus \mathbb{Q}$.

✎ **2.4** Demostrar que si un conjunto acotado superiormente contiene a su supremo entonces éste es un máximo. ¿Cuál sería el resultado análogo para el ínfimo?

✎ **2.5** Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones acotadas, es decir $|f(x)|, |g(x)| \leq M$ para alguna $M > 0$ y para todo $x \in A$. Considere los siguientes números:

a) $\alpha = \inf\{f(x) : x \in A\} + \inf\{g(x) : x \in A\}$,

b) $\beta = \inf\{f(x) + g(x) : x \in A\}$,

c) $\gamma = \inf\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$,

d) $\delta = \sup\{f(x) + g(x) : x \in A\}$,

e) $\varepsilon = \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$.

Pruebe que $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta \leq \varepsilon$ y dé ejemplos dónde las desigualdades anteriores sean estrictas.

✎ **2.6 (Principio del mín-máx)** Sean A, B conjuntos no vacíos y $h : A \times B \to \mathbb{R}$ una función acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|h(x, y)| < M$ para todo $(x, y) \in A \times B$. Pruebe el principio de mín-max:

$$\sup_{b\in B}\left(\inf_{a\in A}\{h(a,b)\}\right) \leq \inf_{a\in A}\left(\sup_{b\in B}\{h(a,b)\}\right)$$

Exhiba ejemplos donde la desigualdad es estricta. Este principio puede pensarse como un juego en el cuál h es una función de pago y un jugador maximiza con respecto a a mientras que el otro minimiza con respecto a b.

2.4 Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$

Teorema 2.4.1 (Propiedad arquimediana) [5] *Si $x \in \mathbb{R}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.*

Demostración

Supongamos, por reducción al absurdo, que $n \leq x$ para toda $n \in \mathbb{N}$; es decir, $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Sea $\alpha = \sup(\mathbb{N})$. Entonces, para $\varepsilon = 1/2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1/2 < n_0 \leq \alpha$. Luego, al sumar uno a cada miembro de la desigualdad se obtiene que $\alpha < \alpha + \frac{1}{2} < n_0 + 1$. Como $n_0 + 1$ es un número natural, la desigualdad anterior muestra que α no es cota superior de $\mathbb{N}$, lo cual contradice la definición de α. ■

Aunque usamos el axioma del supremo para concluir la propiedad Arquimediana, vale la pena notar que hay campos ordenados que satisfacen la propiedad Arquimediana y no el axioma del supremo, por ejemplo, el campo de los números racionales.

Damos algunas reformulaciones de la propiedad Arquimediana que serán de gran utilidad. El primer inciso de 2.4.2 es el que históricamente se conoce como la propiedad Arquimediana (una suma suficientemente grande de segmentos de longitud arbitrariamente

[5] Arquímedes de Siracusa, 287-212a.c.

pequeña superará en valor a la longitud de un segmento dado). La versión más útil de la propiedad Arquimediana es el segundo inciso de 2.4.2.

Corolario 2.4.2 *Si x, y son números reales positivos, entonces*

a) *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$*

b) *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < x$*

c) *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq x < n$*

Demostración

Por la propiedad Arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{y}{x} < n$. Entonces $y < nx$.

También por la propiedad Arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{x} < n$. Luego $0 < \frac{1}{n} < x$.

Elegimos, por la propiedad Arquimediana, $m \in \mathbb{N}$ tal que $x < m$. Entonces el conjunto $E = \{k \in \mathbb{N} : x < k\}$ es no vacío. Por el principio de buen orden 1.3.6, el conjunto E tiene un primer elemento, digamos n. Por ser n primer elemento de E tenemos que $n - 1 \notin E$ luego $n - 1 \leq x$ y por lo tanto $n - 1 \leq x < n$ como se quería probar. ■

Algunas propiedades de los números reales que ilustran la utilidad de la propiedad Arquimediana son, por ejemplo,

Ejemplo 2.4.3 Si $A = (0, 1)$ entonces $\sup(A) = 1$. Claramente 1 es cota superior de A y si $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $a \in (0, 1)$ tal que $1 - \varepsilon < a$; pero por la propiedad Arquimediana (corolario 2.4.2) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Podemos suponer que $n > 1$ y así $a = 1 - \frac{1}{n}$ es el número buscado pues $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} < 1$.

Proposición 2.4.4 *Si x, y son números reales con $0 < x < y$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.*

Demostración

Sean x, y en $\mathbb{R}$. Por la propiedad Arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < y - x$. Deseamos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $x < \frac{m}{n} < y$. Por la propiedad Arquimediana, existe

$k \in \mathbb{N}$ tal que $nx < k$. Entonces $A = \{k \in \mathbb{N} : nx < k\} \neq \emptyset$. Por el principio del buen orden A tiene un primer elemento, digamos m. Entonces

$$nx < m \quad \text{o bien} \quad x < \frac{m}{n}$$

Resta ver que $\frac{m}{n} < y$. Si $y \leq \frac{m}{n}$ entonces

$$\frac{1}{n} < y - x \leq \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} = \frac{1}{n}$$

ya que $\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$ y m es primer elemento de A. Entonces $\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\frac{m}{n} < y$ y tenemos que $x < \frac{m}{n} < y$ como se quería. ■

Como consecuencia del axioma del supremo y de la propiedad Arquimediana podemos en este momento demostrar la existencia del número $\sqrt{2}$. El lector recordará que sabíamos que $\sqrt{2}$ no es un número racional, pero su existencia sólo se había argumentado geométrica y no analíticamente.

Proposición 2.4.5 *Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = 2$.*

Demostración

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2 \text{ y } x > 0\}$. $A \neq \emptyset$ porque $1 \in A$. También A está acotado superiormente porque $x \leq 2$ para toda $x \in A$. En efecto, si $2 < x$ para alguna $x \in A$ entonces $4 < x^2$, lo cual no es posible. Por el axioma del supremo existe $x_0 = \sup(A)$. Probaremos que $x_0^2 = 2$. Por tricotomía basta probar que los casos $x_0^2 > 2$ y $x_0^2 > 2$ no son posibles.

Supongamos que $x_0^2 < 2$. La idea es mostrar que ésta desigualdad estricta permite una pequeña perturbación: encontraremos un número ligeramente mayor a x_0 en A, cuyo cuadrado también es menor a 2, esto no es posible si x_0 es el supremo de A. Elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_0^2\left(1 + \frac{3}{n}\right) < 2.$$

(¿por qué existe tal n?) y veamos que $x_0(1 + \frac{1}{n})$ es un elemento de A:

$$\begin{aligned}\left(x_0\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 &= x_0^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\\ &< x_0^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=x_0^2\left(1+\frac{3}{n}\right)<2\end{aligned}$$

Se obtiene así una contradicción pues $x_0\left(1+\frac{1}{n}\right)\in A$ y $x_0\left(1+\frac{1}{n}\right)>x_0=\sup(A)$. Luego x_0^2 no es menor a 2.

Supongamos ahora que $x_0^2>2$. Elegimos $n\in\mathbb{N}$ tal que $x_0^2\left(1-\frac{2}{n}\right)>2$. ¿por qué existe tal n? Observe que para tal n se tiene

$$\begin{aligned}\left(x_0\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2 &= x_0^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\\ &= x_0^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)>x_0^2\left(1-\frac{2}{n}\right)>2\end{aligned}$$

y como $x_0\left(1-\frac{1}{n}\right)<x_0=\sup(A)$, entonces existe $\tilde{x}\in A$ tal que

$$x_0\left(1-\frac{1}{n}\right)<\tilde{x}\leq x_0$$

entonces

$$2<\left(x_0\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2<\tilde{x}^2<2.$$

Luego x_0^2 no puede ser mayor que 2. Por lo tanto, $x_0^2=2$ y $\sqrt{2}$ existe. ■

Bueno, ya tenemos un número irracional. Probemos ahora que hay irracionales por doquier. Primero enunciamos el siguiente lema aritmético cuya prueba se deja al lector.

Lema 2.4.6 *Sean $r\in\mathbb{Q}$ y $\xi,\zeta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, entonces*

a) *Si $r\neq 0$ entonces $r\xi\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.*

b) $r+\xi\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

c) *$\xi\cdot\zeta$ puede ser racional o irracional.*

d) $\xi + \zeta$ *puede ser racional o irracional.*

Proposición 2.4.7 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *es denso en* $\mathbb{R}$*, es decir, para todos* $x, y \in \mathbb{R}$ *con* $x < y$*, existe* $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *tal que* $x < \xi < y$.

Demostración

Considere el intervalo $(\sqrt{2}x, \sqrt{2}y)$. Sabemos que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{2}x < r < \sqrt{2}y$. Entonces $x < \frac{r}{\sqrt{2}} < y$. Si $r \neq 0$ entonces $\frac{r}{\sqrt{2}}$ es irracional y tenemos el número buscado. Si $r = 0$, sabemos que existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < s < \sqrt{2}y$ luego $\sqrt{2}x < s < \sqrt{2}y$ de donde $x < \frac{s}{\sqrt{2}} < y$ con $\frac{s}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ como se quería. ■

EJERCICIOS

✎ **2.7** Pruebe que para todo $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < x$.

✎ **2.8** Enuncie y demuestre una proposición equivalente a 2.4.4 cuando los números reales dados no necesariamente sean positivos.

✎ **2.9** Pruebe que cada una de los incisos del corolario 2.4.2 es equivalente a la propiedad Arquimediana.

✎ **2.10** Sea $c < 0$. Sea u_n una sucesión tal que $0 < u_n < c/2^n$. Demostrar que

$$\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

2.5 Principio de intervalos anidados

Uno de los grandes teoremas del cálculo, el teorema de Bolzano (valor intermedio), dice que si se tiene una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y la función toma dos valores con signo distinto, entonces existe una $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$. Lo que no dice el teorema es en dónde está c. Para aproximar a c lo que hacemos es construir, por intento y error, una sucesión de intervalos anidados

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots$$

de tal manera que el valor de f en los extremos de cada uno de los intervalos tenga signo distinto ($f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$). El proceso puede continuar hasta que el límite de nuestra paciencia o la precisión de la computadora lo permita y darnos una buena aproximación al valor de c. La garantía que ofrece el *principio de intervalos anidados* es que si pudiésemos continuar indefinidamente la construcción de los intervalos anidados entonces habrá un punto en común a todos ellos, es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

En apariencia obvio, el principio de intervalos anidados (también conocido como teorema del encaje de Cantor) es bastante sutil: no cualquier intersección de intervalos anidados es no vacía, por ejemplo,

Ejemplo 2.5.1 sea $I_n = (0, 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1/n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$$

El principio también es falso si los intervalos no son acotados, por ejemplo, si $I_n = [n, \infty)$ entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Los intervalos deberán ser entonces cerrados y acotados:

Teorema 2.5.2 (Principio de intervalos anidados) *Sea $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ tal que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

$\boxed{\text{Demostración}}$

Primero probemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, b_m es cota superior del conjunto de extremos izquierdos de los intervalos: $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $n \leq m$ entonces $b_m \geq a_m \geq a_n$ y si $n > m$ entonces $b_m \geq b_n \geq a_n$. Por lo tanto el supremo de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ existe y además es menor o igual que cada b_m para toda $m \in \mathbb{N}$. En particular, el conjunto de extremos derechos de los intervalos, $\{b_m : m \in \mathbb{N}\}$ está acotado inferiormente por $\alpha := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, luego $\beta := \inf\{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ existe y $\beta \geq \alpha$. Veamos que

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Sea $x \in [\alpha, \beta]$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $a_n \leq \alpha \leq x \leq \beta \leq b_n$ entonces $x \in [a_n, b_n] = I_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Esto termina la demostración. ■

Notemos que en la demostración anterior podemos concluir que la intersección no sólo no es vacía sino que puede ser o un sólo punto (¿cuándo sucede esto?) o una cantidad no numerable de puntos, esto es todo un intervalo.

Note que la prueba del principio de intervalos anidados depende del axioma del supremo de los números reales. No es difícil probar que el axioma del supremo se deduce del principio de intervalos anidados y la propiedad Arquimediana.

EJERCICIOS

✎ **2.11** Pruebe que en el principio de intervalos anidados, 2.5.2, la intersección de los intervalos es un único punto si y sólo si $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ (es decir, si la longitud de los intervalos decrece a cero).

✎ **2.12** Use el principio de intervalos anidados 2.5.2, para mostrar que el intervalo $[0, 1]$ no es numerable. *Sugerencia:* Suponer que $[0, 1]$ es numerable. Entonces, sabemos que existe $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ sobre. Sea $x_n := f(n)$, elija el intervalo de longitud $1/3$ que no contiene a x_1. Después, elija el intervalo contenido en el intervalo anterior, de longitud $1/9$ que no contiene a x_2 y así sucesivamente.

✎ **2.13** Sean $0 < a_1 < b_1$ dos números positivos distintos. Sean $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ y $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Demostrar

a) $0 < a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Si se define $I_n = [a_n, b_n]$ se obtiene una sucesión de intervalos anidados $I_{n+1} \subset I_n$.

c) $b_n - a_n < (b_1 - a_1)/2^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) La intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ de los intervalos es un único punto.

✎ **2.14** Pruebe que si $0 < \varepsilon < 1$ entonces $(1+\varepsilon)^n \leq 1 + 3^n\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

✎ **2.15** Pruebe que si $0 < t < 1$ entonces $t^n < t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que si $t \geq 1$ entonces $t^n \geq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $0 < a < b$ si y sólo si $a^{1/n} < b^{1/n}$.

✎ **2.16 (Raíces enésimas)** Sea $a > 0$ un número real y $n \in \mathbb{N}$. Prueba que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0^n = a$ llamada la *raíz enésima de a*. (*Sugerencia:* Tenga presente el ejercicio 2.14. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^n < a\}$; pruebe que $x_0 = \sup(A)$ existe. Como en la demostración de la proposición 2.4.5 se eliminan los casos $x_0^n < a$ y $x_0^n > a$ considerando

$$y = x_0(1+\varepsilon) \quad \text{con} \quad 0 < \varepsilon < \frac{a - x_0^n}{3^n x_0^n} \quad \text{si} \quad x_0^n < a \quad \text{y}$$

$$y = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)x_0 \quad \text{con} \quad 0 < \varepsilon < \min\left\{1, \frac{x_0^n - a}{3^n a}\right\} \quad \text{si} \quad x_0^n > a.)$$

✎ **2.17 (Las reglas de los exponentes)** Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos $a^0 = 1$, $a^1 = a$ y, en forma inductiva, $a^{n+1} = a \cdot a^n$, $n \in \mathbb{N}$. Compruebe por inducción las siguientes reglas de exponentes:

a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, con $a \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

b) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

c) $(a^n)^m = a^{nm}$, $a \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

✎ **2.18** Si $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos

$$a^n = \begin{cases} a^n, & \text{si } n \geq 0; \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Enuncie y demuestre las propiedades de exponentes análogas para exponentes en $\mathbb{Z}$ del ejercicio 2.17.

✎ **2.19** Si a es un número real positivo y $n \in \mathbb{N}$, denotamos a la raíz enésima de a como $a^{1/n}$ (vea el ejercicio 2.16) y definimos para $r = p/q \in \mathbb{Q}$, $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{1/q}\right)^p$. Enuncie y demuestre las propiedades de exponentes análogas para exponentes en $\mathbb{Q}$ del ejercicio 2.17. Discuta las posibles extensiones para números reales a no necesariamente positivos.

✎ **2.20** Si a es un número real positivo y r es un número real, definimos

$$a^r = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq r\}.$$

Pruebe que a^r está bien definido (es decir que el supremo del conjunto que lo define existe) y enuncie y demuestre las propiedades de exponentes análogas para exponentes en $\mathbb{R}$ del ejercicio 2.17.

✎ **2.21** A continuación damos otra demostración de la existencia de un número $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0^2 = 2$. Sea $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \frac{2x + 2}{x + 2}.$$

Sea $a_1 = 1$ y $b_1 = 2$. Se define recursivamente $a_{n+1} = g(a_n)$ y $b_{n+1} = g(b_n)$. Demostrar lo siguiente.

a) Si $0 < x < y$ entonces $0 < g(x) < g(y)$. Concluir que $0 < a_n < b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $[a_{n+1}, b_{n+1}] = g([a_n, b_n])$.

c) $a_n^2 < 2$ y $a_n < a_{n+1}$. (*Sugerencia:* demostrar por inducción.)

d) $b_n^2 > 2$ y $b_n < b_{n+1}$. Concluir que $[a_n, b_n]$ es una sucesión de intervalos anidados.

e) $b_n - a_n < 3/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

f) La intersección de los intervalos es un único punto. Esto es

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}.$$

g) El punto x_0 satisface $g(x_0) = x_0$. Concluir que $x_0^2 = 2$.

✎ **2.22** Sea $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ tal que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean $\alpha = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, y $\beta = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. En la demostración del principio de intervalos anidados 2.5.2, se demostró la contención

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Demostrar la igualdad $[\alpha, \beta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. (*Sugerencia:* considerar el teorema 2.3.5.)

Capítulo 3

Espacios Métricos

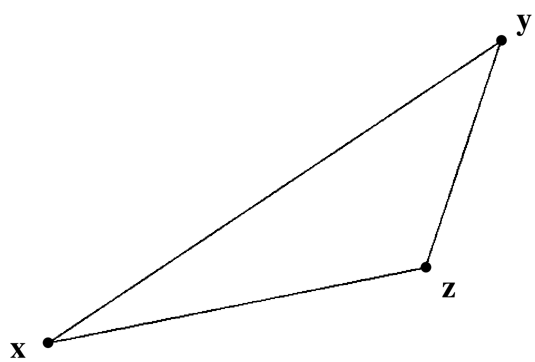
3.1 ¿Cómo y con qué medir?

Medir es una actividad inherente a la naturaleza humana. No hay duda de que casi cualquier actividad del ser humano puede verse como una acción de medir, pues medir es comparar y comparamos a cada instante. Nuestro interés en esta sección es medir la distancia entre cualesquiera dos puntos de un conjunto dado y el primer paso será determinar una buena noción de distancia. Quizá el lector recuerde la *fórmula cartesiana de la distancia* en $\mathbb{R}^n$: dados dos puntos en $\mathbb{R}^n$, digamos, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ entonces la distancia de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ es:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \tag{3.1}$$

¿De dónde viene esta fórmula para medir la distancia? La fórmula está inspirada en el hecho de que la trayectoria más corta entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ es el segmento de recta que los une. Luego, la distancia entre los puntos será la longitud de tal segmento, misma que se calcula y resulta en la fórmula (3.1), vía el teorema de Pitágoras.

Geométricamente, la idea de optimalidad está detrás de la fórmula de la distancia; es decir, el hecho de que la ecuación (3.1) calcule la longitud de la trayectoria más corta entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, dice que para ir de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ siempre recorreremos un camino más largo si vamos por una trayectoria que contenga algún punto **z** que no se encuentre sobre el segmento de recta entre **x** y **y**. Esta propiedad evidente (figura c), es lo que se conoce como *desigualdad del triángulo* y es una de las tres propiedades que definirán la noción de métrica o distancia.



Ciertamente se desea que la distancia entre dos puntos sea una magnitud no negativa y que sea simétrica (es decir, es lo mismo medir la distancia de aquí a allá que de allá a aquí). La definición formal de distancia en un conjunto dado es como sigue:

Definición 3.1.1 *Sea X un conjunto no vacío. Una* métrica *o* distancia *en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:*

a) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

b) $d(x, y) = d(y, x)$ *para todas* $x, y \in X$.

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para todas* $x, y, z \in X$ *(desigualdad del triángulo).*

A la pareja (X, d) *se le llama* espacio métrico.

Nota. El lector avezado se preguntará porque no se incluye en la definición de distancia que ésta sea no-negativa. La razón es que ésta propiedad se deduce fácilmente (¿como?) de las tres condiciones que definen a una métrica.

Ejemplo 3.1.2 En $\mathbb{R}$, el valor absoluto es una métrica. Recordemos que la función valor absoluto está dada por: $|\cdot| : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

y que la distancia entre dos números reales está dada por $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(a, b) = |a - b|$. Para comprobar que d es en efecto una métrica, note que las primeras dos condiciones de la definición de métrica se satisfacen porque el valor absoluto cumple que $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$ y que $|a| = |-a|$ para toda $a \in \mathbb{R}$. Para probar la desigualdad del triángulo, $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$, basta probar que si $e, f \in \mathbb{R}$ entonces $|e + f| \leq |e| + |f|$ y luego sustituir $e = a - c$ y $f = c - b$. Si tanto e como f tienen el mismo signo entonces $|e + f| = |e| + |f|$. Por otro lado, si tienen signos distintos, digamos $e \geq 0$ y $f < 0$, entonces si $e + f \geq 0$ se tiene que,

$$|e + f| = e + f < e - f = |e| + |f|,$$

mientras que si $e + f < 0$ entonces

$$|e + f| = -(e + f) = -e - f \leq e - f = |e| + |f|.$$

El caso $e < 0$ y $f \geq 0$ se resuelve en forma análoga.

Ejemplo 3.1.3 (La métrica discreta) La métrica más simple y que además es de gran utilidad para obtener contraejemplos, es la *métrica discreta*. Sea X un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Veamos que efectivamente d es una métrica: por definición $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Además si $x = y$ entonces $d(x, y) = 0 = d(y, x)$ y si $x \neq y$ entonces $d(x, y) = 1 = d(y, x)$. Ahora, para comprobar la desigualdad del triángulo, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, analizamos los siguientes casos, si $x = y$, $d(x, y) = 0$ y $0 < d(x, z) + d(z, y)$ y si $x \neq y$ entonces $d(x, y) = 1$; por otro lado, si $x = z$ entonces $y \neq z$ luego $d(x, z) + d(z, y) =$

$1 \geq d(x, y)$. Finalmente, si $x \neq z$ entonces $d(x, z) = 1$ y por lo tanto $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, z) = 1 = d(x, y)$.

Note que el ejemplo anterior muestra que, usando la métrica discreta, *cualquier* conjunto no vacío se puede convertir en un espacio métrico.

Ejemplo 3.1.4 En $\mathbb{R}^n$ si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definimos la *métrica euclidiana usual* por,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Entonces $(\mathbb{R}^n, d)$ es un espacio métrico. La demostración de que d es una métrica se dificulta al tratar de mostrar la desigualdad del triángulo, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, o bien,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Haremos la demostración en un contexto un poco más general en la siguiente sección (ver Proposición 3.2.10).

3.2 Espacios vectoriales normados

Cuando X es un espacio vectorial (que asumiremos a lo largo de estas notas es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales) las métricas útiles son aquellas que de alguna manera "respetan" la estructura de espacio vectorial. Querríamos por ejemplo que la distancia entre vectores de X no cambie cuando trasladamos estos vectores por un vector fijo (éstas se llaman *métricas invariantes*). También esperaríamos que al multiplicar un vector por un escalar, la magnitud del nuevo vector varíe de acuerdo al factor escalar en la misma proporción. La noción de *norma* es la que define la métrica más importante en espacios vectoriales.

Definición 3.2.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una* norma *en X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisface:*

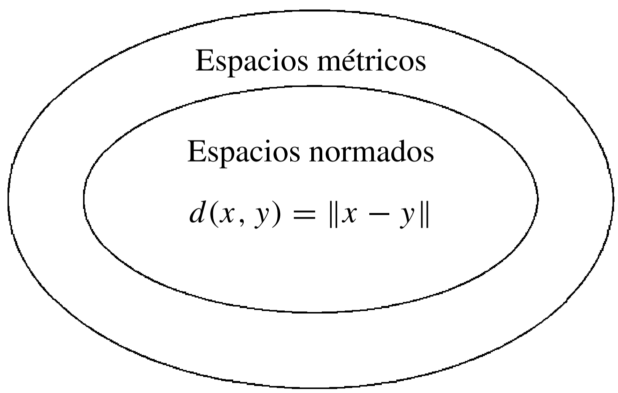
a) $\|x\| \geq 0$ *para toda* $x \in X$ *y* $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ *para toda* $x \in X$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *para toda* $x, y \in \mathbb{R}$.

A la pareja $(X, \|\cdot\|)$ *se le llama* espacio normado.

Note que todo espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico. Fácilmente se verifica que $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in X$, es una métrica en X.



Ejemplo 3.2.2 En $\mathbb{R}$, el valor absoluto es una norma. Así, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio normado.

Ejemplo 3.2.3 (La norma del taxista) También conocida como *distancia de Hamming* o *distancia de Shannon* por su uso en criptografía, la *norma del taxista* o *norma uno* en $\mathbb{R}^n$ se define vía:

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Que $\|\cdot\|_1$ es una norma se sigue directamente de que el valor absoluto es una norma.

Ejemplo 3.2.4 (La norma infinito) La *norma infinito* en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

Se deja como ejercicio al lector probar que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma.

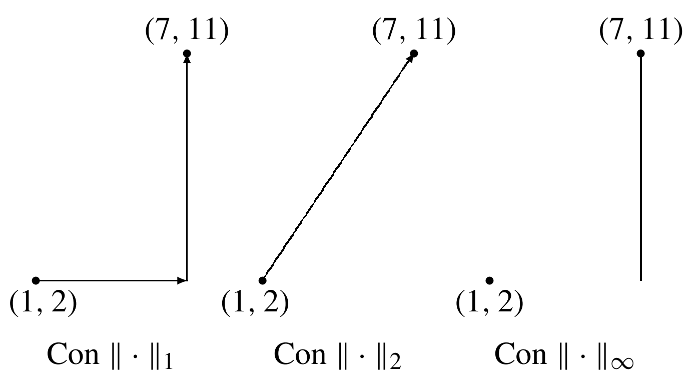
Ejemplo 3.2.5 (La norma euclideana usual) La norma euclideana usual en $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_2$, como probaremos más adelante, también es una norma. Recordamos que esta norma está definida por,

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

Ejemplo 3.2.6 Veamos con un ejemplo que mide cada una de las normas que acabamos de definir en $\mathbb{R}^2$. Esto ilustrará en particular porque la norma uno, por ejemplo, se llama norma del taxista.

$$\begin{aligned}
\|(1,2)-(7,11)\|_2 &= \sqrt{117} \\
\|(1,2)-(7,11)\|_1 &= |1-7|+|2-11| = 15 \\
\|(1,2)-(7,11)\|_\infty &= \max\{|1-7|, |2-11|\} = \max\{6,9\} = 9
\end{aligned}$$

La longitud total de los segmentos que unen los puntos $(1,2)$ y $(7,11)$ en la siguiente figura, es el valor de la distancia en cada una de las métricas.



La norma euclideana usual en $\mathbb{R}^n$ es un tipo particular de norma, pues como el lector recordará, es una norma inducida por un *producto interior*. Para continuar con nuestra lista de ejemplos de normas, veremos, en general, la noción de norma inducida por un producto interior y probaremos finalmente que normas como la euclideana son en efecto normas.

Definición 3.2.7 *Sea X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un* producto interior *o* producto punto *sobre X es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que*

a) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *para toda $x \in X$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.*

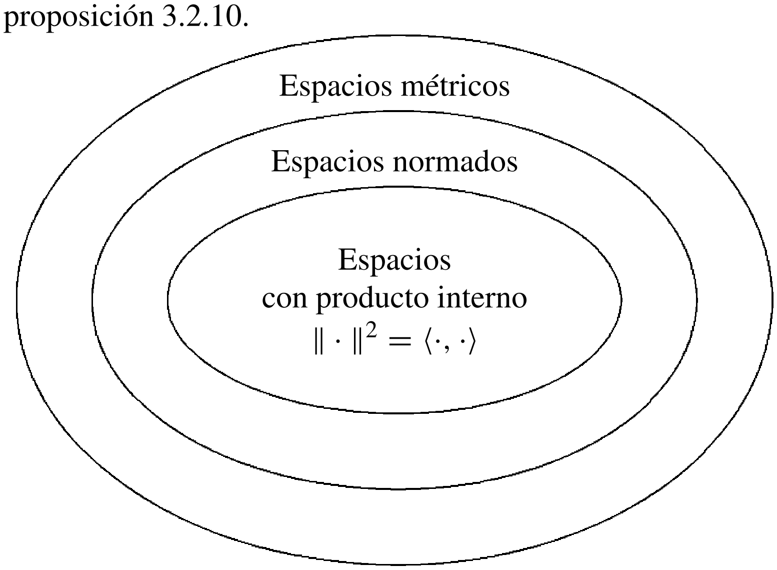
b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ *para todas $x, y, z \in X$.*

c) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ *para todas $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

d) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *para todas $x, y \in X$.*

A la pareja $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le llama espacio con producto interior.

En los espacios con producto interior se pueden reproducir los principios geométricos que conocemos de los espacios euclideanos $\mathbb{R}^n$, porque en principio la noción de ángulo se define a partir del producto punto y ciertamente se tiene una noción de distancia como veremos en la proposición 3.2.10.



Ejemplo 3.2.8 En $\mathbb{R}^n$,

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

es un producto interior.

Ejemplo 3.2.9 Dada una matriz positiva definida A de $n \times n$, el siguiente es un producto interior en $\mathbb{R}^n$.

$$\langle x, y\rangle = x^T A y^{\cdot}$$

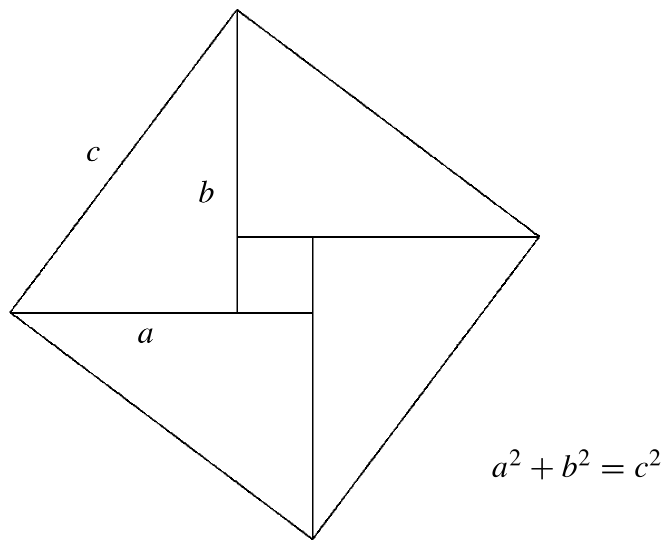
De hecho, también se puede demostrar que todos los productos internos de $\mathbb{R}^n$ son de esta forma; es decir, provienen de una matriz positiva definida.

Proposición 3.2.10 *Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interior. Entonces la función de X en $\mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ es una norma. Es la llamada* norma inducida por el producto interior.

Como el lector comprobará en los ejercicios, existen normas que *no* son inducidas por un producto interior. De hecho, invitamos al lector a descubrir una condición geométrica necesaria y suficiente para que una norma sea inducida por un producto interior.

La demostración de la proposición 3.2.10 es fácil hasta que uno quiere probar que la norma satisface la desigualdad del triángulo. Para esto necesitaremos de los siguientes dos lemas. En lo que sigue denotaremos provisionalmente $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, que eventualmente se demostrará que es norma.

Lema 3.2.11 (Teorema de Pitágoras) . *Sean $x, y \in X$. Entonces $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (recuerde que nuestros espacios vectoriales son sobre $\mathbb{R}$).*



Demostración

Por definición de $\|\cdot\|$ y propiedades del producto interno tenemos que

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle.$$

Luego $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si y sólo si $\langle x, y\rangle = 0$. ■

Definición 3.2.12 *Sea X un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{R}$ y sean $x, y \in X$. Suponer que $y \neq 0$. Se define la proyección de x sobre y como*

$$\mathrm{proy}_y(x) = \left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\right) y.$$

El siguiente resultado caracteriza a las proyecciones.

Proposición 3.2.13 *Sea X un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{R}$ y sean $x, y \in X$. Suponer que $y \neq 0$. Entonces la proyección de x sobre y es el único elemento $\mathrm{proy}_y(x) \in X$ tal que*

$$\langle x - \mathrm{proy}_y(x), y\rangle = 0.$$

Lema 3.2.14 (Desigualdad de Cauchy-Buniakovsky-Schwarz) *(CBS[1] [2][3]) Sea X un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{R}$ y sean $x, y \in X$. Entonces*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Con igualdad si y sólo si $x = \lambda y$ o $y = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración

Sean $x, y \in X$. Si alguno de x o y es cero el resultado es claro. Supongamos que ninguno de ellos es cero y denotamos por $\mathrm{proy}_y(x)$ a la proyección de x sobre y. Sabemos que $\langle x - \mathrm{proy}_y(x), y\rangle = 0$, luego por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x - \mathrm{proy}_y(x) + \mathrm{proy}_y(x)\|^2 = \|x - \mathrm{proy}_y(x)\|^2 + \|\mathrm{proy}_y(x)\|^2 \\ &\geq \|\mathrm{proy}_y(x)\|^2 = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2\end{aligned}$$

De donde $\|x\|^2\|y\|^2 \geq |\langle x, y\rangle|^2$, es decir, $\|x\|\|y\| \geq |\langle x, y\rangle|$.

Además $\|x\|\|y\| = |\langle x, y\rangle|$ si y sólo si $\|x - \mathrm{proy}_y(x)\| = 0$ o equivalentemente

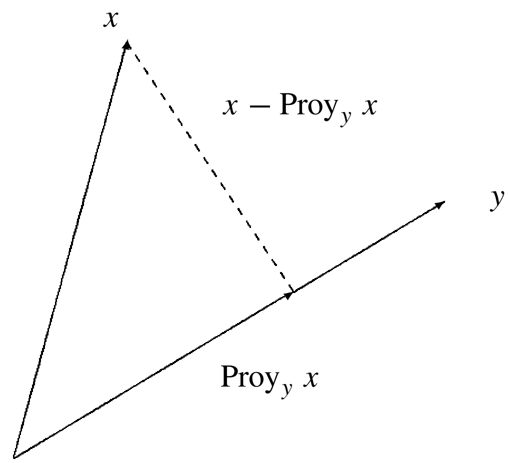
$$x = \mathrm{proy}_y(x) = \left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\right) y.$$

es decir, $\lambda = (\langle x, y\rangle / \|y\|^2)$. ■

[1] Augustin Louis Cauchy, 1789-1857.

[2] Viktor Yakovlevich Buniakovsky, 1804-1889.

[3] Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921.



Probemos ahora la desigualdad del triángulo en la proposición 3.2.10

Demostración

Sean $x, y \in X$. Por la desigualdad 3.2.14 tenemos que

$$\|x+y\|^2 = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

de donde $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ■

Ejemplo 3.2.15 (las normas p) La generalización natural de la norma euclideana en $\mathbb{R}^n$ es la llamada *norma p*. Si $1 \leq p < \infty$ es un número real, entonces

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$. Note que el caso particular $p = 2$ corresponde a la norma euclideana usual. Al igual que las normas inducidas por un producto punto, probar la desigualdad del triángulo para la norma p, $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, no es trivial. La desigualdad del triángulo también se conoce como *desigualdad de Minkowski*[4]. Para mostrar esta desigualdad se usarán los siguientes dos lemas.

[4]Hermann Minkowski, 1864-1909.

Lema 3.2.16 (Desigualdad de Young) [5] *Si a, b son reales positivos y p, q son exponentes conjugados, es decir, p y q son tales que* $p, q > 1$ *y* $1/p + 1/q = 1$ *entonces*

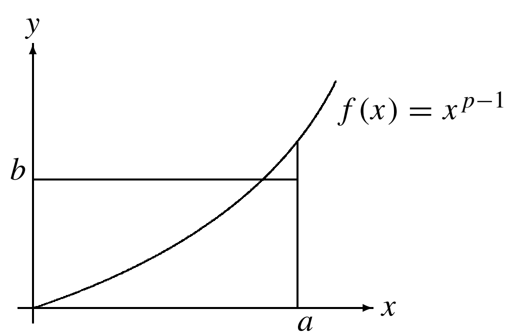
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demostración

Primero observe que como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces $\frac{1}{p-1} = q - 1$ y $(p-1)q = p$. Considere la función $x \mapsto x^{p-1}$ y su inversa $x \mapsto x^{q-1}$. Entonces,

$$\int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p} \quad \text{y} \quad \int_0^b x^{q-1} dx = \frac{b^q}{q}$$

Las integrales corresponden a áreas en la figura siguiente.



La comparación de estas áreas muestra que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

como se quería demostrar. ■

Nota. La noción de exponente conjugado se extiende a valores $p, q \in [1, \infty]$. El exponente conjugado de $p = 1$ es $q = \infty$.

[5]William Henry Young, 1863-1942.

Lema 3.2.17 (Desigualdad de Hölder) [6] *Si p y q son exponentes conjugados y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Si $p = 1$ y $q = \infty$ la desigualdad es así:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right).$$

Demostración

Probaremos la desigualdad de Hölder para el caso $1 < p, q < \infty$. El caso $p = 1$, $q = \infty$ se deja al lector.

Primero observe que la desigualdad es cierta si alguno de $\mathbf{x}$ o $\mathbf{y}$ es $\overline{0}$. Supondremos entonces que $\mathbf{x} \neq \overline{0} \neq \mathbf{y}$.

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sean,

$$a_j = \frac{|x_j|}{\|\mathbf{x}\|_p} \quad \text{y} \quad b_j = \frac{|y_j|}{\|\mathbf{y}\|_q}$$

Por la desigualdad de Young tenemos que

$$a_j b_j \leq \frac{a_j^p}{p} + \frac{b_j^q}{q}$$

para toda $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} a_j^p + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} b_j^q$$

[6] Otto Ludwig Hölder, 1859-1937.

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p \ \|\mathbf{y}\|_q} \sum_{j=1}^{n} |x_i| \ |y_i| &\leq \frac{1}{p} \ \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \ \sum_{j=1}^{n} \frac{|y_j|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p^p} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\|\mathbf{y}\|_q^q} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \\
&= \ \frac{1}{p} \frac{\|\mathbf{x}\|_p^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\|\mathbf{y}\|_q^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ = \ 1
\end{aligned}$$

luego,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j||y_j| \leq \|\mathbf{x}\|_p \ \|\mathbf{y}\|_q,$$

como se quería demostrar. ■

Comprobemos ahora la desigualdad del triángulo (Minkowski) para la norma p.

Demostración

Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}$, $p > 1$ y q el exponente conjugado de p. Una vez que tenemos la desigualdad de Hölder, el truco que lleva a la desigualdad de Minkowski es puramente aritmético, en efecto:

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}(|x_i+y_i|) \\
&\le \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}(|x_i|+|y_i|) \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}|y_i| \\
&\le \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p}\right)^{1/q} (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \\
&= \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p/q}\left(\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p\right)
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p-p/q} \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$$

Pero note que $p - p/q = p(1 - 1/q) = p/p = 1$. Luego,

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$$

que es lo que se quería probar. ■

Si el lector se preguntaba por qué se excluyen en las normas p los valores $0 < p < 1$, la razón es que si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces la expresión

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

no es una norma en $\mathbb{R}^n$ (¿por qué?). Sin embargo,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p$$

sí es una métrica en $\mathbb{R}^n$. Esta métrica, como veremos en la siguiente sección, es hasta cierto punto patológica: las esferas en estos espacios, por ejemplo, ni siquiera son convexas (redondas).

3.3 Hacia la topología de espacios métricos.

La métrica en un espacio define lo que se conoce como *la topología del espacio*. La noción básica en topología es la de *vecindad de un punto*. En espacios métricos, las vecindades de puntos están dadas por las llamadas *bolas abiertas* que definimos a continuación:

Definición 3.3.1 (Bolas) *Sea* (X, d) *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $\varepsilon > 0$*, la* bola abierta de radio ε centrada en x *o la* ε-vecindad de x *es:*

$$\{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

y se denota por $B^d_\varepsilon(x)$*. Cuando no haya confusión o la métrica sea obvia por el contexto, eliminaremos la* d *en* $B^d_\varepsilon(x)$*. También se denotara una bola como* $B^d(x, \varepsilon)$*.*

Note que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado y $x \in X$, $\varepsilon > 0$ entonces

$$B^{\|\cdot\|}_\varepsilon(x) = \{y \in X \ : \|y - x\| < \varepsilon \}.$$

Ejemplo 3.3.2 En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, las bolas abiertas son los intervalos abiertos. En efecto, si $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ entonces,

$$B^{|\cdot|}_\varepsilon(a) = \{b \in \mathbb{R} : |b - a| < \varepsilon \} \ = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Por otro lado, cualquier intervalo abierto en $\mathbb{R}$ es una bola: $(a, b) = B^{|\cdot|}_\varepsilon(c)$, donde $c = \frac{a+b}{2}$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}|b - a| = |\frac{a+b}{2} - a|$.

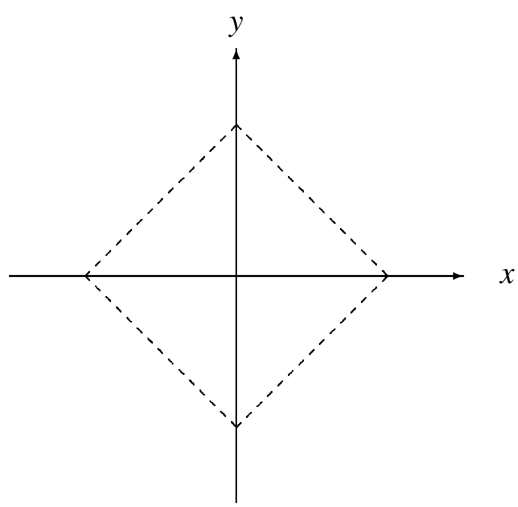
En un espacio vectorial normado, cualquier bola abierta se obtiene con una traslación y una homotecia de la *bola unitaria* abierta, es decir la bola de radio uno centrada en el cero. En efecto, como el lector deberá comprobar,

$$B_\varepsilon(x) = x + \varepsilon B_1(\overline{0})$$

La descripción de la bola unitaria es un primer acercamiento a descubrir la geometría del espacio. A continuación damos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.3.3 En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$,

$$B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}(x) = B_1^{\|\cdot\|_1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_1 < 1\} = \{(x,y) : |x| + |y| < 1\}.$$



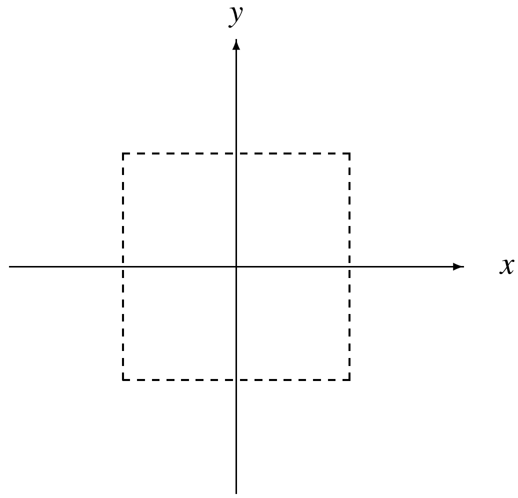
Ejemplo 3.3.4 En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$,

$$B_1^{\|\cdot\|_2}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_2 < 1\} = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\},$$

es el círculo unitario.

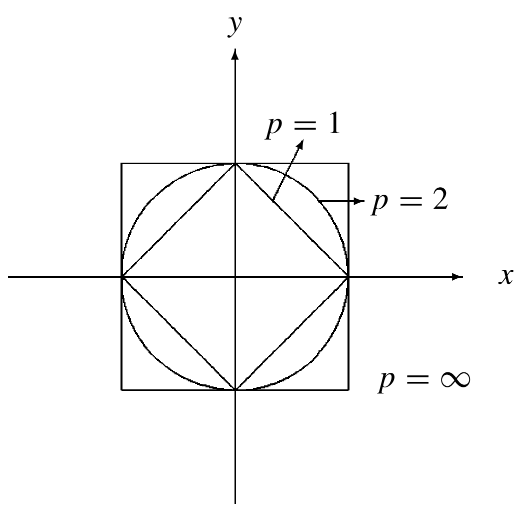
Ejemplo 3.3.5 En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$,

$$B_1^{\|\cdot\|_\infty}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_\infty < 1\} = \{(x,y) : \max\{|x|, |y|\} < 1\}.$$



Ejemplo 3.3.6 Si $p \geq 1$, en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$

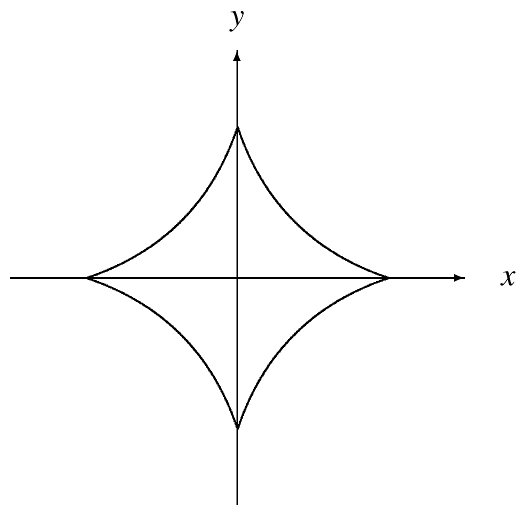
$$B_1^{\|\cdot\|_p}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_p < 1\} = \{(x,y) : x^p + y^p < 1\}$$



Ejemplo 3.3.7 Si $0 < p < 1$, en $(\mathbb{R}^2, d)$ con $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 - y_1)^p + (x_2 - y_2)^p$,

$$B_1^d(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (0, 0)) < 1\} = \{(x, y) : \ x^p + y^p < 1\}$$

Note que para esta métrica las bolas ni siquiera son convexas



Los ejemplos anteriores muestran cómo la geometría del espacio cambia radicalmente con la manera de medir. Sin embargo, como veremos en el siguiente capítulo, topológicamente todas las normas que hemos dado en $\mathbb{R}^n$ son indistinguibles, pues las vecindades (recuerde que estos son los objetos básicos de la topología) no cambian al pasar de una norma a otra. Esta invariancia es de hecho el espíritu de la topología: dos objetos que se pueden deformar continuamente uno en el otro son iguales desde el punto de vista topológico. Piense, por ejemplo, en un disco de hule (la bola unitaria con respecto a $\| \cdot \|_2$) deformada en un cuadrado de hule (la bola unitaria con respecto a $\| \cdot \|_\infty$). La equivalencia entre normas se escribe así:

Definición 3.3.8 *Sea X un espacio vectorial. Dos normas $\| \cdot \|$ y $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ en X son* equivalentes*, si existen constantes positivas a, b tales que*

$$a\|x\| \leq |\!|\!|x|\!|\!| \leq b\|x\|,$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Note que la relación de equivalencia entre normas es además, valga la redundancia, una relación de equivalencia. En $\mathbb{R}^n$ y en general en cualquier espacio vectorial normado de dimensión *finita* sólo hay una clase de equivalencia. Aunque no probaremos esta última afirmación si veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.3.9 En $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes. Nuestra tarea es encontrar las constantes a y b tales que

$$a\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq b\,\|x\|_\infty.$$

Primero observe que

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \geq \max\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Luego $a = 1$. Por otro lado

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \max\{|x_i|\}^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

de donde $b = \sqrt{n}$. Además a y b son las constantes óptimas, es decir, $a = 1$ es el valor más grande posible para a y $b = \sqrt{n}$ es el menor posible para b (¿por qué?).

El cambio en la geometría del espacio de una norma a otra, hace que algunas normas sean más deseables que otras. En un primer nivel de complejidad, propiedades geométricas de la norma que son de interés son la *convexidad estricta* y la *suavidad*. Las normas que son inducidas por un producto interno, como la norma $\|\cdot\|_2$ en $\mathbb{R}^n$, tienen bolas unitarias abiertas "más esféricas". Por otro lado normas como $\|\cdot\|_1$ o $\|\cdot\|_\infty$ tienen "caras planas".

EJERCICIOS

✎ **3.1** Si (X, d) es un espacio métrico ¿Cuáles de las siguientes son métricas en X?

a) $d_1(x, y) = d^2(x, y)$,

b) $d_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$,

c) $d_3(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$,

d) $d_4(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$

✎ **3.2** Demostrar que $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$ es una métrica en $\mathbb{R}$.

✎ **3.3** Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Si $x \in X$ se define la distancia de x a A como

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Pruebe que $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ para todo $y \in X$.

✎ **3.4** Si $\|\cdot\|$ es una norma, pruebe que $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x \pm y\|$.

✎ **3.5** Compruebe que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

✎ **3.6** Sean $\bar{\omega} := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ escalares positivos fijos. Pruebe que

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_{\bar{\omega}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$ (es la *norma euclideana* con pesos ω's). Encuentre un producto interior en $\mathbb{R}^n$ cuya norma inducida sea $\|\cdot\|_{\bar{\omega}}$.

✎ **3.7** Compruebe que existen constantes positivas a, b, c, d tales que

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1, \quad c\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq d\|x\|_1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

Calcule los valores óptimos de las constantes a, b, c, d, es decir las a y c más grandes posibles y las b y d más chicas posibles.

✎ **3.8** Si $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno, compruebe que:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad 4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

La primera identidad se llama *identidad del paralelogramo* y la segunda *identidad de polarización*. Interprete geométricamente la identidad del paralelogramo. Encuentre una norma que *no* cumpla la identidad del paralelogramo.

✎ **3.9** Falso (dé un contraejemplo) o verdadero (dé una demostración): En $\mathbb{R}^2$ existe un producto interior tal que la norma asociada a este producto interior es,

$$\|(x, y)\| = |x| + |y|$$

✎ **3.10** Falso (dé un contraejemplo) o verdadero (dé una demostración): Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado entonces $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si y sólo si $x = \lambda y$ para alguna $\lambda \in \mathbb{R}$.

✎ **3.11** Sea $0 < p < 1$ un número real. Pruebe que

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sum_{n=1}^{n} |x_i - y_i|^p$$

es una métrica en $\mathbb{R}^n$. *Sugerencia:* Primero pruebe la desigualdad $(a+b)^p \le a^p + b^p$ si $a, b \in \mathbb{R}$ y $0 < p < 1$.

✎ **3.12** Pruebe que si a, b son reales positivos y $0 < \alpha < 1$ entonces

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \le \alpha a + (1-\alpha)b$$

con igualdad si y sólo si $a = b$. Use la desigualdad anterior para demostrar la desigualdad de Young. *Sugerencia:* para la primera parte pruebe que $t^\alpha \le \alpha t + (1-\alpha)$ si $t \ge 0$ (puede usar derivada por ejemplo) y luego sustituya algún valor apropiado de t.

✎ **3.13** Considere $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (aquí, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno usual). Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \sup\{\langle x, y\rangle : y \in \mathbb{R}^n, \|y\|_q \le 1\}$ con $1/p + 1/q = 1$.

Capítulo 4

Sucesiones

4.1 Paso a paso

En cierto sentido, la ventaja de trabajar en espacios métricos es que mucha información que les concierne se puede discretizar y entenderse a partir de ciertos subconjuntos numerables del espacio: las *sucesiones*. Como veremos en los siguientes capítulos, en los espacios métricos, tanto los conceptos topológicos básicos así como nociones de continuidad, diferenciación y otras más, admiten caracterizaciones en términos de sucesiones.

La noción de sucesión en análisis esta orientada a la aproximación. Los procesos de límite, en vez de ser continuos como se hace en el cálculo diferencial e integral, pueden hacerse a través de una secuencia de pasos. Esta es, de hecho, numerable: primer paso, segundo paso, tercer paso, etcétera. No es de sorprenderse entonces que la definición de sucesión sea como sigue.

Definición 4.1.1 *Sea X un conjunto. Una* sucesión *en X es una función $x : \mathbb{N} \to X$.*

Si $x : \mathbb{N} \to X$ es una sucesión, usualmente se le denota por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entendiendo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n es $x(n)$ (el valor de la función x en el natural n). Algunas veces, para simplificar la notación y, si el contexto lo permite, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se escribirá simplemente como (x_n).

Al conjunto imagen de $\mathbb{N}$ bajo x se le denota por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ o simplemente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Es importante observar que la imagen de una sucesión en un conjunto X es un subconjunto contable (finito o numerable) de X. Sin embargo, hay que mantener en mente que a esa imagen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se le da un orden vía la función $x : \mathbb{N} \to X$. Entenderíamos que x_1 es el primer término de la sucesión, x_2 el segundo, etcétera.

Podemos imaginar que el conjunto de sucesiones en X es un producto cartesiano numerable

$$X \times X \times X \times \cdots$$

Por lo tanto, una manera de representar el orden de una sucesión es pensar en la sucesión como un vector con una cantidad numerable de coordenadas, digamos

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots).$$

De ahí la notación (x_n) sugerida para sucesión. También se usa la notación

$$X^{\mathbb{N}} = \{\phi : \mathbb{N} \to X\}$$

para el conjunto de sucesiones en X.

Ejemplo 4.1.2 Algunos ejemplos de sucesiones:

a) La sucesión constante. Sea $\widetilde{x} \in X$ fijo y $x_n = \widetilde{x}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(\widetilde{x}, \widetilde{x}, \ldots, \widetilde{x}, \ldots)$.

b) En $\mathbb{R}$, la sucesión de recíprocos de números naturales, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$.

c) En $\mathbb{R}$, la sucesión de potencias de dos, $(2^n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots)$.

d) En $\mathbb{R}$, una sucesión alternante, $((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$.

e) Como $\mathbb{Q}$ es numerable, existe una función biyectiva $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, así $\mathbb{Q}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$, $(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots)$. Note que esta enumeración de $\mathbb{Q}$ no es compatible con el orden $(<)$ en $\mathbb{Q}$, aunque si decimos que q_1, por ejemplo, es el primer término de la sucesión.

f) Si (x_n) es una sucesión en un conjunto X entonces para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)$$

es una sucesión en X. Esta sucesión es llamada *una cola* de la sucesión (x_n) (note que la cola depende de k). La función de $\mathbb{N}$ en X que muestra que cada cola es una sucesión sería $n \mapsto x_{k+n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Cuando el conjunto X es un espacio vectorial, el conjunto de sucesiones en X es también un espacio vectorial. En efecto, se trataría del espacio vectorial $S = \{x : \mathbb{N} \to X : x \text{ es función}\}$ con la suma de funciones y producto de escalar por función usuales. Usando nuestra notación para sucesiones escribiríamos estas operaciones así:

$$\begin{aligned} (x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} &= (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{y}, \\ \alpha (x_n)_{n=1}^{\infty} &= (\alpha x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

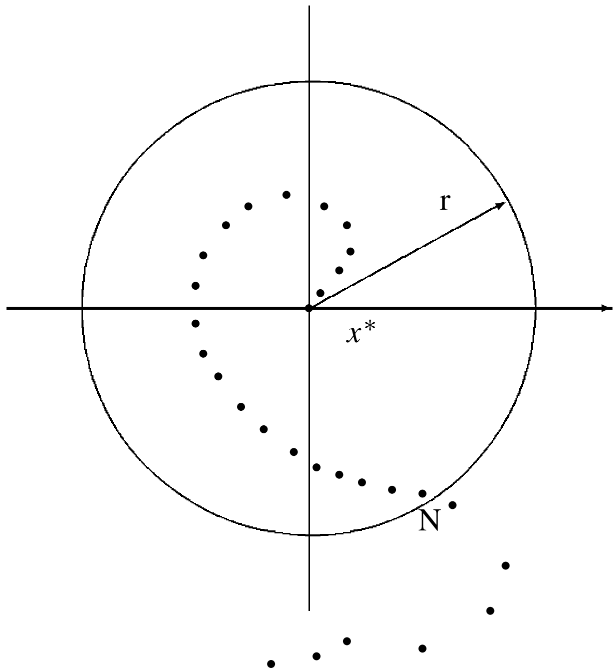
Si, como dijimos anteriormente, usaremos las sucesiones para procesos de aproximación, definamos entonces que significa que una sucesión se acerque o aproxime a un punto del espacio. Si pensamos en la n de x_n como tiempo, la idea intuitiva de que una sucesión se aproxime a algún punto del espacio x^*, es que eventualmente los elementos de la sucesión sean próximos a x^*. Está es una definición relativista, pues uno debe proveer la tolerancia o error para dar la proximidad a x^* (cada quién tiene una noción de cercanía distinta) y ya con este valor, alguien nos dirá a partir de que momento la cola de la sucesión determinada por este tiempo, está toda en la cercanía prescrita de x^*.

Definición 4.1.3 *Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X y $x^* \in X$. Diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$* converge a *o* tiende a *x^* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in B_\varepsilon(x^*)$, es decir, $d(x_n, x^*) < \varepsilon$.*

Para denotar que la sucesión (x_n) converge a x^* usaremos alguna de las siguientes,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*, \text{ o bien, } x_n \longrightarrow x^* \text{ cuando } n \to \infty.$$

Si no hay confusión alguna escribiremos simplemente $x_n \to x^*$ para indicar que (x_n) converge a x^*.



Una manera de reescribir la definición 4.1.3 es la siguiente:

Proposición 4.1.4 *Sea (X, d) un espacio métrico. La sucesión (x_n) converge a x^* si y sólo si la sucesión de números reales $d(x_n, x^*)$ converge a cero. En símbolos,*

$$x_n \to x^* \quad \textit{si y sólo si} \quad d(x_n, x^*) \to 0. \tag{4.1}$$

Note que en particular la proposición anterior de alguna manera reduce el análisis de sucesiones convergentes en un espacio métrico a sucesiones convergentes a cero de números reales. También, en el caso de espacios vectoriales normados se tiene que,

$$x_n \to x^* \quad \text{si y sólo si} \quad \|x_n - x^*\| \to 0,$$

y en particular,

$$x_n \to \overline{0} \quad \text{si y sólo si} \quad \|x_n\| \to 0$$

En los espacios métricos, para cada pareja de puntos distintos existen bolas ajenas que los contienen, esta propiedad, llamada propiedad de Hausdorff[1], obliga a que una sucesión convergente tenga un y sólo un límite, como probamos a continuación.

Proposición 4.1.5 *Sean (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, entonces el límite es único.*

$\boxed{\text{Demostración}}$

Supongamos que x^* y y^* son límites de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Si $x^* \neq y^*$, sea $\varepsilon = d(x^*, y^*)/2 > 0$. Por la convergencia de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a x^* existe un número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que $x_n \in B_\varepsilon(x^*)$ si $n \geq N$. Por otro lado, de la convergencia de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a y^* existe un número natural $N' = N'(\varepsilon)$ tal que $x_n \in B_\varepsilon(y^*)$ si $n \geq N'$.

Ahora si n es un número natural tal que $n \geq \max\{N, N'\}$ entonces $x_n \in B_\varepsilon(x^*) \cap B_\varepsilon(y^*) = \emptyset$. Esto no es posible y por lo tanto $x^* = y^*$. ∎

Proposición 4.1.6 *Sea (X, d) un espacio métrico. Sean (x_n) una sucesión en X y $x^* \in X$. Entonces $x_n \to x^*$ si y sólo si alguna cola de (x_n) converge a x^*.*

$\boxed{\text{Demostración}}$

Si la sucesión (x_n) converge a x^* y $(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)$ es una cola de la sucesión entonces para $\varepsilon > 0$ dada existe $N = N(\varepsilon)$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x^*) < \varepsilon$. Si $N' = \max\{N, k\}$ entonces para $n \geq N'$, $d(x_n, x^*) < \varepsilon$, es decir la cola converge a x^*. Inversamente si alguna cola, digamos $(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)$, converge a x^* y $\varepsilon > 0$ entonces existe $K = K(\varepsilon)$, $K \geq k$, tal que si $n \geq K$ entonces $d(x_n, x^*) < \varepsilon$; esto dice en particular que $x_n \to x^*$. ∎

La proposición anterior se puede parafrasear diciendo que para fines de convergencia los primeros términos de una sucesión pueden ser ignorados, la convergencia de una sucesión es pues, una acción a largo plazo.

Ejemplo 4.1.7 Veamos algunos ejemplos de sucesiones en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

[1] Felix Hausdorff, 1868-1942.

a) Si $c \in \mathbb{R}$ es fijo, considerar la sucesión constante $(c, c, \ldots, c, \ldots)$. Esta sucesión converge a c.

b) La sucesión $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero. Sea $\varepsilon > 0$, hay que demostrar que existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $1/n \in B_{\varepsilon}(0)$ para toda $n \geq N$. Por la Propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \varepsilon$ y si $n \geq N$ entonces $1/n \leq 1/N < \varepsilon$. Luego, $1/n \in (-r, r)$ para toda $n \geq N$, como se quería demostrar.

c) Para $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ con $\alpha > 0$ fijo. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2^{\alpha}}, \frac{1}{3^{\alpha}}, \ldots\right)$ converge a 0. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y sea $N = N(\varepsilon)$ tal que $N > \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$ (existe por la Propiedad Arquimediana). Si $n \geq N$ entonces $n > \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$ y por lo tanto $\frac{1}{n^{\alpha}} < \varepsilon$. Luego, $\frac{1}{n^{\alpha}} \longrightarrow 0$.

Ejemplo 4.1.8 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a + nb \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_n = \frac{1}{a+nb}$. Entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 si $b \neq 0$ (en otro caso sería una sucesión constante). Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos, usando la Propiedad Arquimediana $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $N_1 > -\frac{a}{b}$. Esto implica que si $n \geq N_1$ entonces $a/b + n > 0$. Note que para $n \geq N_1$ se tiene que,

$$\frac{1}{|a + nb|} = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{1}{\left|\frac{a}{b} + n\right|} = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} + n}.$$

Ahora, si buscamos que el lado derecho de la identidad anterior sea menor a r esto sucederá siempre y cuando

$$n > \frac{1}{\varepsilon |b|} - \frac{a}{b}.$$

Luego si $N_2 \in \mathbb{N}$ es tal que $N_2 > \frac{1}{\varepsilon|b|} - \frac{a}{b}$ entonces para $n \geq N_2$,

$$\frac{1}{\mid a + nb \mid} = \frac{1}{\mid b \mid} \frac{1}{\frac{a}{b} \ + \ n} < \varepsilon.$$

Finalmente si $N = \max\{N_1, N_2\}$ y si $n \geq N$, se tiene que $\frac{1}{\mid a+nb \mid} < \varepsilon$. Por lo tanto

$$\frac{1}{a + nb} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Ejemplo 4.1.9 Sea $x_n = (-1)^n$. Notemos que

$$x_n = \begin{cases} -1, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces la sucesión (x_n) no converge. Para comprobarlo, supongamos, por reducción al absurdo, que la sucesión (x_n) converge a $x^* \in \mathbb{R}$. En particular, para $\varepsilon = 1$, existe un número natural $N = N(1)$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in B_1(x^*)$, es decir, tanto 1 como -1 están en $B_1(x^*)$, pero esto no es posible porque la distancia de 1 a -1 es 2 y, por otro lado, la distancia entre cualesquiera dos elementos de $B_1(x^*)$ es *estrictamente* menor a 2 (si a, b están en $B_1(x^*)$ entonces $|a-b| \leq |a-x^*| + |b-x^*| < 1+1 = 2$).

Antes de continuar con más ejemplos probemos un principio de comparación muy útil para comprobar convergencia de sucesiones:

Proposición 4.1.10 (Principio del Sandwich) *Sean $(x_n)_{n=1}^\infty$, $(y_n)_{n=1}^\infty$ y $(z_n)_{n=1}^\infty$ sucesiones en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que las sucesiones $(x_n)_{n=1}^\infty$ y $(z_n)_{n=1}^\infty$ convergen a un mismo valor x^*. Entonces la sucesión $(y_n)_{n=1}^\infty$ converge y lo hace también a x^*.*

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por definición de convergencia, existe un número $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $x_n \in B_\varepsilon(x^*)$. Del mismo modo, existe un número $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ entonces $z_n \in B_\varepsilon(x^*)$.

Notemos que la bola $B_\varepsilon(x^*)$ es, de hecho, igual al intervalo $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Por lo tanto, si $n \geq N$ entonces

$$x^* - \varepsilon \leq x_n \leq y_n \leq z_n \leq x^* + \varepsilon$$

y por lo tanto la sucesión (y_n) también satisface $y_n \in B_\varepsilon(x^*)$.

Podemos dar una demostración alternativa. Debemos probar que $|y_n - x^*| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Comencemos por estimar $|y_n - x^*|$ sumando ceros disfrazados adecuadamente y usando la desigualdad del triángulo:

$$\begin{aligned}
|y_n - x^*| &= |y_n - x_n + x_n - x^*| \leq |y_n - x_n| + |x_n - x^*| \\
&\leq |z_n - x_n| + |x_n - x^*| \\
&= |z_n - x^* + x^* - x_n| + |x_n - x^*| \\
&\leq |z_n - x^*| + |x^* - x_n| + |x_n - x^*| \\
&\leq |z_n - x^*| + 2|x_n - x^*|.
\end{aligned}$$

Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$, $|y_n - x^*| \leq |z_n - x^*| + 2|x_n - x^*|$. Dado $\varepsilon > 0$ elegimos

$$N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq N_1 \text{ entonces } |z_n - x^*| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ y}$$

$$N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq N_2 \text{ entonces } |x_n - x^*| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N$ entonces

$$|y_n - x^*| \leq |z_n - x^*| + 2|x_n - x^*| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Luego $y_n \to x^*$. ■

Ejemplo 4.1.11 Sea $b \in \mathbb{R}$ con $|b| < 1$ entonces la sucesión $(b^n)_{n=1}^{\infty} = (b, b^2, b^3, \ldots)$ converge a 0. Si $b = 0$ entonces $(b^n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión constate cero que converge a 0. Por otro lado, si $b \neq 0$, escribimos

$$|\, b \,| = \frac{1}{1+\alpha} \qquad \text{donde} \qquad \alpha = \frac{1-|b|}{|b|} > 0.$$

Entonces por la desigualdad de Bernoulli (ver ejemplo 1.3.3) tenemos que

$$0 < |b|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{1}{1+n\alpha}$$

de donde, por el principio del Sandwich se tiene que

$$|\, b \,|^n \longrightarrow 0 \quad \text{y por lo tanto} \quad b^n \longrightarrow 0.$$

Ejemplo 4.1.12 Si $|b| < 1$ entonces la sucesión $(nb^n)_{n=1}^{\infty} = (b, 2b^2, 3b^3, \ldots)$ converge a 0. Como en el ejemplo anterior, si $b = 0$ entonces $(nb^n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión constate cero que converge a 0. Si $b \neq 0$, escribimos

$$|b| = \frac{1}{1+\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha > 0.$$

Entonces

$$|nb^n| = \frac{n}{(1+\alpha)^n}.$$

Por otro lado,

$$(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \cdots + \alpha^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2.$$

Luego,

$$\frac{1}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{2}{n(n-1)\alpha^2} \quad \text{y} \quad \frac{n}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{2n}{n(n-1)\alpha^2}.$$

Finalmente,

$$0 \leq |nb^n| \leq \frac{2}{(n-1)\alpha^2}$$

y por el principio del Sandwich se tiene que $nb^n \longrightarrow 0$. Note que el mismo argumento se puede usar para mostrar que si $k \in \mathbb{N}$ es fijo entonces $n^k b^n \longrightarrow 0$.

Ejemplo 4.1.13 Si $a > 0$ entonces $(a^{1/n})_{n=1}^{\infty}$ converge a 1. El análisis de esta sucesión depende de la posición de a con respecto a 1. En efecto, Si $a = 1$, $(a^{1/n})_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión constante 1, que converge a 1.

Si $a > 1$, entonces $a^{1/n} > 1$. Escribimos $a^{1/n} = 1 + \alpha_n$ para alguna $\alpha_n > 0$. Por el principio del Sandwich, es suficiente probar que $\alpha_n \longrightarrow 0$. Si $a^{1/n} = 1 + \alpha_n$ se sigue de la desigualdad de Bernoulli que $a = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha_n$ de donde $1 + n\alpha_n \leq a$ y por lo tanto

$$0 \leq \alpha_n \leq \frac{a-1}{n}.$$

Una vez más, el principio del Sandwich nos permite concluir que $\alpha_n \to 0$ y por lo tanto $a^{1/n} \to 1$.

Finalmente si $a < 1$, escribimos $a = 1/b$, con $b > 1$. Por el caso anterior sabemos que $b^{1/n} \to 1$. Así,

$$|a^{1/n} - 1| = \left|\frac{1}{b^{1/n}} - 1\right| = \frac{|1 - b^{1/n}|}{b^{1/n}} \leq |1 - b^{1/n}|.$$

Luego, por el principio del Sandwich, $a^{1/n} \longrightarrow 1$.

Ejemplo 4.1.14 La sucesión $(n^{1/n})_{n=1}^{\infty} = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots)$ converge a 1. Como en el ejemplo anterior, para $n > 1$, escribimos $n^{1/n} = 1 + \alpha_n$ para cierta $\alpha > 0$. Primero observe que

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2,$$

de donde

$$1 \geq \frac{(n-1)}{2}\alpha_n^2$$

y por lo tanto

$$\frac{2}{(n-1)} \geq \alpha_n^2.$$

Por el principio del Sandwich tenemos que $\alpha_n^2 \to 0$ y por lo tanto $\alpha_n \to 0$ (¿por qué?). Luego $n^{1/n} = 1 + \alpha_n \to 1$.

Ejemplo 4.1.15 Sea (X, d) el espacio métrico con d la métrica discreta. ¿Cómo serán las sucesiones convergentes en este espacio? Bueno, si consideramos una sucesión convergente en X y tomamos una bola de radio menor a uno, centrada en el límite, entonces eventualmente los elementos de la sucesión estarán en esta bola. Esto obliga a que, eventualmente, los elementos de la sucesión disten en menos que uno del límite y por lo tanto sean iguales al límite. La conclusión es que para que una sucesión sea convergente en (X, d) la sucesión debe ser eventualmente constante.

Para continuar con nuestro estudio de sucesiones veamos algunas propiedades de aritmética de sucesiones y convergencia que simplificarán notablemente muchos problemas asociados a problemas de convergencia.

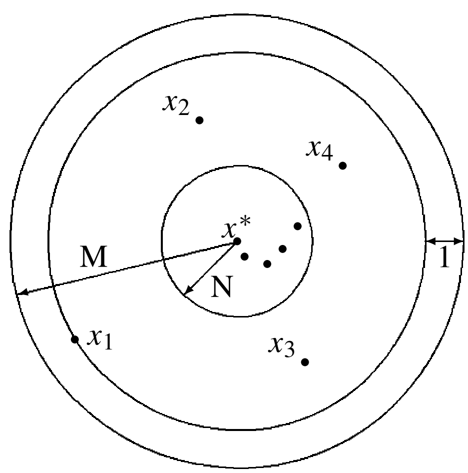
Definición 4.1.16 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A está* acotado *si existen $M > 0$ y $x^* \in X$ tal que $A \subset B_M(x^*)$.*

Note que en la definición de estar acotado, si en particular X es un espacio vectorial, entonces, ajustando un poco la M, x^* siempre se puede tomar como el vector $\overline{0}$.

Lema 4.1.17 *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada.*

Demostración

Intuitivamente el resultado es claro, porque al tener una sucesión convergente, sus colas estarán en la cercanía del límite y para acotar completamente a la sucesión necesitaremos una bola que incluya además a los primeros elementos de la sucesión (ver la figura abajo). Supongamos que $x_n \to x^*$ y sea $M' = 1$. Entones existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_1(x^*)$ si $n \geq N$. Sea $M = \max\{1, d(x^*, x_1) + 1, \ldots, d(x^*, x_{N-1}) + 1\}$, (¿por qué se suma uno?) entonces $x_n \in B_M(x^*)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión está acotada. ■



Proposición 4.1.18 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado y* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones en* X.

a) *Si* $x_n \to x^*$ *entonces* $\|x_n\| \to \|x^*\|$ *y el recíproco es falso.*

b) *Si* $x_n \to x^*$ *y* $y_n \to y^*$ *entonces la sucesión* $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge y lo hace a* $x^* + y^*$.

c) *Si* $x_n \to x^*$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *entonces la sucesión* $(\alpha x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge y lo hace a* αx^*.

d) *Si la norma en* X *es inducida por un producto interno y si* $x_n \to x^*$ *y* $y_n \to y^*$ *entonces la sucesión* $(\langle x_n, y_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$ *converge y lo hace a* $\langle x^*, y^*\rangle$.

e) *En* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, *si* $x_n \to x^*$, $x_n \neq 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y* $x^* \neq 0$ *entonces* $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x^*}$.

Demostración

Demostraremos únicamente las dos últimas propiedades, las otras se dejan como ejercicio al lector. Para el inciso **d)**, como la sucesión (x_n) está acotada entonces existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para toda n. De las propiedades de producto interno y la desigualdad de Cauchy-Buniakovsky-Schwartz tenemos que,

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x^*, y^*\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y^*\rangle + \langle x_n, y^*\rangle - \langle x^*, y^*\rangle| \\
&= |\langle x_n, y_n - y^*\rangle + \langle x_n - x^*, y^*\rangle| \\
&\leq |\langle x_n, y_n - y^*\rangle| + |\langle x_n - x^*, y^*\rangle| \\
&\leq \|x_n\|\|y_n - y^*\| + \|x_n - x^*\|\| y^*\| \\
&\leq M\|y_n - y^*\| + \|x_n - x^*\|\|y^*\|.
\end{aligned}$$

Una vez más el principio del Sandwich implica que,

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x^*, y^*\rangle| \longrightarrow 0$$

y por lo tanto

$$\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x^*, y^*\rangle.$$

Para probar el inciso **e)**, como $x^* \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < |x^*|$. Por otro lado como x_n converge a x^* entonces $|x_n| \to |x^*|$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n| \geq \delta$. Así, si $n \geq N$,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x^*}\right| = \frac{|\, x^* - x_n \,|}{|\, x_n \,|\,|\, x^* \,|} \leq \frac{|\, x^* - x_n \,|}{\delta|\, x^* \,|}.$$

Por el principio del Sandwich, la cola a partir de N de la sucesión $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x^*}\right|$ converge a cero y por lo tanto la sucesión $\frac{1}{x_n}$ converge a $\frac{1}{x^*}$. ■

Proposición 4.1.19 *Sea* $(\mathbf{x}_n)$ *es una sucesión en* $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$. *Entonces* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}^*$ *si y sólo si* $x_i^n \to x_i^*$ *para toda* $i = 1, \ldots, m$; *donde* $\mathbf{x}_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$ *y* $\mathbf{x}^* = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$. *Es decir, una sucesión de vectores,* $(\mathbf{x}_n)$, *converge si y sólo si cada una de las* m *sucesiones coordenadas,* (x_i^n), *converge.*

Demostración

La implicación de suficiencia se prueba poniendo a buen uso el principio del Sandwich, observando que, por un lado, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ se tiene que

$$0 \leq |x_i^n - x_i^*| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|_2.$$

Luego $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|_2 \to 0$ implica que para cada i, $|x_i^n - x_i^*| \to 0$. Por otro lado, para la otra implicación, usamos la proposición 4.1.18 pues,

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|^2 = \sum_{j=1}^{m} |x_j^n - x_j^*|^2,$$

y cada uno de estos sumandos converge a cero, luego la suma también converge a cero y por lo tanto $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\| \to 0$. ■

Note que en la proposición anterior podemos reemplazar la norma $\|\cdot\|_2$ en $\mathbb{R}^m$ por cualquiera de las normas $\|\cdot\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ y tener la misma conclusión.

Un primer criterio de convergencia para sucesiones en $\mathbb{R}$, que es de gran utilidad para analizar, por ejemplo, convergencia de sucesiones definidas en forma recursiva y que además nos dará parte de uno de los argumentos que usaremos para probar uno de los grandes teoremas del análisis matemático (el Teorema de Bolzano- Weierstrass 4.3.1) es el criterio de convergencia para sucesiones monótonas, es decir sucesiones que son crecientes o decrecientes.

Teorema 4.1.20 *En* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *toda sucesión monótona y acotada es convergente. Es decir,*

a) *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es creciente, es decir,* $x_n \leq x_{n+1}$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *(note que para este tipo de sucesiones sólo se requiere que la sucesión sea acotada superiormente).*

b) *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es decreciente, es decir,* $x_n \geq x_{n+1}$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración

Demostraremos solamente el caso para sucesiones decrecientes. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ acotada (inferiormente). La intuición dice que de haber límite este deberá ser el ínfimo de la sucesión. Probemos que en efecto es así: sea $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha \leq x_j < \alpha + \varepsilon.$$

Ahora, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, luego para $n \geq j$

$$\alpha \leq x_n \leq x_j < \alpha + r$$

y por lo tanto $x_n \in (\alpha - r, \alpha + r) = B_\varepsilon(\alpha)$ si $n \geq j$ de donde $x_n \to \alpha$. ■

Ejemplo 4.1.21 (Método de Newton para encontrar $\sqrt{a}$) Sea $a > 0$ y sea $x_1 > \sqrt{a}$. Definimos recursivamente una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ vía

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Probaremos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente, luego será una sucesión convergente y veremos que el límite es $\sqrt{a}$.

Para probar que la sucesión es acotada inferiormente procedemos por inducción sobre n. Si $n = 1$, por definición, $x_1 > \sqrt{a}$. Supongamos ahora que $x_n > \sqrt{a}$ y demostremos que $x_{n+1} > \sqrt{a}$. Note que $x_{n+1} > \sqrt{a}$ es equivalente a que

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) > \sqrt{a},$$

que a su vez es equivalente a

$$(x_n - \sqrt{a})^2 > 0,$$

lo cual es cierto por hipótesis de inducción.

La monotonía de la sucesión se obtiene fácilmente usando la parte anterior pues $x_{n+1} < x_n$ es equivalente a

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) < x_n,$$

que a su vez es equivalente a que

$$a < {x_n}^2,$$

que como vimos en la parte anterior es cierto para toda $n \in \mathbb{N}$.

Así, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y acotada, luego $x_n \to \alpha$, con $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (note que $\alpha \geq \sqrt{a} > 0$). Para calcular el valor de α, notemos que por la proposición 4.1.18 podemos tomar el límite en ambos lados de la identidad

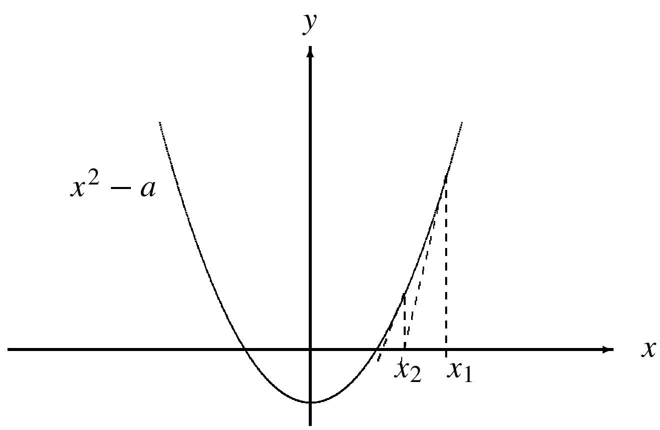
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

para obtener que

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right).$$

Resolvemos esta ecuación para α y obtenemos que $\alpha = \sqrt{a}$.

La sucesión (x_n) converge "muy rápido" a $\sqrt{a}$, en los ejercicios el lector encontrará una estimación de ésta rapidez de convergencia.



4.2 Subsucesiones

Definición 4.2.1 *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Una sucesión $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ en X es una* subsucesión *de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ si existe una sucesión de naturales estrictamente creciente, es decir, $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ con $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, tal que $y_k = x_{n_k}$ para toda $k \geq 1$.*

Observe que en la definición 4.2.1 si $x : \mathbb{N} \to X$ es la función que define a la sucesión (x_n) entonces una subsucesión de (x_n) se obtiene así: sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$, una función estrictamente creciente, entonces una subsucesión de x es $x \circ \varphi$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & x_{n_1} & & & x_{n_2} & & & & x_{n_k} & \\
 & | & & & | & & & & | & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
 & | & & & | & & & & | & \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & x_k & & x_m &
\end{array}$$

Ejemplo 4.2.2 Algunos ejemplos de subsucesiones son:

a) Toda sucesión (x_n) es subsucesión de si misma. En efecto, si $n_k = k$ entonces $x_k = x_{n_k}$.

b) En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, sea $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Si $y_k = \frac{1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (aquí, $n_k = 2k$).

c) En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, sea $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $y_k = x_{2k-1}$, entonces $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

d) Considere la sucesión

$$x = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots)$$

¿Cuáles son los n_k's que definen a la subsucesión de unos de la sucesión x?

Proposición 4.2.3 *Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Entonces, $x_n \to x^*$ si y sólo si toda subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x^*.*

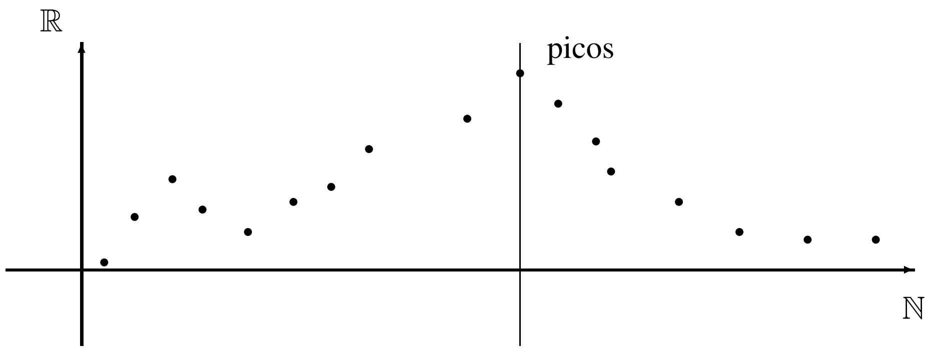
Demostración

Si toda subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x^* en particular $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es subsucesión de sí misma, luego x_n converge a x^*. Ahora supongamos que $x_n \to x^*$ y sea $(x_{nk})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Para demostrar que $x_{n_k} \to x^*$, sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x^*$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\varepsilon(x^*)$ si $n \geq N$. Observe que $n_N \geq N$ (¿por qué?). Luego, si $k \geq N$, $n_k > n_N \geq N$ y por lo tanto $x_{n_k} \in B_\varepsilon(x^*)$ por lo que $x_{n_k} \to x^*$. ■

Note que pueden tenerse casos de sucesiones no convergentes para las cuales algunas de sus subsucesiones son convergentes. Por ejemplo, la sucesión $((-1)^n)$ no converge y sin embargo tiene algunas subsucesiones convergentes, por ejemplo, $((-1)^{2n})$. Una pregunta natural aquí es si habrá sucesiones que no tengan alguna subsucesión convergente. La respuesta, claramente es que no, como lo muestra la sucesión (n). Sin embargo, para sucesiones reales acotadas, siempre se garantiza la existencia de al menos una subsucesión convergente (este es el contenido del teorema de Bolzano-Weierstrass 4.3.1). Aún más, la subsucesión convergente se puede elegir monótona (creciente o decreciente). Veamos.

Definición 4.2.4 *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión en* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, x_m *es un* pico *de la sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *si* $x_m \geq x_n$ *para toda* $n \geq m$.

Ejemplo 4.2.5 Si (x_n) es una sucesión monótona decreciente entonces cada x_n es un pico de la sucesión mientras que si (x_n) es estrictamente creciente entonces (x_n) no tiene picos.



Teorema 4.2.6 *En* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *toda sucesión contiene una subsucesión monótona.*

Demostración

Vamos a considerar dos casos: un número infinito de picos y un número finito de picos. Veamos primero el caso en que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una infinidad de picos. Sea $\mathcal{A}_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \text{ es pico }\}$. Por hipótesis $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$. Por el Principio de Buen Orden, $\mathcal{A}_1$ tiene un primer elemento, digamos n_1. Elegimos el término x_{n_1} de la sucesión. Sea $\mathcal{A}_2 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \text{ es pico y } n > n_1\}$. Nuevamente, al haber una infinidad de picos $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Sea n_2 el primer elemento de $\mathcal{A}_2$ y consideremos el término x_{n_2} de la sucesión. Note que $x_{n_1} \geq x_{n_2}$. Procedemos inductivamente para encontrar una sucesión estrictamente creciente de naturales $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tales que la sucesión $(x_{nk})_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión decreciente de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ahora, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene un número finito de picos, sean éstos $x_{m_1}, \ldots, x_{m_k}$. Como $x_{m_{k+1}} := x_{n_1}$ no es pico, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} > x_{n_1}$. Como x_{n_2} no es pico, existe

$n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} > x_{n_2}$. Procedemos inductivamente para encontrar así una subsucesión $(x_{nk})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ monótona creciente. ■

EJERCICIOS

✎ **4.1** Demostrar la proposición 4.1.4.

✎ **4.2** Pruebe que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado y (x_n) una sucesión en X tal que $x_n \to x^*$ entonces $\|x_n\| \to \|x^*\|$ ¿Es cierto el recíproco?

✎ **4.3** Pruebe que si (x_n) es una sucesión de números reales tales que $x_n^2 \to 0$ entonces (x_n) converge y $x_n \to 0$.

✎ **4.4** Pruebe que si $k \in \mathbb{N}$ es fijo y $|b| < 1$, entonces $n^k b^n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

✎ **4.5** Sea (X, d) un espacio métrico y sean (x_n), (y_n) sucesiones en X tales que $x_n \to x^*$ y $y_n \to y^*$ cuando $n \to \infty$. Pruebe que $d(x_n, y_n) \to d(x^*, y^*)$ si $n \to \infty$.

✎ **4.6** Sean $x_1 > 1$ y $x_{n+1} := 2 - 1/x_n$, $n \geq 2$. Demuestre que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ esta acotada y es monótona. Encuentre el límite de la sucesión.

✎ **4.7** Sea (x_n) una sucesión de números reales acotada superiormente. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \geq x_n - \frac{1}{2^n}$ (es decir, (x_n) es una sucesión "casi" creciente). Prueba que (x_n) converge.

✎ **4.8** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. (x_n) una sucesión en X tal que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y (b_n) una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Pruebe que $b_n x_n \to 0$.

✎ **4.9** Pruebe que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x^* si y sólo si *las dos* subsucesiones complementarias de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ y $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ convergen a x^*.

✎ **4.10** *Criterio de la razón:* Suponga que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales distintos de cero. Supongamos que $\alpha := \lim_{n\to\infty} |x_{n+1}|/|x_n|$ existe. Pruebe que si $\alpha < 1$

entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, que si $\alpha > 1$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge y dé ejemplos de sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ donde $\alpha = 1$ pero las sucesiones convergen o divergen. *Sugerencia:* para la primera parte pruebe que existen $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ y $0 < \beta < 1$ tales que $|x_n| < C\beta^n$ si $n \geq N$. Use el criterio de la razón para determinar convergencia o divergencia de las siguientes sucesiones: $(c^n/n!)$, $c \in \mathbb{R}$, (na^n), $0 < a < 1$.

4.11 Determine la convergencia o divergencia de las siguientes sucesiones:

$$(\sqrt{n^2+n}-n), \quad (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \quad \left(\frac{n\,\mathrm{sen}(n!)}{n^2+1}\right), \quad \left(\frac{2^n}{n!}\right), \quad \left(\frac{n!}{n^n}\right).$$

4.12 Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Demostrar que $\alpha = \sup(A)$ si y sólo si

a) α es cota superior de A.

b) Existe una sucesión (x_n) tal que $x_n \in A$ y $x_n \to \alpha$.

4.13 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ y $s = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Demostrar que si $s \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces existe una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a s.

4.14 En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ pruebe que si $x_n \to x^*$ entonces $\sigma_n \to x^*$ donde

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

(los llamados *promedios de Cesàro* de la sucesión (x_n)). ¿Será cierto que si $\sigma_n \to x^*$ entonces $x_n \to x^*$? (*Sugerencia:* las sucesiones convergentes son acotadas.)

4.15 Sea $a > 0$ y $x_1 > \sqrt{a}$. Sea $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$. Sabemos que $x_n \to \sqrt{a}$. En este ejercicio mediremos la rapidez con la que $x_n \to \sqrt{a}$. Sea $\varepsilon_n := x_n - \sqrt{a}$ el error al aproximar $\sqrt{a}$ por x_n. Pruebe que

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}} \quad \text{y que} \quad \varepsilon_{n+1} < 2\sqrt{a}\left(\frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$$

Si $a = 3$ y $x_1 = 2$ ¿Cuántos pasos de la sucesión necesita para aproximar $\sqrt{3}$ con error menor a 10^{-6}?

4.3 Un gran teorema: Bolzano-Weierstrass

Teorema 4.3.1 (Bolzano-Weierstrass) *En* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Demostración

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada. Entonces por el teorema 4.2.6, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión, $(x_{nk})_{k=1}^{\infty}$, monótona que en particular también está acotada. Por el teorema 4.1.20, $(x_{nk})_{k=1}^{\infty}$ converge. ■

El teorema de Bolzano-Weierstrass es un teorema nativo de $\mathbb{R}$: no necesariamente es cierto en cualquier espacio métrico. Aún en espacios normados puede fallar. No es el caso de $\mathbb{R}^m$ y esto hace sospechar que cierta condición finito dimensional es la que está detrás del teorema. En los ejercicios encontrará el lector algunos ejemplos de espacios normados donde falla el teorema de Bolzano-Weierstrass y, también como ejercicio, la demostración del teorema Bolzano-Weierstrass usando el Principio de Intervalos Anidados 2.5.2.

Probemos para cerrar esta sección la versión $\mathbb{R}^m$ del teorema de Bolzano-Weierstrass. Esencialmente deberemos aplicar el teorema 4.3.1 coordenada a coordenada, sin embargo hay una sutileza en el argumento: la simple aplicación de Bolzano-Weierstrass coordenada a coordenada, aún cuando produce subsucesiones convergentes, hace que las subsucesiones coordenadas convergen según sus propios tiempos (pensemos por ejemplo, que la subsucesión convergente de la primera coordenada tiene como sus índices n_k a los múltiplos de tres mientras que la segunda tiene como sus n_k's a los múltiplos de siete, etcétera. Lo que deseamos es una sucesión de tiempos de tal manera que las subsucesiones coordenadas converjan todas a ese ritmo.

Preludio: supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones reales acotadas. Queremos obtener una sucesión de tiempos $n_1 < n_2 < \ldots$ tal que las subsucesiones $(x_{n_k})_{n_k=1}^{\infty}$ y $(y_{n_k})_{n_k=1}^{\infty}$ sean ambas convergentes.

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada tiene una subsucesión convergente, digamos $(x_{n_k})_{n_k=1}^{\infty}$. Note que $(y_{n_j})_{n_j=1}^{\infty}$ es una subsucesión acotada de $(y_{n_k})_{n_k=1}^{\infty}$ y tiene por lo tanto una subsucesión convergente, digamos $(y_{n_{j_i}})_{n_{j_i}=1}^{\infty}$. En particular, $(x_{n_{j_i}})_{n_{j_i}=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_{n_k})_{n_k=1}^{\infty}$

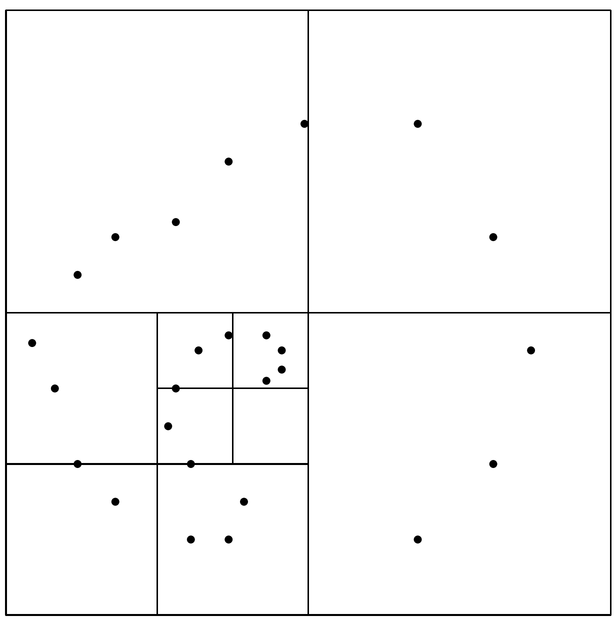
y por lo tanto converge. Luego $(x_{n_{j_i}})_{n_{j_i}=1}^{\infty}$ y $(y_{n_{j_i}})_{n_{j_i}=1}^{\infty}$ convergen.

Teorema 4.3.2 (Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}^m$) *En $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Demostración

Sea $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$, con $\mathbf{x}_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$, una sucesión acotada en $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$. Aplique m-veces el preludio descrito anteriormente. ■

Existe una manera alternativa de demostrar el teorema anterior. A continuación damos un argumento gráfico del Teorema de Bolzano-Weierstrass, usando el Principio de Intervalos Anidados 2.5.2.



4.4 ¿Y si no converge?

Si una sucesión no converge, ésta puede tener subsucesiones convergentes. Por ejemplo, si una sucesión real está acotada, ésta tiene a fortiori subsucesiones convergentes por el Teorema de Bolzano-Weierstrass. Una herramienta muy útil en análisis, como veremos más adelante, consiste en identificar al mayor y al menor de los límites de las subsucesiones convergentes de la sucesión en caso de que estos existan. Si queremos encontrar al mayor de los límites de las subsucesiones de una sucesión, es natural buscarlo entre aquellos números que casi acotan superiormente colas de las sucesión, de ahí la siguiente definición.

Definición 4.4.1 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ acotada. Consideremos el conjunto,*

$$C = \{c \in \mathbb{R} : \ c \geq x_n \text{ excepto para un número finito de } n\text{'s}\}.$$

Sea $x^* = \inf(C)$, x^* se llama el límite superior de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y se denota por*

$$x^* = \limsup x_n = \overline{\lim}\, x_n.$$

Observe que un número c es tal que $c \geq x_n$ excepto para un número finito de n's si y sólo si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c \geq x_n$ para todo $n \geq N$. Además, cada cota superior de la sucesión es elemento de C.

Ejemplo 4.4.2 En la sucesión $(-1)^n$, se tiene que el conjunto

$$C = \{c \in \mathbb{R} : \ c \geq x_n \text{ excepto para un número finito de } n\text{'s } \} = [1, \infty).$$

Por lo tanto, $\limsup(-1)^n = 1$.

El siguiente teorema caracteriza al limite superior de una sucesión.

Teorema 4.4.3 *Sea (x_n) una sucesión de números reales acotada y sea $x^* \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $x^* = \limsup x_n$.

b) *Para cada $\varepsilon > 0$, $x^* + \varepsilon \geq x_n$ excepto para un número finito de n's y $x^* - \varepsilon < x_n$ para una infinidad de n's.*

c) *Si $v_k = \sup\{x_n : n \geq k\}$ entonces $x^* = \inf\{v_k : k \geq 1\}$, es decir,*

$$x^* = \inf_{k \geq 1} \left(\sup_{n \geq k}\{x_n\} \right). \tag{4.2}$$

d) *La sucesión* $v_k = \sup\{x_n : n \geq k\}$ *es no-decreciente y* $x^* = \lim_{k\to\infty} v_k$.

e) $x^* = \sup L$ *donde*

$$L = \{v \in \mathbb{R} | v = \lim x_{n_k} \textit{ para alguna subsucesión } (x_{n_k}) \textit{ de } (x_n)\}.$$

De hecho, $x^* \in L$ *por lo que* $x^* = \max L$.

Demostración

Para probar que a) implica b) sean $x^* = \limsup x_n$ y $\varepsilon > 0$. Como $x^* = \inf C$, existe $c \in C$ tal que $x^* \leq c < x^* + \varepsilon$. Esto implica que $x^* + \varepsilon > c \geq x_n$, excepto un número finito de términos. Ahora $x^* - \varepsilon \notin C$, por lo tanto $x^* - \varepsilon < x_n$ para una infinidad de n's.

Para ver que b) implica c) demostraremos primero que x^* es cota inferior del conjunto $\{v_k : k \geq 1\}$. Supongamos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x^* > v_{k_0}$. Luego, si $\varepsilon_0 > 0$ es tal que $x^* - \varepsilon_0 > v_{k_0}$ entonces $x^* - \varepsilon_0 > x_n$ para todo $n \geq k_0$. Lo cual es una contradicción porque $x^* - \varepsilon_0 < x_n$ para una infinidad de n's. Por lo tanto x^* es cota inferior del conjunto $\{v_k : k \geq 1\}$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $x^* + \varepsilon > x_n$ excepto para un número finito de n's, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x^* + \varepsilon > x_n$ para toda $n \geq k_1$. Entonces $x^* + \varepsilon$ es cota superior del conjunto $\{x_n : n \geq k_1\}$ y por lo tanto $x^* + \varepsilon \geq v_{k_1}$.

Las dos condiciones anteriores implican que $x^* = \inf_{k\geq 1}\{v_k\}$.

Ahora, para mostrar que c) implica d) note que $v_k \geq v_{k+1}$ y $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ es acotada porque $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, luego $\lim_{k\to\infty} v_k = \inf_{k\geq 1}\{v_k\} = x^*$.

Para probar que d) implica e) probaremos primero que $\sup L \geq x^*$. Para $\varepsilon_1 = 1$ como $v_1 = \sup_{n\geq 1}\{x_n\}$ entonces existe x_{n_1} tal que $n_1 \geq 1$ y $v_1 - 1 < x_{n_1} \leq v_1$. Para $\varepsilon_2 = 1/2$, como $v_{n_1+1} = \sup_{n\geq n_1+1}\{x_n\}$ entonces existe x_{n_2} con $n_2 > n_1$ tal que $v_{n_1+1} - 1/2 < x_{n_2} \leq v_{n_1+1}$. Procedemos inductivamente para obtener así una subsucesión $(x_{nk})_{k=1}^{\infty}$ tal que:

$$v_{n_k+1} - \frac{1}{k} < x_{n_{k+1}} \leq v_{n_k+1}.$$

Observe que tanto $v_{n_k+1} - \frac{1}{k}$ como v_{n_k+1} tienden a x^* cuando k tiende a infinito, entonces, por el Principio del Sandwich, $\lim_{k\to\infty} x_{n_{k+1}} = x^*$, por lo que $x^* \in L$ y por lo tanto $x^* \leq \sup L$.

Si $x^* < \sup L$ entonces existe $v \in L$ tal que $x^* < v \le \sup L$. Pero $v = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ para alguna subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Por hipótesis, $x^* = \lim_{k\to\infty} v_k$ y por tanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_{k_0} < v$. Esto implica que si $n \ge k_0$ entonces

$$x_n \le \sup_{n\ge k_0}\{x_n\} = v_{k_0} < v = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Esto es una contradicción porque el conjunto $\{x_n : n \ge k_0\}$ contiene a los $x'_{n_k}s$ si k es suficientemente grande. Entonces $x^* = \sup L$. De hecho, $x^* = \max L$.

Por último, para probar que e) implica a) sea $c \in C$ tal que $c \ge x_n$ para toda $n \ge N$. Si $v = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ entonces $c \ge v$ porque una cola de la subsucesión está en $(-\infty, c]$. Luego $c \ge \sup L = x^*$ y por lo tanto $\inf C \ge x^*$, es decir, $\limsup x_n \ge x^*$. Si $\limsup x_n > x^*$ sea $\varepsilon > 0$ tal que $C \not\ni \limsup x_n - \varepsilon > x^*$. Entonces $\limsup x_n - \varepsilon < x_n$ para una infinidad de n's. Pero cualquier subsucesión convergente del conjunto $\{x_m | \limsup x_n - \varepsilon < x_m\}$ tendrá límite al menos $\limsup x_n - \varepsilon > x^* = \sup L$. ■

Totalmente análoga a la definición de límite superior es la definición y caracterización del límite inferior. Dejamos como ejercicio al lector la demostración del teorema correspondiente.

Definición 4.4.4 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$.*

$$D = \{d \in \mathbb{R} : d \le x_n \text{ excepto en un número finito de } n\text{'s} \}.$$

Sea $x_* = \sup C$, x_* se llama el límite inferior de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y se denota por

$$x_* = \liminf x_n = \underline{\lim}\, x_n.$$

Teorema 4.4.5 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ acotada. Son equivalentes:*

a) $x_* = \liminf x_n$.

b) *Para cada $\varepsilon > 0$ $x_* - \varepsilon \le x_n$ excepto para un número finito de n's, y $x_* + \varepsilon > x_n$ para una infinidad de n's.*

c) *Si* $k \geq 1$ *y* $w_k = \inf\{x_n : n \geq k\}$ *entonces* $x_* = \sup\{w_k : k \geq 1\}$*, es decir,*

$$x_* = \sup_{k\geq 1}\left(\inf_{n\geq k}\{x_n\}\right).$$

d) *La sucesión* $w_k = \inf\{x_n : n \geq k\}$ *es creciente y* $x_* = \lim_{k\to\infty} w_k$*.*

e) $x_* = \inf L$ *donde*

$$L = \{v \in \mathbb{R} | v = \lim x_{n_k} \text{ para alguna subsucesión } (x_{n_k}) \text{ de } (x_n)\}.$$

De hecho, $x_* \in L$ *por lo que* $x_* = \max L$*.*

Algunas propiedades de los límites superior e inferior de una sucesión son las siguientes.

Proposición 4.4.6 *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión acotada. Entonces:*

a) $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.

b)

$$\limsup(cx_n) = \begin{cases} c\limsup x_n, & c \geq 0, \\ c\liminf x_n, & c < 0. \end{cases}$$

c) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n) + \limsup(y_n)$ *y* $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf(x_n) + \limsup(y_n)$*. La igualdad se da si alguna de* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *o* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge.*

d) *Si* $x_n \leq y_n$ *para todo* $n \geq N$ *entonces* $\liminf(x_n) \leq \liminf(y_n)$ *y* $\limsup(x_n) \leq \limsup(y_n)$.

e) $x_n \to x^*$ *si y sólo si* $\limsup x_n = x^* = \liminf x_n$*.*

Demostración

Probaremos únicamente el último inciso, el resto se deja como ejercicio al lector. Supongamos que $x_n \to x^*$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $x_n > x^* - \varepsilon$ para toda $n \geq N$ y $x_n < x^* + \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Entonces $\limsup x_n < x^* + \varepsilon$ y $x^* - \varepsilon \leq \liminf x_n$. Así,

$$x^* - \varepsilon \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq x^* + \varepsilon$$

para toda $\varepsilon > 0$ y por lo tanto

$$x^* \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq x^*.$$

De donde

$$\liminf x_n = x^* = \limsup x_n.$$

Ahora supongamos que $\limsup x_n = x^* = \liminf x_n$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x^* - \varepsilon \leq x_n$ para toda $n \geq N_1$ y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x^* + \varepsilon \geq x_n$ para toda $n \geq N_2$. Entonces,

$$x^* - \varepsilon \leq x_n \leq x^* + \varepsilon$$

para toda $n \geq N$, donde $N = \max\{N_1, N_2\}$. Luego $x_n \to x^*$. ■

En el caso de sucesiones no acotadas, es conveniente extender las nociones de lim sup y lim inf. La definición es como sigue,

Definición 4.4.7 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión.* $\limsup x_n = \infty$ *si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente y* $\liminf x_n = -\infty$ *si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada inferiormente.*

El correspondiente al inciso (e) de la Proposición 4.4.6 sería:

Teorema 4.4.8 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Entonces* $\lim x_n = \infty$ *si y sólo si* $\liminf x_n = \limsup x_n = \infty$.

Demostración

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente entonces $\limsup x_n = \infty$. Si $c > 0$ es tal que $c \leq x_n$ para toda $n \geq N$ entonces $\liminf x_n = \infty$.

Si $\liminf x_n = \infty$ entonces para toda $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M \leq x_n$ para toda $n \geq N$. Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. ■

Ejemplo 4.4.9 Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos. Entonces,

$$\limsup a_n^{1/n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Solución

Sea
$$C = \left\{ c \in \mathbb{R} : c \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ excepto por un número finito de } n\text{'s} \right\}.$$
Si $c \in C$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c$ para toda $n \geq N$. Note que $c > 0$ y
$$a_n \leq c^{n-N} a_N = \left(\frac{a_N}{c^N}\right) c^n,$$
por lo que
$$a_n^{1/n} \leq \left(\frac{a_N}{c^N}\right)^{1/n} (c^n)^{1/n}.$$
Entonces
$$\limsup a_n^{1/n} \leq c \limsup \left(\frac{a_N}{c^N}\right)^{1/n} = c \lim \left(\frac{a_N}{c^N}\right)^{1/n} = c.$$
De donde
$$\limsup a_n^{1/n} \leq \inf C = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
Esto termina la demostración ❦

4.5 Sucesiones de Cauchy y completez

Los números reales se construyen a partir de los números racionales usando el Axioma del Supremo. Como el lector recordará, gracias al Axioma del Supremo podemos probar formalmente la existencia de números irracionales y *completar* así la recta real. La completación de los racionales a los números reales puede hacerse, sin usar el Axioma del Supremo, usando un tipo particular de sucesiones, las llamadas *sucesiones de Cauchy*. Con la construcción de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$ vía sucesiones de Cauchy el Axioma del Supremo se vuelve el Teorema del Supremo (una proposición demostrable). La ventaja de esta construcción con sucesiones de Cauchy es que puede copiarse al contexto de espacios métricos y obtener los llamados *espacios métricos completos*. Aunque en un espacio métrico completo no tendremos exactamente una versión del Axioma del Supremo (porque este depende también del orden en $\mathbb{R}$) si tendremos espacios métricos en los cuales se pueden probar una amplia gama de resultados que, como veremos en capítulos subsecuentes, han sido y son de gran importancia en el desarrollo del análisis matemático y sus aplicaciones. Iniciemos con la definición de sucesión de Cauchy.

Definición 4.5.1 *Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una* sucesión de Cauchy *si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $d(x_n, x_m) < r$ si $n, m \geq N$.*

En términos llanos decimos que una sucesión es de Cauchy si eventualmente sus elementos están arbitrariamente cerca unos de otros. Las sucesiones convergentes ciertamente tienen esta propiedad porque en una sucesión convergente, los términos de la sucesión están eventualmente cerca del límite de la sucesión y por transitividad los términos estarán cerca unos de otros eventualmente.

Proposición 4.5.2 *Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.*

El sentido común dice que si una sucesión es de Cauchy esta debería converger, porque si pensamos que eventualmente los términos de la sucesión de Cauchy están cerca unos de otros estos deberán aglomerarse cerca de algún punto del espacio (el posible límite) y por lo tanto resultar en una sucesión convergente. Sin embargo, esto no siempre sucede así.

Ejemplo 4.5.3 En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sea $x_1 = 2$ y definimos

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Ya mostramos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $\sqrt{2}$ y en particular $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Sin embargo, si pensamos en la misma sucesión pero ahora en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Note que, en efecto, $x_n \in \mathbb{Q}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y además tenemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, la sucesión no converge a ningún punto en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. El límite "se sale" del espacio.

El ejemplo anterior justifica la siguiente importante definición.

Definición 4.5.4 (Espacio métrico completo) *Un espacio métrico* (X, d) *se dice que es* completo *si* toda *sucesión de Cauchy en* X *converge a un punto de* X*. En este caso diremos que la métrica* d *es una métrica* completa*.*

El ejemplo 4.5.3 dice que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es una espacio métrico completo.

Definición 4.5.5 *Consideremos un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$*. Si la métrica inducida por la norma es completa, diremos que* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado completo o espacio de* Banach[2]*. Si además la norma es inducida por un producto interno diremos que* X *es un espacio de* Hilbert[3]*.*

Antes de mostrar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son espacios métricos completos (con respecto a cualquier norma) necesitamos un par de lemas.

Lema 4.5.6 *Sea* (X, d) *es un espacio métrico y* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* X*, entonces* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *esta acotada.*

Demostración

Para $\varepsilon = 1$ existe $N = N(1) > 1$ tal que $d(x_n, x_m) < 1$ si $n, m \geq N$. En particular, $d(x_n, x_N) < 1$ para todo $n \geq N$. Sea $M > \max\{1, d(x_N, x_1), \ldots, d(x_N, x_{N-1})\}$. Entonces $x_n \in B_M(x_N)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto la sucesión está acotada. ■

Lema 4.5.7 *Sea* (X, d) *es un espacio métrico y* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* X*. Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *tiene alguna subsucesión convergente, entonces* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge.*

Demostración

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy y $(x_{nk})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente digamos a $x^* \in X$. Demostremos que también $x_n \to x^*$. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, dado $\varepsilon/2$ existe $N_1 = N_1(\varepsilon/2)$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ si $n, m \geq N_1$. Por otro lado, como $x_{n_k} \to x^*$, existe $N_2 = N_2(\varepsilon/2)$ tal que $d(x_{n_k}, x^*) < \varepsilon/2$ si $k \geq N_2$. Entonces,

[2]Stefan Banach, 1892-1945.
[3]David Hilbert, 1862-1943.

por la desigualdad del triángulo se tiene que

$$d(x_n, x^*) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x^*),$$

y si $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $n, k \geq N$ entonces,

$$d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x^*) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto $x_n \to x^*$. ■

Proposición 4.5.8 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ esta acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente y por el lema 4.5.7 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge. ■

Observe que el mismo argumento prueba que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ es un espacio métrico completo. De hecho como cualesquiera dos normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, entonces cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ es completa. Veamos un ejemplo un poco más complicado de un espacio normado completo. Será también nuestro primer vistazo a un espacio vectorial normado de dimensión infinita.

Definición 4.5.9 (El espacio de sucesiones reales convergentes a cero) *Sea*

$$c_0 := \{(u_k)_{k=1}^{\infty} : u_k \in \mathbb{R} \text{ y } u_k \to 0\}.$$

En c_0 definimos la siguiente norma: $\|(u_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} := \sup\{|u_k| : k \in \mathbb{N}\}$.

Proposición 4.5.10 $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración

La demostración de que c_0 es un espacio vectorial y de que $\|\cdot\|_{\infty}$ es una norma en c_0 se dejan al lector como ejercicio. Para probar que $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ es completo, sea $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en c_0. Note que $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de sucesiones. Escribimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{x}_n = (u_n^k)_{k=1}^{\infty} = (u_n^1, u_n^2, \ldots).$$

Como cada $\mathbf{x}_n \in c_0$, se tiene que $\lim_{k\to\infty} u_n^k = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo.

Para producir un límite de la sucesión $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ en c_0, probaremos que las sucesiones coordenadas de números reales $(u_n^k)_{k=1}^{\infty}$ son de Cauchy y por lo tanto convergentes. La sucesión formada por los límites de las sucesiones coordenadas será nuestro candidato para límite de la sucesión $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$.

Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple

$$|u_n^k - u_m^k| \ \leq \sup\{|u_n^k - u_m^k| : k \in \mathbb{N}\} = \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m \|_\infty .$$

Claramente, como la sucesión $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy entonces $(u_n^k)_{k=1}^{\infty}$ también lo es, para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado que $(u_n^k)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ se concluye que $(u_n^k)_{n=1}^{\infty}$ converge, digamos a u^k. Considerar ahora la sucesión

$$\mathbf{x}^* := (u^1, u^2, \ldots, u^k, \ldots).$$

Probemos que:

a) $\mathbf{x}^* \in c_0$, y que,

b) $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}^*$, donde el límite se toma usando la norma de c_0.

Veamos primero que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}^*$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $\| \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m \|_\infty < \varepsilon$ si $n, m \geq N$. Por lo tanto, para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos que si $n, m \geq N$ entonces.

$$|u_n^k - u_m^k| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_\infty < \varepsilon$$

Si hacemos en la desigualdad anterior $m \to \infty$ (con n fija), entonces $| \ u_n^k - u^k| \leq \varepsilon$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y para toda $n \geq N$. Entonces,

$$\sup\{| \ u_n^k - u^k \ | : k \in \mathbb{N}\} \leq \varepsilon$$

y por lo tanto $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_\infty \leq \varepsilon$ para toda $n \geq N$.

Finalmente, para probar que $\mathbf{x} \in c_0$, veamos que

$$\lim_{k\to\infty} u^k = 0.$$

Como $|u_n^k - u^k| < \varepsilon$ para toda k y para toda $n \geq N$, en particular $|u_N^k - u^k| < \varepsilon$. Esto implica que $|u^k| < \varepsilon + |u_N^k|$. Luego, $|u^k| \leq 2\varepsilon$ si k es suficientemente grande. ■

EJERCICIOS

✎ **4.16** Pruebe la proposición 4.4.6.

✎ **4.17** Demostrar que $\limsup(x_n) < r$ si y sólo si existe un número N tal que si $n \geq N$ entonces $x_n < r$.

✎ **4.18** Demostrar que $\limsup(x_n) > r$ si y sólo si se cumple que $x_n > r$ para una infinidad de números $n \in \mathbb{N}$.

✎ **4.19** Sean (x_n) y (y_n) sucesiones acotadas de números reales positivos. Demostrar

$$\limsup(x_n\, y_n) \leq \limsup(x_n) \limsup(y_n).$$

✎ **4.20** Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones de números reales. Suponer que la sucesión (y_n) es acotada y que (x_n) converge. Demostrar las siguientes igualdades

$$\limsup(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) + \limsup(y_n),$$

$$\liminf(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) + \liminf(y_n).$$

✎ **4.21** Considere (X, d) con d la métrica discreta. Pruebe que este espacio métrico es completo.

✎ **4.22** Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy en un espacio métrico (X, d) demuestre que la sucesión de números reales $(d(x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ converge.

✎ **4.23** Sea (X, d) un espacio métrico completo y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una *sucesión contractiva*, es decir,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$$

para alguna $0 < \alpha < 1$ y para toda $n \geq 2$. Pruebe que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.

✎ **4.24** Pruebe que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado.

✎ **4.25** Definimos en $\mathbb{N}$ la siguiente métrica

$$d(n,m) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = m; \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Pruebe que en efecto d es una métrica ¿Es $(\mathbb{N}, d)$ un espacio métrico completo?

✎ **4.26** Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en (X, d). Pruebe que existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$$

✎ **4.27** *Un espacio normado que no es completo y que no satisface Bolzano-Weierstrass.* Sea c_{00} el espacio vectorial de sucesiones reales que sólo tienen un número finito de términos distintos de cero. Por ejemplo las siguientes sucesiones son elementos de c_{00}:

$$(0, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots) \quad (3, 0, 0, 5, 1, 2, 0, 0, \ldots) \quad (2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 0, 0, \ldots)$$

Definimos en c_{00} la siguiente norma: si $\mathbf{x} = (x_n) \in c_{00}$ entonces

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

Notar que, en efecto, se tiene un máximo porque excepto por un número finito de las coordenadas de $\mathbf{x}$ las demás son cero. Las normas de los ejemplos de arriba son, respectivamente, $1, 5, 2n$.

a) Pruebe que $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado.

b) Pruebe que $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ *no* es completo. *Sugerencia:* la sucesión $(\mathbf{x}_n)$ donde

$$\mathbf{x}_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \ldots\right)$$

es una sucesión de Cauchy en c_{00} que no converge a algún $\mathbf{x}_0 \in c_{00}$, nota que

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}.$$

c) Pruebe que el teorema de Bolzano-Weierstrass no es cierto en c_{00}. (*Sugerencia:* la sucesión $(\mathbf{e}_n)$ donde $\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (el uno en la entrada n-ésima) es una sucesión acotada en c_{00} que no tiene alguna subsucesión convergente (note que $\|\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m\|_\infty = 1$ si $n \neq m$).)

Capítulo 5

Topología de espacios métricos

En el siglo XIX, Bolzano y Cauchy fueron los primeros matemáticos en reconocer la importancia de las sucesiones que hoy llevan el nombre de este último. Es el principio de Cauchy lo que permite construir a los números reales a partir de los racionales.[1]

Otro concepto muy útil ha sido el de compacidad. Las condiciones de compacidad dada por Heine, Lebesgue y Borel da una caracterización simple de conjuntos compactos en cualquier espacio euclidiano. Sin embargo, no existe una caracterización suficientemente simple para espacios métricos en general. La compacidad es un concepto de gran utilidad, que simplifica muchas demostraciones.

Fréchet fue el creador de la definición de espacio métrico. También reconoció la importancia de la compacidad por sucesiones. En el contexto de espacios métricos, este concepto resultó ser equivalente a la definición original por cubiertas abiertas.

Heine, inspirado por los trabajos de Weierstrass y Cantor, es el primero en definir continuidad uniforme. Es, además, el autor del teorema de que toda función continua sobre un conjunto compacto es uniformemente continua.

Al estudiar conjuntos abstractos de funciones, fue deseable introducir y generalizar estructuras y propiedades que se habían estudiado en la recta real. El concepto de convergencia uniforme da origen al estudio sistemático de espacios de funciones; es decir, conjuntos

[1]Para mayor información acerca de la Historia del Análisis ver los siguientes textos: [3] o [9].

con una doble estructura de espacio métrico y espacio vectorial. Estas ideas se desarrollan a finales del siglo XIX, principalmente en Alemania e Italia.

5.1 Topología básica y continuidad

La idea central en Topología es hacer claro el concepto de "cercanía". Una definición importante es la siguiente.

Definición 5.1.1 *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Un conjunto G es abierto si*

$$(\forall p \in G)\,(\exists r > 0) : B_r(p) \subset G.$$

Un conjunto F es cerrado en X si F^c es abierto en X.

Proposición 5.1.2 *Para toda $x \in X$ y para toda $r > 0$, $B_r(x)$ es abierto.*

Demostración

Sea $y \in B_r(x)$, por demostrar que existe $s > 0$ tal que $B_s(y) \subset B_r(x)$. Sea $s = r - d(x, y)$ y $z \in B_s(y)$ arbitrario, queremos ver que $d(z, x) < r$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < s + d(y, x) = r - d(x, y) + d(y, x) = r$$

Por lo tanto $d(z, x) < r$ y como $z \in B_s(y)$ fue arbitrario, se tiene que $B_s(y) \subset B_r(x)$. ■

Proposición 5.1.3 *Un conjunto F es cerrado si y sólo si para toda sucesión convergente $x_n \to x^*$ cuya imagen satisfaga $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset F$, el límite satisface $x^* \in F$.*

Demostración

$\Longrightarrow$) Sea F cerrado. Sea (x_n) sucesión convergente $x_n \to x^*$ cuya imagen está contenida en F, esto es: $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset F$. Supongamos que $x^* \in F^c$. Como F^c es abierto existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x^*) \subset F^c$. Por la convergencia de la sucesión (x_n) existe un número N tal que si $n \geq N$ se tiene que $x_n \in B_\varepsilon(x^*) \subset F^c$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto $x^* \in F^c$.

$\Longleftarrow$) Sea $x^* \in F^c$ arbitrario. Supongamos que no existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x^*) \subset F^c$. Es decir, para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que $B_\varepsilon(x^*) \cap F \neq \emptyset$. Vamos a construir una sucesión en F. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos un elemento $x_n \in B_{1/n}(x^*) \cap F$. Esto implica que la sucesión (x_n) es tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset F$ y

$$d(x_n, x^*) < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto $x_n \to x^*$ y por hipótesis $x^* \in F$ lo cual es una contradicción. Concluimos que existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x^*) \subset F^c$ y por ende, dado que $x^* \in F^c$ fue arbitrario, se tiene que F^c es abierto. ■

Definición 5.1.4 *Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios métricos. Se dice que una función $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$ si*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0) : d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Si f es continua en todos los puntos de X, se dirá simplemente que es continua en X.

Usando bolas se puede dar una definición equivalente a la anterior: $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0) : x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)). \tag{5.1}$$

Debemos recalcar que en la definición anterior el número δ puede depender tanto del punto x_0 como de ε. Posteriormente se dará una nueva definición de continuidad (continuidad uniforme), en la que δ no dependerá del punto. Esta diferencia, aparentemente trivial, será esencial en secciones posteriores.

Dados una función $f : X \to Y$ y un subconjunto $A \subset Y$, recordemos que la imagen inversa $f^{-1}(A)$ es el subconjunto de X dado por

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

Usando esta notación, podemos reescribir la definición (5.1) de la siguiente manera: $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0) : B_\delta(x_0) \subset f^{-1}\left(B_\varepsilon(f(x_0))\right).$$

Usando el concepto de abierto y la afirmación anterior, tenemos la siguiente útil caracterización continuidad.

Proposición 5.1.5 *Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios métricos. Sea $f : X \to Y$ función. Son equivalentes las siguientes afirmaciones*

a) *f es continua.*

b) *Para todo conjunto abierto $G \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(G) \subset X$ es abierto.*

c) *Para todo conjunto cerrado $F \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(F) \subset X$ es cerrado.*

Usando sucesiones, también se puede caracterizar la continuidad.

Proposición 5.1.6 *Una función $f : X \to Y$ es continua en $x^* \in X$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x^*$ se tiene que $f(x_n) \to f(x^*)$.*

Demostración

$\Longrightarrow$) Supongamos que d_1 y d_2 son las métricas de X y Y respectivamente.

Sea x_n una sucesión convergente con límite x^*. Queremos demostrar que $f(x_n)$ converge a $f(x^*)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de continuidad, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$d_1(x, x^*) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x^*)) < \varepsilon.$$

Por otro lado, por ser (x_n) convergente a x^* tenemos que existe $N_\delta > 0$ tal que

$$n \geq N_\delta \Rightarrow \rho(x_n, x^*) < \delta.$$

Por lo tanto, si $n \geq N_\delta$ entonces $d_2(f(x_n), f(x^*)) < \varepsilon$ y esto implica que $f(x_n)$ converge a $f(x^*)$.

$\Longleftarrow$) Sea H un conjunto cerrado. Usando el la proposición 5.1.5, basta demostrar que $f^{-1}(H)$ es un subconjunto cerrado de X. Para ello, usaremos la caracterización dada en la proposición 5.1.3.

Sea (x_n) una sucesión totalmente contenida en $f^{-1}(H)$ que, además, es convergente al límite x^*. Queremos demostrar que $x^* \in f^{-1}(H)$. Sabemos que, para cada n, $f(x_n) \in H$. Por hipótesis, $f(x_n)$ converge a $f(x^*)$. Por ser H un cerrado, tenemos que $f(x^*) \in H$. Esto implica que $x^* \in f^{-1}(H)$. ■

Definición 5.1.7 *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Si $A \subset B \subset X$, se dice que A es denso en B, si para todo $b \in B$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $\rho(a, b) < \varepsilon$.*

Proposición 5.1.8 *Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ es denso si para cualquier abierto no vacío G de X se tiene que $G \cap A \neq \emptyset$.*

Una propiedad importante de $\mathbb{R}^n$ es la siguiente.

Teorema 5.1.9 *Dado $B \subset \mathbb{R}^n$, existe un subconjunto numerable $A \subset B$ que es denso en el conjunto B.*

Demostración

El conjunto $\mathbb{R}^n$, tiene la siguiente propiedad: existe un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ que es denso y numerable, por ejemplo $\mathbb{Q}^n$. Como $\mathbb{Q}^n$ es numerable, podemos suponer que $\mathbb{Q}^n = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Para cada entero positivo m tenemos que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{m}}(x_k)$$

y por lo tanto

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{m}}(x_k) \cap B.$$

Sea J el conjunto de parejas de enteros (k, m) positivos para los cuales se cumple que

$$B_{\frac{1}{m}}(x_k) \cap B \neq \emptyset.$$

Esto es, $J = \left\{(k, m) \in (\mathbb{Z}_+)^2 | B_{\frac{1}{m}}(x_k) \cap B \neq \emptyset\right\}$. Claramente J es un conjunto numerable. Por el axioma de elección, para cada $\alpha = (k, m) \in J$, escogemos un elemento

$$z_\alpha \in B_{\frac{1}{m}}(x_k) \cap B.$$

Vamos a demostrar que el subconjunto $A = \{z_\alpha \in \mathbb{R}^n | \alpha \in J\} \subset B$ es denso en B.

Sea $\varepsilon > 0$ y $b \in B$. Sea m un entero positivo tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por construcción, existe $x_r \in C$ tal que $b \in B_{\frac{1}{m}}(x_r) \cap B$. Por lo tanto, $\alpha = (r, m) \in J$. Concluimos que

$$d(z_\alpha, b) \leq d(z_\alpha, x_r) + d(x_r, b) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Esto termina la demostración. ■

Ejemplo 5.1.10 Consideremos a $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Para cada número irracional $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se define el conjunto $\Gamma(\alpha) = \{p\alpha + q : p, q \in \mathbb{Z}\}$. Demostraremos que $\Gamma(\alpha)$ es denso en $\mathbb{R}$.

Solución

Para cada entero positivo k existe $q_k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$0 < k\alpha + q_k < 1$$

Sea $u_k = k\alpha + q_k$. Definimos $A_j = [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$ para $j = 1, \cdots, n$.

Notemos que todos los elementos u_k son distintos. Es decir si $u_i = u_j$, entonces

$$i\alpha + q_i = j\alpha + q_j$$

y esto implicaría

$$(i - j)\alpha = q_j - q_i$$

Como α es irracional esto sólo podría ocurrir si $i = j$. Por el principio del palomar, existe j tal que

$$A_j \cap \{u_1, \cdots, u_{n+1}\}$$

contiene por lo menos dos elementos. Esto implica que existen u_k, $u_{k'}$ tales que

$$| u_k - u_{k'} | < \frac{1}{n},$$

es decir,

$$| k\alpha + q_k - k'\alpha - q_{k'} | < \frac{1}{n}.$$

De este modo, se encuentran $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tales que $| a_n\alpha + b_n | < \frac{1}{n}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos

$$0 < a_n\alpha + b_n < \frac{1}{n}.$$

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sea n tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Sean $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$0 < a_n\alpha + b_n < \frac{1}{n}.$$

Definimos $\gamma_n = a_n\alpha + b_n \in \Gamma(\alpha)$. Por la propiedad arquimediana, existe un entero $r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x_0 \in [r\gamma_n, (r+1)\gamma_n).$$

Por lo tanto

$$0 \leq x_0 - r\gamma_n < \gamma_n < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Esto completa la demostración. ❦

EJERCICIOS

✎ **5.1** Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que tanto X como $\emptyset$ son abiertos y cerrados.

✎ **5.2** Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado en X. Demostrar que el espacio métrico (F, d) es un espacio completo.

✎ **5.3** Sea (X, d) como en el ejemplo 3.1.3. Describir los conjuntos cerrados y abiertos.

✎ **5.4** Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar lo siguiente.

a) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

b) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

c) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

d) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

✎ **5.5** Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $u \in X$ un elemento fijo. Demostrar que la función $f : X \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = d(x, u)$, es continua. (*Sugerencia:* usar la desigualdad del triángulo.)

✎ **5.6** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demostrar que la función $\phi : X \to \mathbb{R}$, dada por $\phi(x) = \|x\|$, es continua.

✎ **5.7** Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $u \in X$ un elemento fijo y $r > 0$. Demostrar que el siguiente conjunto es abierto.

$$\{x \in X : d(x, u) > r\}.$$

✎ **5.8** Demostrar que cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$ de la forma $I = (a, b)$, $I = (a, \infty)$, y $I = (-\infty, b)$ son conjuntos abiertos bajo la distancia usual de la recta real.

✎ **5.9** Demostrar que, en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ es abierto.

✎ **5.10** Demostrar que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$ es abierto en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

✎ **5.11** Demuestre que en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado. Demuestre que $\mathbb{N}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

✎ **5.12** Probar que en un espacio métrico (X, d) todo subconjunto finito de X es cerrado.

✎ **5.13** Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $A \subset B \subset C \subset X$. Demostrar que si A es denso en B y B es denso en C entonces A es denso en C.

✎ **5.14** Pruebe que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Use la equivalencia entre $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_2$ para probar que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

✎ **5.15** Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que si $f :\to \mathbb{R}$ es una función continua entonces $\{x \in X : f(x) = a\}$ es un conjunto cerrado en X.

✎ **5.16** Demostrar que si $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in X$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B_r(x_0)$.

✎ **5.17** Pruebe, usando continuidad, que A es abierto en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ si y sólo si A es abierto en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$. (*Sugerencia:* basta probar que cierta función es continua.)

✎ **5.18** Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios métricos. Suponer que A es denso en X. Sean $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ dos funciones continuas tales que, para todo $x \in A$, $f(x) = g(x)$. Demostrar que $f = g$, es decir que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$.

✎ **5.19** Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(q) = 0$ para todo racional $q \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

✎ **5.20** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponer que f satisface que, para toda x se cumple

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\alpha),$$

donde α es un irracional. Demostrar que f es constante. (*Sugerencia:* usar el ejemplo 5.1.10.)

✎ **5.21** Demostrar la proposición 5.1.8.

5.2 Compacidad

Definición 5.2.1 *Sean (X, ρ) un espacio métrico y $K \subset X$. Sea*

$$\mathcal{F} = \{G_\alpha \subset X : \alpha \in I\}$$

una familia de conjuntos abiertos en X. Se dice que $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta de K si

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha.$$

También se dice que $\mathcal{F}$ cubre a K. Una subcubierta de $\mathcal{F}$ es un subconjunto de $\mathcal{F}$ que también es cubierta de K.

Definición 5.2.2 *$K \subset X$ es compacto si toda cubierta abierta $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ de K tiene una subcubierta finita. Es decir, existe un número finito de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ tal que*

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}.$$

La siguiente es una caracterización de conjuntos compactos que es muy útil en diversas aplicaciones. En ocasiones una demostración será más fácil si se utiliza esta caracterización. Sin embargo, la definición de compacidad dada en 5.2.2 se puede generalizar a los llamados espacios topológicos, cosa que no se puede realizar en el caso de compacidad por sucesiones.

Teorema 5.2.3 (Compacidad por sucesiones) *En un espacio métrico, un conjunto K es compacto si y sólo si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K.*

Demostración

$\Longrightarrow$) Supongamos que existe $(a_n) \subset K$ tal que no tiene una subsucesión que converja a un punto de K. Entonces para todo punto $x \in K$ existe una bola $B(x)$ que contiene un número finito de elementos de a_n (contando multiplicidad, es decir a_n para solamente un número finito de valores de n, aún si hay muchos a_n que son iguales).

Esto implica que $\{B(x) : x \in K\}$ es una cubierta de K y como K es compacto hay un número finito de elementos $x_1, \ldots, x_m \in K$ tal que las bolas $B(x_1) \cup \ldots \cup B(x_m)$ cubren a K y en cada una hay un número finito de a_n, lo cual contradice que a_n es una sucesión (infinita).

$\Longleftarrow$) Sea $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de K. Primero afirmamos que

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall x \in K)\,(\exists \alpha \in I) : B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_\alpha.$$

Para ver que esa afirmación es verdadera, supongamos que no y lleguemos a una contradicción. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\varepsilon = \frac{1}{n}$ y así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ tal que para toda $\alpha \in I$ se tiene que

$$B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq \mathcal{U}_\alpha.$$

Como $(x_n) \subset K$ tiene, por hipótesis, una subsucesión $\left(x_{n_k}\right)$ convergente a un punto $x^* \in K$. Además $x^* \in \mathcal{U}_\alpha$ para alguna $\alpha \in I$ y como $\mathcal{U}_\alpha$ es abierto

$$(\exists r > 0) : B\left(x^*, r\right) \subset \mathcal{U}_\alpha.$$

Tomando en cuenta los índices de la subsucesión $\{n_m : m \geq 1\}$, podemos escoger un entero suficientemente grande m de tal forma que $\frac{1}{n_m} < \frac{r}{2}$ y el elemento x_{n_m} cumpla $d\left(x_{n_m}, x^*\right) < \frac{r}{2}$. Esto implica que

$$B\left(x_{n_m}, \frac{1}{n_m}\right) \subset B\left(x_{n_m}, \frac{r}{2}\right) \subset B\left(x^*, r\right) \subset \mathcal{U}_\alpha$$

lo cual es una contradicción.

Tomemos la $\varepsilon > 0$ de la afirmación anterior. Vamos a construir un conjunto

$$\{y_1, \ldots, y_N\} \subset K.$$

Escogemos $y_1 \in K$ cualquiera. Tenemos dos posibilidades:

a) $(\forall y \in K) : B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset.$

b) $(\exists y^* \in K) : B\left(y^*, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset$.

En el primer caso, hacemos $N = 1$ y el proceso de construcción ha terminado. Para el segundo caso, hacemos $y_2 = y^*$ y continuamos con el proceso. Supongamos que se han escogido $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset K$ tales que las bolas $\left\{B\left(y_k, \frac{\varepsilon}{2}\right) : k = 1, \ldots, n\right\}$ son ajenas. Tenemos nuevamente dos posibilidades:

a) $(\forall y \in K) : B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B\left(y_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \neq \emptyset$.

b) $(\exists y^* \in K) : B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B\left(y_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = \emptyset$.

En el primer caso, decimos que $N = n$ y proceso de construcción ha terminado. Para el segundo caso, hacemos $y_{n+1} = y^*$ y continuamos con el proceso. Nótese que, en esta situación, las bolas $\left\{B\left(y_k, \frac{\varepsilon}{2}\right) : k = 1, \ldots, n+1\right\}$ son ajenas.

Ahora bien, si siempre tuviésemos el segundo caso, entonces la construcción no terminaría y así tendríamos en K una sucesión $\{y_1, y_2, \ldots\}$ tal que no tendría subsucesión convergente pues dos elementos cualesquiera de ella distan en al menos una distancia de ε, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, el proceso termina para algún N.

Claramente la colección finita $\{B\left(y_n, \varepsilon\right) : 1 \leq n \leq N\}$ de bolas (cuyo radio es dos veces más grande) cubre a K. Ahora tomemos los elementos correspondientes de la cubierta $\mathcal{U}_{\alpha_n}$, es decir tales que $B\left(y_n, \varepsilon\right) \subset \mathcal{U}_{\alpha_n}$. Como

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B\left(y_n, \varepsilon\right) \subset \bigcup_{n=1}^{N} \mathcal{U}_{\alpha_n},$$

entonces $\left\{\mathcal{U}_{\alpha_n} : 1 \leq n \leq N\right\}$ es una subcubierta finita de $\left\{\mathcal{U}_{\alpha_n}\right\}_{\alpha \in I}$ y por lo tanto K resulta ser compacto. ■

Para otra versión de la demostración anterior, consultar [4]. A continuación damos dos propiedades importantes de los conjuntos compactos. Recordemos que un conjunto G es acotado en un espacio métrico (X, ρ) si y sólo si existe $M > 0$ tal que para todo $x, y \in G$ se cumple $\rho(x, y) \leq M$, o bien si para todo $x^* \in X$ existe $M > 0$ tal que $G \subset B_M(x^*)$.

Proposición 5.2.4 *Todo conjunto compacto K es cerrado y acotado.*

Demostración

Primero veamos que K es acotado. Sea $a \in K$ y tomemos $B(a, m)$ las bolas de radio m y centro a, así que $K \subset \cup_{m=1}^{\infty} B(a, m)$ y como es compacto $\exists\ m_1, \ldots, m_n$ tal que $K \subset B(a, m_1) \cup \ldots \cup B(a, m_n) \subset B(a, M)$ donde $M = \max(m_1, \ldots, m_n)$. Así que K es acotado. Ahora veamos que K es cerrado es decir K^c abierto. Sea $u \in K^c$, para cada $n \in N$ tomemos $G_n = \left\{y \in X : d(y, u) > \frac{1}{n}\right\}$. Por el ejercicio 5.7, cada G_n es un conjunto abierto. Notemos que, si $m > n$ entonces $G_n \subsetneq G_m$. El conjunto G_n es abierto y como $u \notin K$ se tiene que

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$$

pero como K es compacto existen índices $\{m_1, \ldots, m_n\}$ tales que $K \subset G_{m_1} \cup ... \cup G_{m_n}$. Si tomamos $M = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$, entonces $K \subset G_M$. Por otra parte se tiene que $B\left(u, \frac{1}{M+1}\right) \subset G_M^c$ y esto implica que $B\left(u, \frac{1}{M+1}\right) \subset K^c$ de donde K^c es abierto y por lo tanto K es cerrado. ■

Ejemplo 5.2.5 Sea (X, d) un espacio métrico. Sea (x_n) una sucesión en X que converge a un punto x^*. Entonces el conjunto

$$K = \{x^*\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es compacto.

Ejemplo 5.2.6 Observemos que un conjunto cerrado y acotado no es, en general, compacto. En efecto sea (X, d) el espacio $\mathbb{N}$ con la métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

es claro que $\mathbb{N}$ es cerrado y es acotado. Sin embargo si tomamos la cubierta formada por todas las bolas abiertas de radio $\frac{1}{2}$,

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(n, \frac{1}{2}\right),$$

pero no tiene una subcubierta finita así que este es un ejemplo de un conjunto cerrado y acotado que no es compacto.

Proposición 5.2.7 *Todo subconjunto cerrado F de un conjunto compacto K es compacto.*

Demostración

Sea $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta de F. Entonces $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in I} \cup \{F^c\}$ una cubierta abierta de K, pues F^c es abierto y

$$K \subset F^c \cup F \subset F^c \cup \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{U}_\alpha .$$

Por ser K compacto, existe una subcubierta finita de K de la forma $\left\{\mathcal{U}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{U}_{\alpha_n}\right\} \cup \{F^c\}$. Claramente $\left\{\mathcal{U}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{U}_{\alpha_n}\right\}$ es una subcubierta de $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ que cubre a F. ■

Proposición 5.2.8 *Si $f : X \to Y$ es continua, y K es compacto en X, entonces la imagen $f(K)$ es un conjunto compacto en Y.*

EJERCICIOS

✎ **5.22** Probar que en un espacio métrico (X, d) todo subconjunto finito de X es compacto.

✎ **5.23** Dar un ejemplo de una cubierta abierta de (a, b) que no tenga una subcubierta finita.

✎ **5.24** Demostrar el ejemplo 5.2.5.

✎ **5.25** Demostrar la proposición 5.2.8.

✎ **5.26** Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva entre dos espacios métricos. Demostrar que si X es compacto entonces la función $f^{-1} : Y \to X$ es continua.

Finalizamos la sección con una caracterización de los conjuntos compactos del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Resulta que la propiedad de ser cerrado y acotado no sólo es necesaria sino que también es suficiente para subconjuntos del espacio euclidiano.

Teorema 5.2.9 (Heine-Borel) *Sea* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *el espacio euclidiano con la norma usual. Entonces, un conjunto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración

Definimos para cada $M > 0$ el siguiente conjunto.

$$G_M = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq M\right\}.$$

Claramente cada uno de los conjuntos G_M es cerrado y acotado. Vamos a demostrar que son compactos. Para ello usaremos la caracterización dada por el teorema 5.2.3. Sea $M > 0$ arbitrario y (x_n) una sucesión en G_M dada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión (x_{n_k}) y un punto x^* tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*.$$

Dado que G_M es un conjunto cerrado se tiene que $x^* \in G_M$. Concluimos por lo tanto que G_M es un conjunto compacto.

Ahora bien si K es un cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ arbitrario, podemos encontrar un número M tal que $K \subset G_M$ pues K es acotado. Por la proposición 5.2.7 se concluye que K es compacto. ■

El siguiente par de resultados resulta muy útil en muchas aplicaciones.

Corolario 5.2.10 *Considerar en* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *un conjunto compacto* K. *Entonces* K *tiene máximo y mínimo. Es decir,* $\inf K \in K$ *y* $\sup K \in K$.

Proposición 5.2.11 *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $K \subset X$ *un compacto. Sea* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *y considerar una función continua* $f : X \to \mathbb{R}$. *Entonces existen dos elementos* $x_{\min}, x_{\max} \in K$ *tales que para todo* $x \in K$ *se tiene que*

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}).$$

EJERCICIOS

✎ **5.27** Demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass a partir del teorema de Heine-Borel.

✎ **5.28** Demostrar el corolario 5.2.10 y la proposición 5.2.11.

✎ **5.29** Sea (A_k) una colección de conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$$

Demostrar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

✎ **5.30** Sea K un compacto de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ y $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in J\}$ una cubierta abierta del conjunto K. Demostrar que existe un número $\lambda > 0$ tal que si $\|x - z\|_2 < \lambda$ entonces existe un conjunto $G_\alpha \in \mathcal{G}$ que contiene a los puntos x y z.

5.3 Propiedades de las funciones continuas

En esta sección enunciaremos las propiedades básicas de las funciones continuas. Estas propiedades nos permitirán identificar, en muchos casos, si una función es continua o no.

Proposición 5.3.1 *Sean (X, d_1), (Y, d_2) y (Z, d_3) tres espacios métricos. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas. Entonces la composición $g \circ f : X \to Z$ es una función continua*

Demostración

Esta proposición se puede demostrar de dos maneras distintas. Las dos versiones de la demostración están basadas en las dos caracterizaciones de continuidad global dadas en las proposiciones 5.1.5 y 5.1.6.

En el primer casos basta demostrar que la imagen inversa de un abierto en Z es abierto en X. Sea G un abierto en Z. Por 5.1.5 se concluye $g^{-1}(G)$ es abierto en Y. Es una igualdad conocida que

$$(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}\left(g^{-1}(G)\right).$$

Dado que $g^{-1}(G)$ es abierto en Y, se tiene que $f^{-1}\left(g^{-1}(G)\right)$ es abierto en X y por tanto $(g \circ f)^{-1}(G)$ es abierto en X.

Una demostración alternativa, basada en la proposición 5.1.6, sería la siguiente. Sea (x_n) una sucesión en X tal que $x_n \to x^*$. Por continuidad de f se concluye que $f(x_n) \to f(x^*)$. Por la continuidad de g se concluye que

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g\left(f(x^*)\right) = (g \circ f)(x^*).$$

Dado que la sucesión (x_n) es arbitraria, se concluye que $g \circ f$ es continua. ■

Si el codominio es un espacio normado, se puede definir la suma de dos funciones término a término. Tenemos lo siguiente.

Proposición 5.3.2 *Sean (X, d_1) un espacio métrico y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio normado. Sean y $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Entonces:*

a) *La función $f + g : X \to Y$ dada por*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

es continua.

b) *La función $\alpha f : X \to Y$ dada por*

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

es continua.

En particular, el resultado anterior dice que si el dominio X es un espacio métrico y el codominio Y es un espacio normado, entonces el conjunto de funciones continuas de X a Y tiene una estructura de espacio vectorial. Tenemos otras situaciones en donde el codominio tiene otro tipo de estructura.

Proposición 5.3.3 *Sean (X, d_1) un espacio métrico y $(Y, < \cdot, \cdot >)$ un espacio con producto interno. Sean y $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Entonces la función $< f, g >$: $X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle f, g\rangle (x) = \langle f(x), g(x)\rangle$$

es continua si se utiliza la distancia usual en $\mathbb{R}$.

Finalmente, si tenemos que el codominio es el conjunto de número reales con la métrica usual entonces tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.3.4 *Sean (X, d_1) un espacio métrico y $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ el conjunto de números reales con la métrica usual. Sean y $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Sea $Z = X \setminus g^{-1}(0)$ y suponer que $Z \neq \emptyset$. Entonces*

a) *La función $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

es continua.

b) *La función $\frac{f}{g} : Z \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

es continua.

Ejemplo 5.3.5 Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^n$. Entonces f es continua.

Solución

Por inducción sobre n. Supongamos que $g(x) = x^{n-1}$ es continua, entonces $x^n = xg(x)$ es continua por ser producto de continuas. ❦

EJERCICIOS

✎ **5.31** La función de Dirichlet, se define en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ como sigue.

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demostrar que la función de Dirichlet no es continua en ningún punto

✎ **5.32** Se define en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ la siguiente función.

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demostrar que h es continua en un solo punto.

✎ **5.33** Demostrar la proposición 5.3.2.

✎ **5.34** Demostrar la proposición 5.3.3.

✎ **5.35** Demostrar la proposición 5.3.4.