# INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS REAL

ANTONIO TINEO

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de los Andes
Versión revisada por Carlos Uzcátegui
Enero 2005

# Índice general

# Capítulo 1

# Conjuntos y funciones

**Introducción.** Además de fijar alguna terminología, referente a la teoría de conjuntos, este capítulo tiene por objeto establecer el concepto fundamental de función y estudiar sus propiedades elementales, a saber: composición de funciones, funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Unas breves palabras serán dichas a cerca de las relaciones de orden y de equivalencia.

## 1.1. Conjuntos.

Cualquier teoría matemática debe tener un punto de partida; es decir, se deben aceptar (sin definición alguna), una serie de **términos primitivos** y ciertas relaciones entre ellos, llamadas **axiomas**. En el caso que nos ocupa, los términos primitivos (que aceptaremos como intuitivos) son aquellos de **conjunto**, **elemento** y **pertenencia**.

En general, se usarán letras mayúsculas $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ para denotar conjuntos. Los elementos de un conjunto serán denotados generalmente, por letras minúsculas tanto del alfabeto griego como latino. Dados un elemento $x$ y un conjunto $A$ pondremos $x \in A$ (léase: "$x$ pertenece a $A$") para indicar que $x$ es un elemento de $A$. En caso contrario se utiliza el símbolo $x \notin A$, que se lee: "$x$ no pertenece a $A$".

Sean $A$ y $B$ conjuntos. El símbolo $A = B$ (léase: "$A$ igual a $B$") se usará para indicar que $A$ y $B$ son el mismo conjunto. En caso contrario, usaremos el símbolo $A \neq B$ que se lee: "$A$ distinto (o diferente) de $B$". Uno de los axiomas de la teoría de conjuntos dice que:

*$A = B$ si y sólo si $A$ y $B$ poseen los mismos elementos.*

Sean $A, B$ conjuntos. Diremos que $A$ está **contenido** en $B$ o que $A$ es un **subconjunto** de $B$, denotado $A \subset B$, si todo elemento de $A$ es elemento de $B$. Si $A \subset B$ también pondremos $B \supset A$, que se lee: "$B$ contiene a $A$". Si $A \subset B$ y $A \neq B$ diremos que $A$ es un **subconjunto propio** de $B$. Note que cualesquiera sean los conjuntos $A, B, C$, se tiene:

i) $A \subset A$.

ii) $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

iii) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Sea A un conjunto y sea $P(x)$ una oración que tiene a $x$ como sujeto. Un axioma de la teoría de conjuntos informalmente dice que:

*Los elementos $x$ de $A$ para los cuales $P(x)$ es verdadera, es un conjunto.*

Ese conjunto será denotado por $\{x \in A : P(x)\}$. El símbolo $\{x \in A : \ldots\}$ se lee: "El conjunto de los $x$ en $A$ tales que …". A fin de aclarar un poco más el axioma anterior daremos a continuación algunos ejemplos.

1) **El conjunto vacío**. En el capítulo siguiente admitiremos como un axioma más, la existencia del conjunto de los números reales. En particular, tendremos la existencia de al menos un conjunto $A$. Consideremos ahora la oración $P(x) =$ "$x$ no pertenece a $A$". Por el axioma precedente se tiene un conjunto definido por $\{x \in A : x \notin A\}$ que denotaremos por $\emptyset$ y que llamaremos **conjunto vacío**. Note que $\emptyset$ es el único conjunto que no tiene elementos. Note también que para cualquier conjunto $X$ se tiene $\emptyset \subset X$ (porque no hay elementos en $\emptyset$ que no pertenezcan a $X$).

2) **Conjunto Singular**. Sea $A$ un conjunto y sea $a \in A$. Considerando la oración "$x$ es igual a $a$" obtenemos el conjunto $\{x \in A : x = a\}$ que se denota por $\{a\}$ y se llama **el conjunto singular de** $a$. Note que $\{a\}$ posee a $a$ como único elemento.

3) **Intersección de conjuntos**. Sea $A, B$ conjuntos y consideremos la oración $P(x) =$ "$x$ pertenece a $B$". Entonces, $\{x \in A : x \in B\}$ es un conjunto que se denota por $A \cap B$ y que se llama la **intersección** de $A$ con $B$. Cuando $A \cap B = \emptyset$ decimos que $A$ y $B$ son **disjuntos**.

4) **Diferencia de Conjuntos**. Sean $A, B$ conjuntos. La **diferencia** $A \setminus B$ se define como $\{x \in A : x \notin B\}$. Si $B \subset A$, el conjunto $A \setminus B$ se llama el **complemento de** $B$ **respecto a** $A$ y se denota también por $B^c$, si ello no acarrea confusión.

Sean $A, B$ conjuntos. El axioma de las uniones dice que:

*Existe un (único) conjunto cuyos elementos son exactamente aquellos que están en $A$ o que están en $B$.*

Dicho conjunto se denota por $A \cup B$ y se llama la **unión** de $A$ con $B$. En realidad, el axioma de las uniones dice que si $\mathcal{P}$ es un conjunto y cada elemento de $\mathcal{P}$ es a su vez un conjunto, entonces existe un único conjunto $A$ tal que $x \in A$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{P}$. Sean $x, y$ elementos de un conjunto $A$. El conjunto $\{x\} \cup \{y\}$ se denotará por $\{x, y\}$.

Un axioma adicional de la teoría de conjuntos dice que:

*Si $A$ es un conjunto, entonces hay un conjunto cuyos elementos son exactamente los subconjuntos de $A$.*

Este conjunto lo denotamos por $\mathcal{P}(A)$ y lo llamamos **el conjunto de partes de** $A$.

**Ejercicios**.

1. Sean $A, B, C$ conjuntos. Pruebe que:

   *a*) $A \cap B = B \cap A$.

   *b*) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, lo que permite escribir $A \cap B \cap C$ en lugar de $A \cap (B \cap C)$ o de $(A \cap B) \cap C$.

   *c*) $A \cap B = A$ si y sólo si $A \subset B$.

   *d*) Si $A \subset B$, entonces $A \cap C \subset B \cap C$.

2. Sean $A, B, C$ conjuntos. Pruebe que

   *a*) $A \cup B = B \cup A$ y $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

   *b*) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   *c*) $A \cup B \subset A$ si y sólo si $B \subset A$.

   *d*) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ y $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

3. Sea $A$ un conjunto. Pruebe que dados $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ se tiene que : $(X^c)^c = X$, $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$ y $(X \cap Y)^c = X^C \cup Y^c$. Aquí, $X^c$ denota el complemento de $X$ en $A$. Pruebe también que $X \subset Y$ si y sólo si $X^c \supset Y^c$.

4. Pruebe que no existe ningún conjunto $U$ que contenga a cualquier otro conjunto. *Ayuda*. Suponga que tal $U$ existe y defina $V = \{A \in \mathcal{P}(U) : A \notin A\}$. Ya que $U$ contiene cualquier conjunto, debe tenerse que $V \subset U$. Observe ahora que cualquiera de las dos siguientes posibilidades $V \in V$, $V \notin V$, lleva a contradicción.

## 1.2. Funciones.

En esta sección, $A, B$ denotan conjuntos. Dados $x \in A, y \in B$ definimos **el par ordenado** $(x, y)$ como el conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Dejamos como un ejercicio al lector mostrar la siguiente propiedad importante de los pares ordenados: $(a, b) = (x, y)$ si y sólo si $a = x$ y $b = y$.

El **producto cartesiano** de $A$ por $B$, denotado $A \times B$, se define como el conjunto de todos los pares ordenados $(x, y)$ tales que $x \in A$ e $y \in B$. (Note que $(x, y)$ es un elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$).

Una **función o aplicación de** $A$ **en** $B$ es una terna ordenada $(A, f, B)$ donde $f$ es un subconjunto de $A \times B$ con la siguiente propiedad:

*Para cada* $x \in A$ *existe un único elemento* $y \in B$ *tal que* $(x, y) \in f$.

Este único elemento $y$ se denota por $f(x)$ y se llama **la imagen de** $x$ **por** $f$. El conjunto $A$ es llamado el **dominio de** $f$ y el conjunto $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ se conoce como el **rango de** $f$. El conjunto $f$ se conoce también como el **gráfico de la función** $(A, f, B)$**.** En la casi totalidad de los casos y cuando esto no cause confusin, diremos "la función $f$", en vez de la función $(A, f, B)$.

En la literatura corriente, una función $(A, f, B)$ se denota por el símbolo $f : A \to B$ y se le piensa como una ley o regla que a cada elemento $x \in A$ asocia un único elemento $f(x)$ de $B$.

**Ejemplos**.

a) Sean $A, B$ conjuntos no vacíos y fijemos $b \in B$. Entonces $(A, f, B) := (A, A \times \{b\}, B)$ es una función de $A$ en $B$ tal que $f(x) = b$, para todo $x \in A$. Esta función es llamada **función constante (de valor** $b$**)**.

b) Asociada con cada conjunto no vacío $A$ se tiene una aplicación $id_A : A \to A$ definida por $id_A(x) = x$ para cada $x \in A$. Dicha aplicación se denomina **identidad de** $A$ y como subconjunto de $A \times A$ no es otra cosa que $\{(x, y) \in A \times A : x = y\}$.

Enunciaremos a continuación el **axioma de elección o escogencia**; uno de los más famosos de la teoría de conjuntos.

*Sea $X$ un conjunto y sea $\mathcal{P}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Entonces existe una función $S : \mathcal{P} \to X$ tal que $S(Z) \in Z$ para cada $Z \in \mathcal{P}$.*

Informalmente hablando, este axioma dice que dada cualquier familia $\mathcal{P}$ de subconjuntos no vacíos de $X$, es posible escoger un elemento en cada uno de los miembros de esa familia. Cuando la familia en cuestión es "pequeña" esto parece obvio. Sin embargo no es nada claro cuando la "familia es muy grande".

Sean $A, B, C$ conjuntos. Dadas aplicaciones $f : A \to B, g : B \to C$, se define **la composición o compuesta de** $f$ **con** $g$ como la función $g \circ f : A \to C$ dada por $g \circ f(x) = g(f(x))$.

**Proposición 1.2.1.** *Dada una aplicación $f : A \to B$ se tiene $id_B \circ f = f$ y $f \circ id_A = f$.*

**Proposición 1.2.2.** *Sean $A, B, C, D$ conjuntos y sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ funciones. Entonces $(h \circ g) \circ f \equiv h \circ (g \circ f)$. Es decir,* **"la composición de funciones es asociativa".**

**Demostración.** De la definición de composición de funciones se tiene:

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

De manera análoga, $[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$, lo cual termina la prueba. ■

Estudiaremos ahora algunos tipos particulares de funciones.

**Definición 1.2.3.** *Una función $f : A \to B$ se dice* **biyectiva** *si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f \equiv id_A$ y $f \circ g \equiv id_B$. Note que, en este caso, $g$ también es biyectiva.*

**Proposición 1.2.4.** *Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Entonces existe una única aplicación $g : B \to A$ satisfaciendo las condiciones de la Definición 1.2.3.*

**Demostración.** Supongamos que $g_1, g_2 : B \to A$ son funciones que satisfacen las condiciones de la Definición 1.2.3. Entonces, $g_1 \circ f = id_A$ y $f \circ g_2 = id_B$, y usando las dos Proposiciones anteriores obtenemos

$$g_2 = id_A \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ id_B = g_1.$$

■

**Observaciones:** a) Sea $f : A \to B$ una biyección. La única aplicación $g : B \to A$ dada por la Definición 1.2.3 y la Proposición 1.2.4 se llama **la inversa** de $f$ y se denota por $f^{-1}$. De la definición 1.2.3 resulta que $f^{-1}$ es una biyección cuya inversa es $f$. Es decir, $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) La función $id_A$ es una biyección cuya inversa es ella misma.

**Proposición 1.2.5.** *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones biyectivas, entonces la composición $g \circ f$ también lo es y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

**Demostración.** De las Proposiciones 1.2.1-1.2.2 y de la Definición 1.2.3 se tiene:

$$[(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})] = g \circ [f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})] = g \circ [(f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}]$$

$$= g \circ [id_B \circ g^{-1}] = g \circ g^{-1} = id_C.$$

De manera semejante, $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = id_A$, lo cual completa la prueba. ■

Diremos que una función $f : A \to B$ es **inyectiva** si la relación $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$. Esto equivale a decir que $f(x) \neq f(x')$ si $x \neq x'$. Note que si $f$ es inyectiva e $y \in f(A)$, entonces existe un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

**Proposición 1.2.6.** *Una función $f : A \to B$ es inyectiva si y sólo si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$.*

**Demostración.** Supongamos primero que existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Si $f(x) = f(x')$, entonces $g(f(x)) = g(f(x'))$ de donde, $id_A(x) = id_A(x')$. De aquí, $x = x'$, lo cual prueba que $f$ es inyectiva.

Supongamos ahora que $f$ es inyectiva y fijemos $a_0 \in A$. Definiremos $g : B \to A$ como sigue:

$$g(y) = a_0 \text{ si } y \notin f(A).$$

$$g(y) = x \text{ si } y \in f(A) \text{ e } y = f(x).$$

De la definición de $g$ se tiene $g(f(x)) = x$, cualquiera sea $x \in A$, de modo que $g \circ f = id_A$. ■

Sea $f : A \to B$ una aplicación. Dado $b \in B$ definimos la **contraimagen** de $b$ por $f$ como el conjunto $f^{-1}(b) = \{x \in A : f(x) = b\}$. (Note que el símbolo $f^{-1}(b)$ está definido aunque $f$ no sea biyectiva). Cuando $f^{-1}(b) \neq \emptyset$, para cada $b \in B$, decimos que $f$ es **sobre ó sobreyectiva**. Es decir, $f$ es sobreyectiva si y sólo si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. En otras palabras, $f$ es sobreyectiva si y sólo si $f(A) = B$.

**Proposición 1.2.7.** *Una aplicación $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si existe una aplicación $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$.*

**Demostración.** Supongamos primero que existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$. Fijemos $b \in B$ y pongamos $a = g(b)$. Entonces, $f(a) = f \circ g(b) = id_B(b) = b$, lo cual muestra que $f$ es sobreyectiva.

Supongamos ahora que $f$ es sobreyectiva. Por el axioma de elección existe una función $S : \{f^{-1}(b) : b \in B\} \to A$ tal que $S(f^{-1}(b)) \in f^{-1}(b)$ para cada $b \in B$. Definamos ahora $g : B \to A$ mediante $g(b) = S(f^{-1}(b))$. Ya que $g(b) \in f^{-1}(b)$, se sigue de la definición de contraimágen, que $f(g(b)) = b = id_B(b)$. ■

**Proposición 1.2.8.** *Una aplicación $f : A \to B$ es biyectiva si y sólo si $f$ es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.*

**Demostración.** Si $f$ es biyectiva existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$, y de las Proposiciones 1.2.6-1.2.7, $f$ es inyectiva y sobreyectiva.

Recíprocamente, si $f$ es inyectiva y sobreyectiva, entonces por las Proposiciones 1.2.6 y 1.2.7 existen funciones $g, h : B \to A$ tales que $g \circ f = id_A$ y $f \circ h = id_B$. Usando el argumento de la Proposición 1.2.4 se prueba (hacerlo) que $h = g$ y en consecuencia, $g$ satisface las condiciones de la Definición 1.2.3. Luego, $f$ es biyectiva. ■

Dada una función $f : A \to B$ y subconjuntos $X \subset A, Y \subset B$, definimos $f(X) = \{f(x) : x \in X\}, f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}$. El primero de ellos se llama **la imagen de** $X$ **por** $f$, mientras que el segundo se conoce como **la contraimagen de** $Y$ **por** $f$.

Sean $A, I$ conjuntos. Toda aplicación $F : I \to \mathcal{P}(A)$ es llamada una **familia de subconjuntos de** $A$. La notación usual para una tal familia es $\{X_i\}_{i\in I}$, donde $X_i = F(i)$. Se dice también que la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ esta **indizada** por $I$.

Se define la **unión de la familia** $\{X_i\}i \in I$, denotada $\bigcup_I X_i$ (o $\bigcup_{i\in I} X_i$) como el conjunto de aquellos elementos $x \in A$ tales que $x \in X_i$ para algún $i \in I$. Es decir, $\bigcup_I X_i = \{x \in A : x \in X_i \text{ para algún } i \in I\}$. Si $I \neq \emptyset$, se define la **intersección** de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$, denotada $\bigcap_I X_i$, como el conjunto de los elementos de $A$ que son comunes a todos los $X_i$. Es decir, $\bigcap_I X_i = \{x \in A : x \in X_i, \forall i \in I\}$. El símbolo $\forall$ se lee: "para todo".

**Nota**. Se define $\bigcup_\emptyset X_i = \emptyset$. Sin embargo no puede definirse el símbolo $\bigcap_\emptyset X_i$, porque esto daría un conjunto $U$ que contiene cualquier elemento $x$. Por el ejercicio 4 de la sección 1, esto resultaría imposible.

Se dice que la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ **es disjunta** si $X_i \cap X_j = \emptyset$, cuando $i \neq j$.

Un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(A)$ también puede ser considerado como una familia de subconjuntos de $A$; a través de la aplicación de inclusión $F : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(A)$; $F(X) = X$.

**Ejercicios**.

1. Sean $a, x \in A$ y $b, y \in B$. Pruebe que $(a, b) = (x, y)$ si y sólo si $a = x$ y $b = y$.

2. Defina la **terna ordenada** $(x, y, z)$ como el conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ y pruebe un resultado análogo al anterior. Defina también la noción de cuaterna ordenada.

3. Sean $A, B, C, D$ conjuntos. Pruebe que dos funciones $(A, f, B), (C, g, D)$ son iguales si y sólo si $A = C, B = D$ y $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A$. En este caso algunos autores escriben $f \equiv g$ y se dice que $f$ y $g$ **son idénticas**.

4. Sea $(A, f, B)$ una función y sea $X$ un subconjunto de $A$. Pruebe que $(A, f \cap X \times B, B)$ es una función que denotaremos por $f|_X$ y que llamaremos **la restricción de $f$ a $X$**.

5. Pruebe que dado un subconjunto $X$ de $A$ y una función $g : X \to B$, existe una función $f : A \to B$ tal que $f|_X = g$. Esta función $f$ es llamada **una extensión o prolongamiento de $g$**.

6. Sean $a, b$ elementos de un conjunto $A$. Muestre la existencia de una biyección $f : A\backslash\{a\} \to A\backslash\{b\}$.

7. Pruebe que la composición de funciones inyectivas (resp. sobreyectivas) es inyectiva (resp. sobreyectiva).

8. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva (resp. sobreyectiva). Pruebe que dados $a \in A, b \in B$, existe una función inyectiva (resp. sobreyectiva) de $A \setminus \{a\}$ en $B \setminus \{b\}$.

9. Dada una función $f : A \to B$, pruebe que la función $g : A \to f(A)$ definida por $g(x) = f(x)$, es sobreyectiva. Concluya que $g$ es biyectiva si y sólo si $f$ es inyectiva.

10. Sea $B$ un subconjunto de un conjunto $A$. Construya una función sobreyectiva de $A$ en $B$.

11. Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva y sea $b \in B$. Pruebe que la función $g : A \setminus f^{-1}(b) \to B \setminus \{b\}$ definida por $g(x) = f(x)$ es sobreyectiva.

12. Sea $f : A \to B$ una función. Dados $X_1, X_2 \subset A$ e $Y_1, Y_2 \subset B$ pruebe que:

    *a*) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

    *b*) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

    *c*) $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$.

    *d*) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

    *e*) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$. Dar un ejemplo donde la contención sea estricta.

13. (Leyes de Morgan). Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de $A$. Pruebe que $(\bigcup_I X_i)^c = \bigcap_i X_i^c$ y $(\bigcap_I X_i)^c = \bigcup_I X_i^c$.

## 1.3. Relaciones.

Una versión preliminar de estas notas fué escrita sin hacer uso explícito de la noción de relación. Sin embargo, las relaciones de orden y de equivalencia son tan importantes en matemáticas, que una mención a ellas se hace necesaria.

En lo que resta del capítulo, $A$ y $B$ denotan conjuntos. Todo subconjunto $R \subset A \times B$ será llamado una **relación** (entre $A$ y $B$). Si $(x, y) \in R$ decimos que $x$ **está en la relación** $R$ **con** $y$ y escribimos $x\,R\,y$.

Las relaciones más importantes en matemática (aparte de la noción de función) ocurren cuando $A = B$. En este caso una relación $R \subset A \times B$ se llamará **interna** en $A$.

Sea $R$ una relación interna en $A$. Diremos que:

1) $R$ es **reflexiva**, si $x\,R\,x$ para cada $x \in A$.

2) $R$ es **transitiva**, si las condiciones $x\,R\,y$, $y\,R\,z$ implican $x\,R\,z$.

3) $R$ es **simétrica** si la condición $xRy$ implica $yRx$.

4) $R$ es **antisimétrica** si las condiciones $xRy$ e $yRx$ implican $x = y$.

Un **orden** (u **orden parcial)** en $A$ es una relación interna $\leq$ en $A$ la cual es reflexiva antisimétrica y transitiva. Un **conjunto ordenado** es un par $(A, \leq)$ donde $A$ es un conjunto y $\leq$ es un orden en $A$.

**Ejemplo**. Sea $X$ un conjunto. Entonces la relación de contención $Y \subset Z; Y, Z \in \mathcal{P}(X)$; define una relación de orden en $\mathcal{P}(X)$. Así, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ es un conjunto ordenado.

Una relación interna $\simeq$ en $A$ se dice de **equivalencia**, si esa relación es reflexiva, simétrica y transitiva. En lo que resta de la sección, $\simeq$ denotará una relación de equivalencia en $A$. Diremos que $\alpha \subset A$ es **una clase de** $A$ **según** $\simeq$ si:

i) $\alpha \neq \emptyset$.

ii) $x \simeq y$ cualesquiera sean $x, y \in \alpha$.

iii) $y \in \alpha$ si $x \simeq y$ y $x \in \alpha$.

El conjunto $\{\alpha \in \mathcal{P}(A) : \alpha \text{ es una clase de } A \text{ según } \simeq\}$ se llama el **conjunto cociente** de $A$ por $\simeq$ y se denota por $A/\simeq$.

**Ejercicios**.

1. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Diremos que $a \in A$ es **cota superior** (resp. **inferior**) de un subconjunto $B$ de $A$ si $x \leq a$ (resp. $x \geq a$) para cada $x \in B$. En este caso se dice que $B$ está **acotado superiormente** (resp. **inferiormente**) en $A$. Se dice que $B$ **tiene supremo en** $A$ si "$B$ posee una cota superior mínima"; es decir, si existe una cota superior $c \in A$ de $B$ tal que $c \leq a$ para cualquier otra cota superior $a$ de $B$. Pruebe que existe a lo sumo un elemento $c \in A$ con esta propiedad. Cuando tal $c$ exista, será llamado **el supremo** de $B$ en $A$ y será denotado por $\sup_A(B)$ (ó por $\sup(B)$, si no hay peligro de confusión).

2. Sea $X$ un conjunto. Pruebe que todo subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ posee supremo con respecto al orden dado por contención.

3. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y suponga que el conjunto $\{a, b\}$ posee supremo en $A$, cualesquiera sean $a, b \in A$. Defina $a \vee b = \sup(\{a, b\})$ y muestre que $a \vee b = b \vee a$ y $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, cualesquiera sean $a, b, c \in A$.

4. Sean $\alpha, \beta \subset A$ dos clases de $A$ según $\simeq$. Pruebe que si $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, entonces $\alpha = \beta$. En otras palabras, dos clases de $A$ según $\simeq$ ó son disjuntas ó son iguales.

5. Pruebe que para cada $a \in A$, el conjunto $[a] := \{x \in A : x \simeq a\}$ es una clase de $A$ según $\simeq$, que llamaremos **la clase de $a$ según** $\simeq$ .

6. Sea $\alpha \subset A$ una clase de $A$ según $\simeq$. Pruebe que si $a \in \alpha$, entonces $\alpha = [a]$.

7. Por **una división** de $A$ entendemos una familia $\mathcal{P}$ de subconjuntos no vacíos de $A$, dos a dos disjuntos cuya reunión es $A$. Pruebe que $A/\simeq$ es una división de $A$. Recíprocamente, pruebe que si $\mathcal{P}$ es una división de $A$, entonces $\mathcal{P} = A/\simeq$ para alguna relación de equivalencia $\simeq$ en $A$.

# Capítulo 2

# Sistemas numéricos

**Introducción.** El objeto de este capítulo es introducir, de manera axiomática, *el cuerpo de los números reales* y estudiar algunos de sus subconjuntos más importantes, a saber: números naturales, enteros, racionales e irracionales.

Hay otra forma de introducir los números reales, llamada constructiva. Esta vía comienza con la aceptación de los números naturales y se construyen sucesivamente, los enteros, los racionales y, finalmente, los números reales. La construcción de los enteros y racionales es sumamente algebraica y no aporta mucho al estudio del análisis matemático. Para la construcción de los números reales, a partir de los racionales, se presentan dos alternativas: Las Cortaduras de Dedekind o Las Sucesiones de Cauchy. La primera de ellas es un proceso muy particular que sólo sirve para construir los números reales, mientras que el segundo, si tiene importancia posterior, como es la completación de un espacio métrico [**?**]. Sin embargo, debido a las sutilezas y tecnicismos de este método, es preferible, a nuestro criterio, dejarlo para un curso más avanzado.

## 2.1. Leyes de composición.

En esta sección, $A$ denota un conjunto no vacío. Toda aplicación $*: A \times A \to A$ será llamada **una ley de composición en** $A$. La imagen de $(x, y)$ mediante tal ley, será denotada por $x * y$ en vez de $*((x, y))$. En lo que resta de esta sección, $*$ denotará una ley de composición en $A$. Diremos que:

i) $*$ es **asociativa**, si $x * (y * z) = (x * y) * z$, cualesquiera sean $x, y, z \in A$.

ii) $*$ es **conmutativa**, si $x * y = y * x$, cualesquiera sean $x, y \in A$.

iii) $e \in A$ es **elemento neutro para** $*$, si $x * e = e * x = x$, para cada $x \in A$.

Supongamos que $*$ es una ley de composición en un conjunto $A$, la cual posee un elemento neutro $e$. Se dice que $x \in A$ **es simetrizable ó invertible respecto a** $*$ si existe $y \in A$ tal que $x*y = y*x = e$.

**Ejemplo 1**. Sea $X$ un conjunto y sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todas las funciones $f : X \to X$ entonces, la composición de funciones es una ley de composición en $\mathcal{A}$. De manera más precisa, se tiene una ley de composición $*$ en $\mathcal{A}$ definida por $f * g = g \circ f$. Note que por la Proposición 1.2.1, $id_A$ es el elemento neutro de $*$. Además, por la Proposición 1.2.2, $*$ es asociativa. Es más, de la definición 1.2.3, se tiene que los elementos invertibles de $\mathcal{A}$ son las biyecciones de $X$ en si mismo.

**Ejemplo 2**. Sea $X$ un conjunto. Entonces, la unión de conjuntos define una ley de composición $*$ en $\mathcal{P}(X)$. El lector comprobará que $*$ es conmutativa y asociativa. Además, $\emptyset$ es el elemento neutro de esta ley de composición. ¿Qué puede usted decir acerca de la ley de composición dada por $A * B = A \cap B$?.

Un **grupo** es un par $(G, *)$, donde $*$ es una ley de composición en un conjunto $G$, la cual es asociativa, posee un elemento neutro y todo elemento de $G$ es invertible. Si además $*$ es conmutativa, se dice que $(G, *)$ es **conmutativo ó abeliano**. En este caso, la ley $*$ suele denotarse por $+$, el elemento neutro de $G$ por 0 y el simétrico de $x \in G$ por $-x$.

**Ejemplo**. Sea $X$ un conjunto no vacío y sea $G$ el conjunto de todas las biyecciones de $X$ en si mismo. Entonces $(G, \circ)$ es un grupo, donde $\circ$ es la ley de composición de funciones definida en el Ejemplo 1 anterior.

**Ejercicios**.

1. Pruebe que si $e, e' \in A$ son elementos neutros para $*$ entonces $e = e'$.

2. Suponga que $*$ es asociativa y que posee elemento neutro $e$. Pruebe que si $x \in A$ es simetrizable entonces existe un único elemento $y \in A$ tal que $x * y = y * x = e$. (*Ayuda.* Imite la prueba de la Proposición 1.2.4). Este elemento $y$ será llamado **el simétrico ó inverso de** $x$ y será denotado por $x^{-1}$.

3. Sea $X$ un conjunto de tres elementos. Pruebe que el grupo $G$ del ejemplo anterior no es abeliano.

4. Sea $(G, *)$ un grupo y sean $x, y, z$ elementos de $G$. Pruebe que $(x^{-1})^{-1} = x$ y que $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$. Muestre que si $x * y = x * z$ entonces $y = z$. Concluya que si $x * y = y$ entonces $x = e$ (elemento neutro). Enuncie estos resultados con la notación usada para grupos abelianos.

5. Dados conjuntos $Y, Z$ se define **la diferencia simétrica** $Y \Delta Z$ como el conjunto $(Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)$. Pruebe que $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ es un grupo abeliano, cualquiera sea el conjunto $X$.

## 2.2. Cuerpos ordenados

Un **cuerpo** es una terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ donde $+, \cdot$ son leyes de composición en $\mathbb{K}$ llamadas **adición** y **multiplicación** respectivamente, tales que:

i) $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano (cuyo elemento neutro denotamos por 0).

ii) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano cuyo elemento neutro denotamos por 1. Note que $1 \neq 0$ ya que $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, cualesquiera sean $x, y, z \in \mathbb{K}$.

*Observaciones:* a) El simétrico de un elemento $x \in \mathbb{K}$ respecto a $+$ será denotado por $-x$ mientras que el simétrico de $x \neq 0$ respecto a la multiplicación, será denotado por $x^{-1}$. Así, $x + (-x) = 0$ y $x \cdot x^{-1} = 1$ si $x \neq 0$.

b) El producto $x \cdot y$, de dos elementos en $\mathbb{K}$, será denotado a menudo por $xy$. Si además $y \neq 0$, el producto $xy^{-1}$ también será denotado por $x/y$ ó $\frac{x}{y}$.

Un **cuerpo ordenado** es una cuaterna $(\mathbb{K}, +, \cdot, P)$ donde $(\mathbb{K}, +, .)$ es un cuerpo y $P$ es un subconjunto de $\mathbb{K}$ con las siguientes dos propiedades:

$O_1$) Si $x \in \mathbb{K}$ entonces ocurre una y sólo una de las siguientes posibilidades:

$$x \in P,\ x = 0,\ -x \in P.$$

$O_2$) Si $x, y \in P$ entonces $x + y, x \cdot y \in P$.

*Observación:* Dado un subconjunto $A$ de $\mathbb{K}$ pondremos en todo lo que sigue,

$$-A = \{-x :\ x \in A\}.$$

Con esta notación, $O_1$) es equivalente a decir que $\mathbb{K}$ es la unión de $P, \{0\}$ y $-P$ y que estos tres conjuntos son dos a dos disjuntos.

El conjunto $P$ debe pensarse como los elementos "positivos" de $\mathbb{K}$ y por ello pondremos $x > 0$ (léase $x$ **mayor que cero**) para significar que $x \in P$. Las propiedades $O_1$)-$O_2$) se expresan ahora de la siguiente forma:

$P_1$) Si $x \in \mathbb{K}$ entonces ocurre una y sólo una de las siguientes posibilidades: $x > 0$, $x = 0$, $-x > 0$.

$P_2$) Si $x, y \in \mathbb{K}$ y $x, y > 0$, entonces $x + y, x \cdot y > 0$.

Dados $x, y \in \mathbb{K}$ definimos

$$x \geq y, \text{ si } x > y \text{ o } x = y$$

La relación binaria $\geq$ (léase $x$ **mayor o igual a** $y$) es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, es una relación de orden sobre $\mathbb{K}$ (ver ejercicio 10). Es por esta razón que llamamos a $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ un cuerpo ordenado. Las propiedades mas importantes del orden $\geq$ que lo conecta con las propiedades algebraicas de $\mathbb{K}$ son las siguiente (ver ejercicio 10)

$$\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K}, \forall z \in \mathbb{K}\ (x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z)$$

$$\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K}, \forall z \in P\ (x \geq y \Rightarrow z \cdot x \geq z \cdot y)$$

En lo que resta de este capítulo $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ denotará un cuerpo ordenado. Es decir, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo y $>$ es una relación en $\mathbb{K}$ que satisface $P_1$) y $P_2$). Dados $x, y \in \mathbb{K}$ pondremos $x - y = x + (-y)$

y escribiremos $x > y$ si $x - y > 0$. El símbolo $y > x$ (léase: $y$ **mayor que** $x$) también será usado para significar que $x < y$. De la propiedad $\mathrm{P}_1$) se tiene que ocurre una y sólo una de las siguientes posibilidades:

$$x > y; \quad x = y; \quad x < y.$$

Esta propiedad se conoce con el nombre de **ley de tricotomía**.

En lo que sigue pondremos $2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1$, etc. Note que $1 > 0$ (ver ejercicio 8), luego $2 = 1 + 1 > 1$, $3 = 2 + 1 > 2$ etc, es decir, $1 < 2 < 3 < 4$ etc.

Terminaremos esta sección mostrando un resultado que es clave en muchas pruebas del análisis matemático y que será usado repetidas veces en este texto. Es un buen ejercicio para el lector observar durante el desarrollo de este curso la frecuencia con que se usa este sencillo resultado.

**Proposición 2.2.1.** *Sea $a \in \mathbb{K}$ y supongamos que $a < \epsilon$, para cada $\epsilon > 0$. Entonces, $a \leq 0$.*

**Demostración.** Supongamos que el resultado no es cierto, entonces de la propiedad $\mathrm{P}_1$), se tiene que $a > 0$. Como $1 < 2$, entonces $1/2 < 1$ (ver ejercicio 9). Luego multiplicando por $a$ ambos lados de la desigualdad obtenemos que $a/2 < a$ (ver ejercicio 5). Pero es fácil ver que $a/2 > 0$ (hacerlo!) y esto contradice nuestra hipótesis. ∎

**Ejercicios:** Sean $a, b, c \in \mathbb{K}$. Pruebe que

1. Pruebe que $a \cdot 0 = 0$. *Ayuda.* $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$.

2. $(-a) \cdot b = -a \cdot b = a \cdot (-b)$ , $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ y $(-1) \cdot a = -a$.

3. Pruebe que si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

4. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

5. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$. Si además $c > 0$, muestre que $a \cdot c < b \cdot c$.

6. $a > 0$ si y sólo si $-a < 0$. De manera similar, $a > 0$ si y sólo si $a^{-1} > 0$.

7. $a \cdot b < 0$ si $a > 0 > b$.

8. Denotaremos $a \cdot a$ por $a^2$. Muestre que $a^2 > 0$, si $a \neq 0$. Concluya que $1 > 0$.

9. Si $a > b > 0$, entonces $a^{-1} < b^{-1}$. Si, además, $c > d > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot d$.

10. Dados $x, y \in \mathbb{K}$ defina $x \leq y$, si $x < y$ o si $x = y$. Pruebe que $\leq$ es un orden en $\mathbb{K}$ que posee las siguientes propiedades, donde $x, y, z$ denotarán elementos e $\mathbb{K}$:

    *a*) Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.

    *b*) Si $x \leq y$ y $0 \leq z$, entonces $z \cdot x \leq z \cdot y$.

    El símbolo $x \geq y$ también se usa para significar que $y \leq x$.

## 2.3. Los números naturales

Diremos que un subconjunto $I$ de $\mathbb{K}$ es **inductivo** si

$I_1$) $1 \in I$.

$I_2$) Si $x \in I$, entonces $x + 1 \in I$.

Es claro que $\mathbb{K}$ es inductivo. Además, la intersección de cualquier familia no vacía de subconjuntos inductivos de $\mathbb{K}$, es un conjunto inductivo (dejamos al lector como ejercicio probar estas afirmaciones). Por consiguiente, la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{K}$ está bien definida y es un subconjunto inductivo de $\mathbb{K}$, que denotaremos por $\mathbb{N}$ y que llamaremos **conjunto de los números naturales o enteros positivos**. Es claro que $\mathbb{N}$ es el más "pequeño" subconjunto inductivo de $\mathbb{K}$. Es decir,

**Teorema 2.3.1.** *(Principio de Inducción). Si $I \subset \mathbb{K}$ es inductivo, entonces $\mathbb{N} \subset I$ (en otras palabras, si $I \subset \mathbb{N}$ es inductivo, entonces $I = \mathbb{N}$).*

**Proposición 2.3.2.** *a) Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 1$, entonces $n - 1 \in \mathbb{N}$.*
*b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.*

**Demostración.** a) Supongamos que el resultado es falso. Es decir, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq 1$ y $n - 1 \notin \mathbb{N}$. Dejamos al lector verificar que el conjunto $\mathbb{N} \setminus \{n\}$ es inductivo (ver ejercicio 3). Pero esto contradice el Teorema 2.3.1 y termina la prueba de a). La prueba de b) es consecuencia directa del hecho que el conjunto $\{m \in \mathbb{K} : \ m \geq 1\}$ es inductivo (ver ejercicio 1) y de la definición de $\mathbb{N}$. ■

**Proposición 2.3.3.** *Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces: i) $m + n \in \mathbb{N}$, ii) $m \cdot n \in \mathbb{N}$ y iii) $m - n \in \mathbb{N}$ si $m > n$.*

**Demostración.** i) Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y definamos $A = \{n \in \mathbb{N} : \ m + n \in \mathbb{N}\}$. Ya que $\mathbb{N}$ es inductivo se tiene que $m+1 \in \mathbb{N}$, así, $1 \in A$. Por otra parte, si $x \in A$, entonces $m+x \in \mathbb{N}$ y como $\mathbb{N}$ es inductivo, $(m+x)+1 \in \mathbb{N}$. Pero, $(m+x)+1 = m+(x+1)$, de donde, $x+1 \in A$. Esto prueba que $A$ es inductivo y por el 2.3.1, $\mathbb{N} \subset A$. Pero, por definición, $A \subset \mathbb{N}$, y así, $A = \mathbb{N}$. Es decir, $m + n \in \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Las pruebas de ii) y iii) serán dejadas al lector, quien mostrará que cada uno de los siguientes conjuntos es inductivo: $\{n \in \mathbb{N} : \ m \cdot n \in \mathbb{N}\}$, $\{n \in \mathbb{N} : \text{ si } m \in \mathbb{N} \text{ y } m > n, \text{ entonces } m - n \in \mathbb{N}\}$. ■

**Proposición 2.3.4.** *Si $n, x \in \mathbb{N}$ y $n < x$, entonces $n + 1 \leq x$ (en otras palabras, si $n \in \mathbb{N}$, entonces entre $n$ y $n + 1$ no hay otro natural).*

**Demostración.** Por la Proposición 2.3.3, $x - n \in \mathbb{N}$ y por la parte b) de la proposición 2.3.2, $x - n \geq 1$. De aquí, $x \geq n + 1$. ■

**Teorema 2.3.5.** *Todo subconjunto no vacío $A$ de $\mathbb{N}$ posee un* **primer elemento**. *Esto significa, por definición, que existe $a \in A$ tal que, $a \leq x$, para todo $x \in A$.*

**Demostración.** Por la proposición 2.3.2 sabemos que,

$$n \geq 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

de modo que 1 es el primer elemento de $\mathbb{N}$.

Supongamos que $A$ no tiene primer elemento y definamos $B = \{n \in \mathbb{N} : \, n < x \text{ para todo } x \in A\}$. Ya que $A$ no tiene primer elemento, entonces $1 \notin A$ y por (3.1), $x > 1$, para todo $x \in A$. De aquí, $1 \in B$.

Supongamos que $n \in B$. Por la definición de $B$ tenemos que $n < x$ para todo $x \in A$ y por proposición 2.3.4,

$$n + 1 \leq x, \quad \text{para todo } n \in A. \tag{3.2}$$

Si para algún $a \in A$ se tuviera $a = n + 1$, entonces $a$ sería el primer elemento de $A$, lo que contradiría nuestra suposición de que $A$ no tiene primer elemento. De aquí y de (3.2) obtenemos $n + 1 < x$; para todo $x \in A$; lo cual prueba que $n + 1 \in B$. De esta manera tenemos que $B$ es inductivo y por el teorema 2.3.1, $B = \mathbb{N}$.

Fijemos ahora $a \in A$ (recuerde que $A$ no es vacío). Entonces $a \in \mathbb{N} = B$ y, de la definición de $B$, $a < a$. Esta contradicción termina la demostración. ■

**Ejercicios.**

1. Pruebe que el conjunto $\{x \in \mathbb{K} : x \geq 1\}$ es inductivo.

2. Pruebe que la intersección de cualquier familia no vacía de subconjuntos inductivos de $\mathbb{K}$, es un conjunto inductivo.

3. Sea $I$ un subconjunto inductivo de $\mathbb{K}$ y sea $a \in I$. Pruebe que si $a \neq 1$ y $a - 1 \notin I$, entonces $I \setminus \{a\}$ es inductivo.

4. Sean $x, y \in -\mathbb{N}$. Pruebe que $x + y \in -\mathbb{N}$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$.

5. Fije $p \in \mathbb{N}$ y construya una aplicación inyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{p\}$.

6. Sea $B \subset \mathbb{N}$ no vacío y suponga que existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq a$; para todo $x \in B$. Pruebe que existe $b \in B$ tal que , $x \leq b$ para cada $x \in B$. Este número $b$ se llama **el máximo** de $B$. *Ayuda.* Sea $b$ el primer elemento del conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x \leq n \text{ para todo } x \in B\}$.

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pondremos; en lo que sigue; $I_n = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$. Diremos que $A \subset I_n$ es **$n$-inductivo** si $1 \in A$ e $i + 1 \in A$ cuando $i \in A$ e $i \neq n$. Pruebe que si $A \subset I_n$ es $n$-inductivo, entonces $A = I_n$. *Ayuda.* Suponga que $B := I_n \setminus A \neq \emptyset$ y sea $b$ el primer elemento de $B$. (*Otra forma.* Pruebe que el conjunto $A \cup \{i \in \mathbb{N} : i > n\}$ es inductivo).

8. Pruebe que no existen funciones inyectivas de $\mathbb{N}$ en $I_n$. *Ayuda*. Defina $\mathcal{F}_n$ como el conjunto de todas las funciones inyectivas de $\mathbb{N}$ en $I_n$ y pruebe que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_n = \emptyset\}$ es inductivo.

9. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Diremos que $a$ **divide a** $b$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = ac$. En este caso se dice que $a$ es un **divisor o factor** de $b$. Denote por $D_b$ al conjunto de divisores de $b$ y pruebe que $D_b \neq \emptyset$ y que $b$ es cota superior de $D_b$. El **máximo común divisor de** $a$ **y** $b$ se define como el máximo del conjunto $D_a \cap D_b$ y se denota por $MCD(a, b)$.

   Defina $M = MCD(a, b)$ y note que $a = Mx, b = My$ para ciertos $x, y \in \mathbb{N}$. Pruebe que $MCD(x, y) = 1$. En este caso se dice que $x, y$ **no tienen factores comunes** o que **son coprimos**.

10. Pruebe que para cualquier $a \in \mathbb{N}$, existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2b$ ó $a = 2b - 1$. En en primer caso se dice que $a$ es **par**, mientras que en el segundo, decimos que $a$ es **impar**.

11. Sea $a \in \mathbb{N}$. Pruebe que si $a^2$ es par, entonces $a$ es par.

12. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que $f(n+1) > f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $f$ es inyectiva.

## 2.4. Números enteros y números racionales

Definimos el conjunto $\mathbb{Z}$ de los **números enteros** como la unión de los conjuntos $\mathbb{N}, \{0\}$ y $-\mathbb{N}$ (recordemos que para un conjunto $A \subset \mathbb{K}$ hemos definido $-A$ como el conjunto $\{-x : \ x \in A\}$). Obviamente, $0, 1 \in \mathbb{Z}$.

**Proposición 2.4.1.** *Si $x, y \in \mathbb{Z}$, entonces $x + y, -x, xy \in \mathbb{Z}$.*

**Demostración.** Probaremos únicamente que $x + y \in \mathbb{Z}$. (El resto de la demostración es parecida y será dejada a cargo del lector). Si $x = 0$ ó $y = 0$ no hay nada que mostrar. Si $x, y \in \mathbb{N}$ ó si $x, y \in -\mathbb{N}$, el resultado se sigue de lo expuesto en la sección anterior.

Supongamos ahora que $x \in \mathbb{N}$ y que $y \in -\mathbb{N}$. Podemos escribir $y = -z$ para algún $z \in \mathbb{N}$ y se presentan los tres casos siguientes:

i) $z < x$. Por la Proposición 2.3.3 tenemos que $x - z \in \mathbb{N}$, de manera que $x + y = x - z \in \mathbb{Z}$.

ii) $z = x$. En este caso, $x + y = x - z = 0 \in \mathbb{Z}$.

iii) $z > x$. En este caso, $z - x \in \mathbb{N}$, de modo que $x + y = x - z = -(z - x) \in -\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. ■

El conjunto de los **números racionales**, que denotaremos por $\mathbb{Q}$, lo definimos como la colección de todas las **fracciones** de la forma $m/n$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$. Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

Diremos que $F \subset \mathbb{K}$ es un **subcuerpo** de $\mathbb{K}$ si $F$ es un anillo tal que $x^{-1} \in F$ cuando $x \in F$ y $x \neq 0$.

**Proposición 2.4.2.** *$\mathbb{Q}$ es un subcuerpo de $\mathbb{K}$.*

**Demostración.** Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ y escribamos $x = a/b, y = c/d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$. Entonces $x + y = ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + bc)b^{-1}d^{-1} = (ad + bc)/bd$, de modo que $x + y \in \mathbb{Q}$. El resto de la prueba será dejada a cargo del lector. ■

**Proposición 2.4.3.** *Para cada $x \in \mathbb{Q}$ se tiene $x^2 \neq 2$.*

**Demostración.** Supongamos por el absurdo que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$ y escribamos $x = a/b$, donde $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ y $a, b$ no tienen factores comunes. Como $a^2/b^2 = x^2 = 2$, entonces $a^2 = 2b^2$, de modo que $a^2$ es par. Por el ejercicio 11 de la sección precedente, $a$ es par y por consiguiente $a = 2c$ para algún $c \in \mathbb{Z}$. De aquí, $2b^2 = 4c^2$ y se concluye fácilmente que $b$ es par. Esto muestra que 2 es un factor común de $a$ y $b$ y esta contradicción termina la prueba. ■

Se dice que $\mathbb{K}$ es **arquimediano**, si dado $x \in \mathbb{K}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$. Dejamos al lector como ejercicio mostrar que $\mathbb{Q}$ es arquimediano. Este hecho se usará con frecuencia.

**Ejercicios.**

1. Diremos que un subconjunto $R$ de $\mathbb{K}$ es un **anillo** si $0, 1 \in R$ y si $x + y, -x, xy \in$ si $x, y \in R$ cuando $x, y \in R$. (Con este lenguaje, la Proposición 2.4.1 dice que $\mathbb{Z}$ es un anillo). Pruebe que todo anillo de $\mathbb{K}$ contiene a $\mathbb{Z}$, de modo que $\mathbb{Z}$ puede caracterizarse como el anillo "más pequeño" de $\mathbb{K}$.

2. Sea $A$ un subconjunto de $\mathbb{Z}$ acotado inferiormente en $\mathbb{Z}$. Pruebe que existe $a \in A$ tal que $a \leq x$ para cada $x \in A$. (Es decir, $A$ **tiene primer elemento**). *Ayuda.* Sea $b \in \mathbb{Z}$ una cota inferior de $A$ y note que $\{z \in \mathbb{Z} : z = x - b + 1$ para algún $x \in A\}$ está contenido en $\mathbb{N}$.

3. Sea $R$ un anillo de $\mathbb{K}$ tal que todo subconjunto no vacío de $R$, acotado inferiormente en $R$, posee primer elemento. Pruebe que $R = \mathbb{Z}$. *Ayuda.* Sea $a$ el primer elemento de $R_* := \{x \in R : x > 0\}$. Muestre que $\mathbb{N} \subset R$, de modo que $a \leq 1$. Concluya que $a = 1$, porque $a^2 \in R$ y $a^2 \leq a$. Suponga por el absurdo que $\mathbb{R}_+ \neq \mathbb{N}$ y sea $b$ el primer elemento de $R_+ \setminus \mathbb{N}$. Pruebe que $b - 1 \in R_+ \setminus \mathbb{N}$.

   **Nota**. Los ejercicios 2 y 3 precedentes, dicen que $\mathbb{Z}$ puede caracterizarse como el anillo de $\mathbb{K}$ donde todo subconjunto no vacío y acotado inferiormente en $\mathbb{Z}$, tiene primer elemento.

4. Pruebe que, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$. Este número $n$, se conoce como **la parte entera de** $x$ y se le denota por $[x]$. *Ayuda.* Use el ejercicio 2.

5. Pruebe que $[x + m] = [x] + m$, si $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$. Concluya que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = x - [x]$; satisface $f(x + 1) = f(x)$. Una tal función se dice 1**-periódica**,

6. Sea $b > 0$. Pruebe que, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que, $nb \leq x < (n + 1)b$.

7. Sean $a, b, m, n, M \in \mathbb{Z}$ con $n, b$ no nulos, tales que $m = Ma$ y $n = Mb$. Pruebe que $m/n = a/b$ y deduzca que $\mathbb{Q}$ es el conjunto de todas las fracciones $a/b$ donde $a, b$ no tienen factores comunes.

8. Pruebe que si $F$ es un subcuerpo de $\mathbb{K}$, entonces $(F, +, ., >)$ es un cuerpo ordenado. Pruebe además que $\mathbb{Q} \subset F$, de modo que $\mathbb{Q}$ puede ser caracterizado como el subcuerpo ordenado más pequeño de $\mathbb{K}$.

9. Pruebe que $\mathbb{K}$ es arquimediano si y sólo si, dados $x, y \in \mathbb{K}$ con $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. Pruebe también que $\mathbb{Q}$ es arquimediano.

## 2.5. Los números reales y el axioma de completitud

En esta sección presentaremos la definición de los números reales. Este es sin duda uno de los conceptos mas importantes de toda la matemática.

Para facilitar la lectura de esta sección, recordaremos algunas definiciones dadas en la sección 1.3. Diremos que un subconjunto $A$ de $\mathbb{K}$ está **acotado superiormente** (resp. **inferiormente**) si existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $x \leq b$ (resp. $b \leq x$) para cada $x \in A$. En este caso se dice que $b$ **es una cota superior** (resp. **inferior**) de $A$. Se dice que $A$ es **acotado** si ese conjunto admite cotas inferiores y superiores.

Sea $A \subset \mathbb{K}$ no vacío. Se dice que $A$ tiene **supremo** en $\mathbb{K}$ si existe una cota superior $b \in \mathbb{K}$ de $A$ tal que $b \leq c$ para cualquier otra cota superior $c$ de $A$. En otras palabras, "el supremo (cuando exista!) es la menor de las cotas superiores" y se denota por $\sup(A)$.

De manera semejante, se dice que $A$ tiene **ínfimo** en $\mathbb{K}$ si existe una cota inferior $b$ de $A$ tal que $b \geq c$ para cualquier otra cota inferior $c$ de $A$. El ínfimo (cuando exista) será denotado por $\inf(A)$. Es de observar que "el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores".

Asumiremos la existencia de un cuerpo ordenado, denotado por $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$; llamado **cuerpo de los números reales**; tal que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo en $\mathbb{R}$. Esta propiedad fundamental de $\mathbb{R}$ se conoce como **propiedad del supremo** o **axioma de completitud**.

**Observación:** La definición que hemos dado de $\mathbb{R}$ puede (y quizá debe) parecer extraña, pues nada indica que exista un cuerpo ordenado con la propiedad del supremo. En este texto no daremos una prueba formal de la existencia $\mathbb{R}$, sino que estudiaremos sus propiedades basados solamente en el hecho que es un cuerpo ordenado completo. En casos como este, usualmente se dice que se *trabaja axiomaticamente*. Este enfoque axiomático es particularmente efectivo en el caso de $\mathbb{R}$ pues existe un sólo cuerpo ordenado completo. El significado preciso de esta afirmación se escapa de los objetivos de este libro, pero en términos informales, podemos decir que no hay manera de diferenciar o distinguir dos cuerpos ordenados completos a través de propiedades algebraicas o de propiedades expresadas en términos del orden.

Ya hemos dicho que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado (ver proposición 2.4.2 y ejercicio 8 de la sección 2.4), mostraremos a continuación que $\mathbb{Q}$ no es completo, y por consiguiente $\mathbb{Q}$ no es igual a $\mathbb{R}$.

**Proposición 2.5.1.** *El conjunto* $A := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ y } x^2 < 2\}$ *no es vacío, está acotado superiormente en* $\mathbb{Q}$ *pero no tiene supremo en* $\mathbb{Q}$.

**Demostración.** Note que $A$ no es vacío porque $1 \in A$. Además, 2 es cota superior de $A$ porque si hubiera un $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x > 2$ se tendría $x^2 > 4 > 2$, contradiciendo la definición de $A$. Faltaría ver que $A$ no tiene supremo en $\mathbb{Q}$, para lo cual supondremos por el absurdo que $t \in \mathbb{Q}$ es supremo de $A$. Mostraremos que las relaciones $t^2 < 2$ y $t^2 > 2$ llevan a contradicción y por la ley de tricotomía se tendrá $t^2 = 2$. Esto contradirá la Proposición 2.4.3 y terminará la prueba.

Supongamos que $t^2 < 2$. Ya que $2t + 1, 2 - t^2 \in \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ es arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(2 - t^2) > 2t + 1$. De aquí, $t^2 + (2t + 1)/n < 2$ y en consecuencia

$$\left(t + \frac{1}{n}\right)^2 = t^2 + \frac{2t}{n} + \frac{1}{n^2} \leq t^2 + \frac{2t}{n} + \frac{1}{n} = t^2 + \frac{2t+1}{n} < 2.$$

Esto dice que $t + 1/n \in A$ y contradice el hecho que $t$ es cota superior de $A$. Luego, no puede ser $t^2 < 2$.

Supongamos que $t^2 > 2$. Ya que $\mathbb{Q}$ es arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nt > 1$ y $n(t^2 - 2) > 2t$ (justificar). En particular, $t^2 - 2t/n > 2$, de donde $(t - 1/n)^2 > 2$. De aquí, para cada $x \in A$ se tiene $(t-1/n)^2 > x^2$ y como $t-1/n > 0$, concluímos que $t-1/n > x$. Es decir, $t-1/n$ es una cota superior de $A$ contradiciendo el hecho que $t$ era la menor de tales cotas. Esta contradicción dice que la relación $t^2 > 2$ no puede suceder y termina la demostración. ∎

Todo elemento de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ será llamado **irracional**. Veremos enseguida que hay al menos un número irracional. Para ello notemos que el conjunto $A := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$ no es vacío y está acotado superiormente en $\mathbb{R}$. De aquí y la Proposición 2.5.1, $\sup(A)$ es irracional.

**Proposición 2.5.2.** $\mathbb{R}$ *es arquimediano.*

**Demostración.** Supongamos que el resultado es falso. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que, $n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia, $\mathbb{N}$ está acotado superiormente en $\mathbb{R}$.

Pongamos $b = \sup(\mathbb{N})$. Entonces, $n + 1 \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$; y de aquí, $n \leq b - 1$; para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $b - 1$ es una cota superior de $\mathbb{N}$ menor que el supremo. Esta contradicción termina la prueba. ∎

**Teorema 2.5.3.** *(Densidad de* $\mathbb{Q}$ *en* $\mathbb{R}$*). Dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$*, existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $a < r < b$.

**Demostración.** Consideraremos primero el caso en que $a \geq 0$. Ya que $b - a > 0$ y $\mathbb{R}$ es arquimediano, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p(b - a) > 1$. Por el mismo argumento, el conjunto $A := \{n \in \mathbb{N} : n > pa\}$ no es vacío y en consecuencia posee un primer elemento que denotaremos por $m$. Afirmamos que $m - 1 \leq pa$. En efecto, si $m = 1$, entonces $m - 1 = 0 \leq pa$ (porque $a \geq 0$) y si $m > 1$, entonces $m - 1 \in \mathbb{N}$ y como $m$ es el primer elemento de $A$ se tiene que $m - 1 \notin A$; así $m - 1 \leq pa$. En cualquier caso ($m = 1$ ó $m > 1$), se que $m - 1 \leq pa$. Luego $pa < m \leq 1 + pa < pb$ (recuerde que $p(b - a) > 1$ y que $m \in A$). Finalmente, tenemos que $r = m/p$ satisface la conclusión del teorema.

Consideremos ahora el caso $a < 0$. Si $b > 0$ tomamos $r = 0$. Si $b \leq 0$, entonces $0 \leq -b < -a$ y por el primer caso, existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $-b < s < -a$. La prueba se termina tomando $r = -s$. ■

La proposición que sigue muestre que existen irracionales entre dos reales cualesquiera.

**Proposición 2.5.4.** *Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $a < x < b$, para algún $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

**Demostración.** Consideraremos tres casos:

**Caso $a = 0$, $b \in \mathbb{Q}$.** Fijemos $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (recuerde que este conjunto no es vacío). Podemos asumir que $r > 0$ (porque si $r < 0$, entonces $-r > 0$ y $-r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Como $\mathbb{R}$ es arquimediano (proposición 2.5.2), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > rb^{-1}$, de modo que, $b > rn^{-1} > 0$, y basta tomar $x = r/n$.

**Caso $a, b \in \mathbb{Q}$.** Tenemos que $b - a \in \mathbb{Q}$ es positivo y por el caso anterior, existe un irracional $z$ tal que $0 < z < b - a$. Ahora basta tomar $x = a + z$.

**Caso General.** Por el Teorema 2.5.3, existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $a < s < b$, y por el mismo argumento, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $s < r < b$. Por el caso anterior existe un irracional $x$ tal que $s < x < r$ y la prueba es completa.

■

**Ejercicios.**

1. Sea $A = \{n/(n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que $\sup(A) = 1$ si y sólo si $\mathbb{K}$ es arquimediano.

2. Sean $s, t \in \mathbb{R}$ con $s$ racional y $t$ irracional. Pruebe que $s + t$ es irracional y que lo mismo vale para $st$ si $s \neq 0$.

3. Un subconjunto propio y no vacío $\alpha$ de $\mathbb{Q}$ es llamado **cortadura (de Dedekind)** si:

   i) Si $x < y$ e $y \in \alpha$, entonces $x \in \alpha$.

   ii) Para cada $x \in \alpha$ existe $y \in \alpha$ tal que $x < y$.

   Pruebe que si $\alpha \subset \mathbb{Q}$ es una cortadura y $a \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, entonces $a$ es una cota superior de $\alpha$. Pruebe también que, para cada $z \in \mathbb{R}$, el conjunto $\alpha_z := \{x \in \mathbb{Q} : x < z\}$ es una cortadura cuyo supremo es $z$. En fin, sea $R_*$ el conjunto de todas las cortaduras. Muestre que la aplicación $S : R_* \to \mathbb{R}$ dada por $S(\alpha) = \sup(\alpha)$ es biyectiva.

**Nota**. El ejercicio 3 dice que el cuerpo de los números reales puede ser construído a partir del cuerpo de los números racionales a través de las cortaduras de Dedekind.

## 2.6. Propiedades del supremo y el ínfimo

En esta sección presentaremos algunos resultados generales relativos al supremo y al ínfimo. El primero de ellos será usado con frecuencia y le recomendamos al lector que le preste particular atención.

**Proposición 2.6.1.** *Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente y sea $b \in \mathbb{R}$ una cota superior de $A$. Son equivalentes:*

*a) $b$ es supremo de $A$ (en símbolos, $b = \sup(A)$).*

*b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $b - \epsilon < x$.*

*c) Para cada $a < b$; $a \in \mathbb{R}$; existe $x \in A$ tal que $a < x$.*

**Demostración.** a)$\Rightarrow$ b). Si $\epsilon > 0$, entonces $b - \epsilon < b$ y en consecuencia, $b - \epsilon$ no es cota superior de $A$. Por lo tanto, $b - \epsilon < x$, para algún $x \in A$.
b)$\Rightarrow$ c). Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y pongamos $\epsilon = b - a$. Entonces $\epsilon > 0$ y por lo tanto existe $x \in A$ tal que, $a = b - \epsilon < x$.
c) $\Rightarrow$ a). Sea $d$ una cota superior de $A$. Por c), no puede ser que $d < b$, y en consecuencia, $d \geq b$. Luego, $b = \sup(A)$. ■

La siguiente proposición es la versión análoga a la anterior para el ínfimo. Su demostración se deja como ejercicio.

**Proposición 2.6.2.** *Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente y sea $b \in \mathbb{R}$ una cota inferior de $A$. Son equivalentes:*

*a) $b$ es el ínfimo de $A$ (en símbolos, $b = \inf(A)$).*

*b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $x < b + \epsilon$.*

*c) Para cada $a > b$; $a \in \mathbb{R}$; existe $x \in A$ tal que $a > x$.* ■

Dados subconjuntos no vacíos $A, B$ de $\mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ definimos

$$\begin{aligned} A + B &= \{x + y : x \in A, y \in B\} \\ \gamma A &= \{\gamma x : x \in A\} \\ A \cdot B &= \{xy : x \in A, y \in B\}. \end{aligned}$$

**Proposición 2.6.3.** *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados superiormente. Entonces*

*a)* $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

*b)* $\gamma \sup(A) = \sup(\gamma A)$ *si* $\gamma \geq 0$.

*c)* $\gamma \sup(A) = \inf(\gamma A)$ *si* $\gamma \leq 0$.

*d)* $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ *si $x, y \geq 0$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.*

**Demostración.** Pongamos $a = \sup(A), b = \sup(B)$ y recordemos que

$$x \leq a \quad \text{e} \quad y \leq b \quad \text{para todo } x \in A,\ y \in B. \tag{6.1}$$

a) De la relación anterior, $x + y \leq a + b$ para cada $x \in A$ y cada $y \in B$, lo cual dice que $a + b$ es cota superior de $A + B$. Por otra parte, dado $\epsilon > 0$ existen, por la Proposición 2.6.1, $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tales que $a - \epsilon/2 < x_0$ y $b - \epsilon/2 < y_0$. De aquí, $a + b - \epsilon < x_0 + y_0$. Por la Proposición 2.6.1 se concluye que $\sup(A + B) = a + b$.

b) Esta parte, se seguirá de la parte d) con $B = \{\gamma\}$.

c) De (6.1) se tiene que $\gamma x \geq \gamma a$, de modo que $\gamma a$ es cota inferior de $\gamma A$. Poniendo $\mu = -\gamma$, se tiene, del ejercicio 1 de esta sección, que $\inf(\gamma A) = \inf(-\mu A) = -\sup(\mu A) = -\mu \sup(A)$, lo cual completa la prueba de c).

d) Si $a = 0$, entonces $A = \{0\}$ (pues por hipótesis $A$ no contiene elementos negativos). De suerte que $A \cdot B = \{0\}$ y en consecuencia $\sup(A \cdot B) = 0 = a \cdot b$. Análogamente, el resultado también vale si $b = 0$. Supongamos ahora que $a, b > 0$. Por (6.1) se tiene $xy \leq ab$, lo cual dice que $ab$ es cota superior de $A \cdot B$. Fijemos ahora $\epsilon > 0$ y escojamos $\delta > 0$ tal que $\delta < \text{mín}\{a, b, \epsilon/(a + b)\}$. Por la Proposición 2.6.1, existen $x_0 \in A, y_0 \in B$ tales que $a - \delta < x_0$ y $b - \delta < y_0$, de donde

$$x_0 \cdot y_0 > (a - \delta)(b - \delta) = ab - (a + b)\delta + \delta^2 > ab - (a + b)\delta > ab - \epsilon$$

y el resultado se sigue de la Proposición 2.6.1. ■

**Ejercicios.**

1. Bajo las mismas hipótesis de la proposición 2.6.1 pruebe que $b = \sup(A))$ si y solo si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in A$ tal que $b - 1/n < x$. Enuncie y demuestre un resultado análogo para el ínfimo.

2. *a*) Muestre que $\sup\left\{\frac{7x^2+8}{3x^2+5} : x \in \mathbb{R}\right\} = 7/3$ y que $\inf\left\{\frac{7x^2+8}{3x^2+5} : x \in \mathbb{R}\right\} = 8/5$.

   *b*) ¿Qué puede decir acerca del supremo y del ínfimo de $\{\frac{7x^2+4x+8}{3x^2+4x+5} : x \in \mathbb{R}\}$?

   *c*) Muestre que $\inf\{\frac{2q^2+5q+3}{3q^2-q+8} : q \in \mathbb{Q},\ q \geq 1\} = 2/3$.

   *d*) ¿Qué puede decir acerca de $\sup\{\frac{2q^2+5q+3}{3q^2-q+8} : q \in \mathbb{Q},\ q \geq 1\}$?

   *e*) Sean $a, b$ reales con $b$ positivo. ¿Qué puede decir, en términos de $a$ y $b$, acerca del supremo y del ínfimo de $\{\frac{7x^2+a}{3x^2+b} : x \in \mathbb{R}\}$?

3. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son acotados superiormente y/o acotados inferiormente, en caso que lo sean, hallar su supremo y/o su ínfimo. Determinar si tienen máximo y/o mínimo.

$\{\frac{3n+5}{7n+8} : n \in \mathbb{N}\}$ $\{\frac{3n+5}{7n+12} : n \in \mathbb{N}\}$ $\{7 - \frac{(-1)^n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\}$

$\{\frac{3}{x-1} :\ x > 1,\ x \in \mathbb{R}\}$ $\{\frac{1}{2^n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ $\{8 - \frac{2}{2^{n+1}-1} :\ n \in \mathbb{N}\}$

$\{5^x :\ x \in \mathbb{Z}\}$ $\{(-5)^x :\ x \in \mathbb{Z}\}$ $\{n^n :\ n \in \mathbb{N}\}$

$\{\frac{1}{n^n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ $\{\frac{3n+(-1)^n 5}{7n+8} : n \in \mathbb{N}\}$

4. Pruebe que $A \subset \mathbb{K}$ está acotado superiormente si y sólo si $-A$ está acotado inferiormente. Si además $A$ no es vacío, muestre que $A$ tiene supremo si y sólo si $-A$ tiene ínfimo. En este caso pruebe que $\inf(-A) = -\sup(A)$.

5. Sean $A \subset B \subset \mathbb{K}$ conjuntos no vacíos. Pruebe que si $B$ está acotado superiormente (resp. inferiormente) lo mismo ocurre para $A$. Si además $A$ y $B$ tienen supremo (resp. ínfimo), entonces $\sup(A) \leq \sup(B)$ (resp. $\inf(A) \geq \inf(B)$).

6. Demuestre la proposición 2.6.2.

7. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados inferiormente. Pruebe que:

   *a*) $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$,

   *b*) $\inf(\gamma A) = \gamma \inf(A)$ si $\gamma \geq 0$,

   *c*) $\gamma \inf(A) = \sup(\gamma A)$ si $\gamma \leq 0$

   *d*) $\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$ si $x \geq 0$ e $y \geq 0$, cualesquiera sean $x \in A$ e $y \in B$.

8. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B = A \setminus [0, 1]$. Suponga que $B$ es acotado superiormente y que $\mathrm{Sup}(B) \leq 0$. Muestre que $A$ es acotado superiormente y que $\mathrm{Sup}(A) \leq 1$.

9. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$. Denotaremos por $(a, b)$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, por $(-\infty, a)$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ y por $(a, +\infty)$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$. Usando la noción de suma de conjuntos introducida en esta sección, muestre que

   (i) $(a, +\infty)\ +\ (c, +\infty) = (a + c, +\infty)$

   (ii) $(-\infty, a)\ +\ (-\infty, c) = (-\infty, a + c)$

   (iii) $(a, b)\ +\ (c, d) = (a + c, b + d)$

10. Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente. Muestre que $A \cup B$ es acotado superiormente y además que

$$\mathrm{Sup}(A \cup B) = \max\{\mathrm{Sup}(A),\ \mathrm{Sup}(B)\}$$

11. Sean $A, B$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$ y $A \neq \emptyset$.

*a*) Muestre que si $B$ es acotado superiormente, entonces $A$ también lo es y en este caso se cumple que Sup $A \leq$ Sup $B$.

*b*) De manera similar, muestre que si $B$ es acotado inferiormente, entonces $A$ también lo es y además Inf $A \leq$ Inf $B$.

*c*) Suponga que $A$ no es acotado superiormente y $B \subseteq A$ ¿Es posible que $B$ sea acotado superiormente? Si su respuesta es "si", de un ejemplo.

*d*) ¿Existirán subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$, $B$ acotado superiormente, $A \neq B$ y Sup $A =$ Sup $B$ ?

## 2.7. La recta extendida.

El objeto de esta sección es introducir algunas notaciones sumamente útiles para lo que sigue. Al conjunto $\mathbb{R}$ le añadiremos dos nuevos elementos que denotaremos por $+\infty$ y $-\infty$ y que llamaremos **más infinito** y **menos infinito** respectivamente. El conjunto así obtenido, se le conoce como la **recta extendida** y lo denotaremos provisionalmente por $\bar{\mathbb{R}}$. Extenderemos parcialmente a $\bar{\mathbb{R}}$ las operaciones de suma y producto en $\mathbb{R}$, así como el orden de $\mathbb{R}$. Más precisamente, dado $x \in \mathbb{R}$ pondremos:

$$
\begin{array}{rcccl}
x + (+\infty) & = & (+\infty) + x & = & +\infty. \\
x + (-\infty) & = & (-\infty) + x & = & -\infty. \\
(+\infty) + (+\infty) & = & (+\infty) & & \\
(-\infty) + (-\infty) & = & -\infty & & \\
(+\infty)x & = & x(+\infty) & = & +\infty \text{ (resp. } -\infty\text{), si } x > 0 \text{ (resp. } x < 0\text{).} \\
(-\infty)x & = & x(-\infty) & = & -\infty \text{ (resp. } +\infty\text{), si } x > 0 \text{ (resp. } x < 0\text{).} \\
(+\infty)(+\infty) & = & (-\infty)(-\infty) & = & +\infty \\
(+\infty)(-\infty) & = & (-\infty)(+\infty) & = & -\infty. \\
-\infty & < & +\infty & & \\
-\infty & < & x & & \\
x & < & +\infty. & &
\end{array}
$$

Se suele escribir: $x + \infty$, $x - \infty$, $\infty + \infty$, $-\infty - \infty$, en lugar de, $x + (+\infty)$, $x + (-\infty)$, $(+\infty) + (+\infty)$ y $(-\infty) + (-\infty)$ respectivamente. No se le asigna ningún significado a los símbolos $0 \cdot (\pm\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Si $A$ no está acotado superiormente (resp. inferiormente), pondremos $\sup(A) = +\infty$ (resp. $\inf(A) = -\infty$). El lector comprobará que la proposición 2.6.3 sigue siendo válida para subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$ (ver ejercicio 1).

**Ejercicios.**

1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos. Pruebe que: i) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, ii) $\sup(\gamma A) = \gamma \sup(A)$ (resp. $\gamma \inf(A)$) si $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\gamma > 0$ (resp. $\gamma < 0$), iii) $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \sup(B)$ si $A \cdot B \neq \{0\}$ y $x, y \geq 0$ cuando $x \in A$ e $y \in B$.

2. Pruebe que el ejercicio anterior permanece válido si intercambiamos "supremo" por "ínfimo".

## 2.8. Valor absoluto.

Dado $x \in \mathbb{R}$ se define el **valor absoluto de** $x$, denotado $|x|$, por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Si los números reales se representan en una recta, entonces $|x|$ representa "la distancia de $x$ al origen".

La demostración de la siguiente proposición se deja al lector.

**Proposición 2.8.1.** *1.* $|x| \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Es más,* $|x| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

*2.* $|-x| = |x|$

*3.* $|xy| = |x||y|$

*4.* $|1/y| = 1/|y|$ *(*$y \neq 0$*).*

*5.* $-|x| \leq x \leq |x|$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

**Proposición 2.8.2.** *Sea* $b \in \mathbb{R}$ *no negativo (*$b \geq 0$*). Entonces,* $|x| \leq b$ *si y sólo si* $-b \leq x \leq b$.

**Demostración.** Si $|x| \leq b$, entonces $-b \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq b$. Recíprocamente, supongamos que $-b \leq x \leq b$. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x \leq b$; mientras que si $x \leq 0$, $|x| = -x \leq b$, porque $-b \leq x$. ■

**Proposición 2.8.3.** *(Propiedad Triangular). Si* $x, y \in \mathbb{R}$, *entonces* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

**Demostración.** Sabemos que, $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$, y sumando miembro a miembro estas desigualdades queda, $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$. El resultado se sigue ahora de la proposición 2.8.2. ■

**Proposición 2.8.4.** *Sean* $x, y, r \in \mathbb{R}$. *Entonces*

*i)* $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

*ii)* $|x| \leq |y| + r$ *si* $|x - y| \leq r$.

**Demostración.** Ya que $x = (x - y) + y$, entonces por la propiedad triangular, se tiene que $|x| \leq |x - y| + |y|$; de donde,

$$|x| - |y| \leq |x - y|. \tag{8.1}$$

Por el mismo argumento, $|y| \leq |y - x| + |x|$; de donde, $|x| - |y| \geq -|y - x|$. Pero, $y - x = -(x - y)$, así que $|y - x| = |x - y|$. De aquí,

$$|x| - |y| \geq -|x - y|. \tag{8.2}$$

La prueba de i) se sigue ahora de (8.1)-(8.2) y la proposición 2.8.2. La prueba de ii) se sigue fácilmente de (8.1). ■

**Proposición 2.8.5.** *Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado y no vacío. Entonces,*

$$\sup(A) - \inf(A) = \sup\{|x-y| :\ x, y \in A\}.$$

**Demostración.** Pongamos

$$C = \{|x-y| :\ x, y \in A\}.$$

Sean $a = \inf(A)$, $b = \sup(A)$ y $c = \sup(C)$. Dados $x, y \in A$, tenemos que $a \leq x,\ y \leq b$. De esto se sigue que $-(b-a) = a-b \leq x-y \leq b-a$. Por la proposición 2.8.2, $|x-y| \leq b-a$. Así, $b-a$ es cota superior de $C$ y en consecuencia, $c \leq b-a$.

Fijemos $\epsilon > 0$. Por la proposición 2.6.1, existen $x, y \in A$ tales que $b - \epsilon/2 < x,\ y < a + \epsilon/2$. De aquí, $b-a \leq x-y+\epsilon \leq |x-y|+\epsilon \leq c+\epsilon$. Es decir, $b-a-c \leq \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$, y por la proposición 2.2.1, $b-a-c \leq 0$. Es decir, $b-a \leq c$. ■

**Ejercicios**.

1. Sea $b \in \mathbb{R}$ positivo. Pruebe que $|x| < b$ si y sólo si $-b < x < b$.

2. Sean $x, \epsilon \in \mathbb{R}$, con $\epsilon > 0$. Pruebe que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $|x-r| < \epsilon$.

3. Pruebe que $A \subset \mathbb{R}$ es acotado si y sólo si existe $M \geq 0$ tal que $|x| \leq M$, para todo $x \in A$.

## 2.9. Un ejemplo de un cuerpo ordenado no arquimediano.

En esta sección daremos algunas indicaciones para construir un cuerpo ordenado que no es arquimediano.

1. Considere el conjunto $\mathbb{Q}(t)$ formado por todas *formas racionales* $\frac{p(t)}{q(t)}$ donde $p(t)$ y $q(t)$ son polinomios en la indeterminada $t$ con coeficientes racionales y $q(t)$ no es el polinomio cero. Es decir, los elementos de $\mathbb{Q}(t)$ son la expresiones de la forma

$$\frac{a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0}{b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0}$$

donde $a_1, \cdots, a_n, , b_1, \cdots, b_m$ son racionales, $n, m$ son naturales y algún $b_i$ no es igual a cero. Defina sobre $\mathbb{Q}(t)$ las operaciones usuales de suma y multiplicación, es decir,

$$\frac{p(t)}{q(t)} + \frac{p'(t)}{q'(t)} = \frac{p(t)q'(t) + p'(t)q(t)}{q(t)q'(t)}$$

y

$$\frac{p(t)}{q(t)} \cdot \frac{p'(t)}{q'(t)} = \frac{p(t)p'(t)}{q(t)q'(t)}$$

Las operaciones inversas son entonces

$$-\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{-p(t)}{q(t)}$$

y

$$\left(\frac{p(t)}{q(t)}\right)^{-1} = \frac{q(t)}{p(t)}$$

Muestre que $\mathbb{Q}(t)$ con estas operaciones es un cuerpo.

2. El conjunto $P$ de los elemento positivos de $\mathbb{Q}(t)$ es la colección de la formas racionales $\frac{p(t)}{q(t)}$ tales que los coeficientes de $p(t)$ y $q(t)$ de la mayor potencia de $t$ son del mismo signo. Es decir, si $p(t)$ es $a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ y $q(t)$ es $b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$, entonces $a_n b_m > 0$. Muestre que $P$ satisface las condiciones $O_1$ y $O_2$ introducidas en la sección 2.2. En consecuencia $\mathbb{Q}(t)$ es un cuerpo ordenado.

3. Muestre que $\mathbb{Q}(t)$ no es arquimediano. Recuerde que el elemento unidad de $\mathbb{Q}(t)$ es el polinomio $p(t) = 1$. Muestre que $n \cdot 1 < t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (es decir que $n \cdot p(t)$ es menor, en el orden de $\mathbb{Q}(t)$, que el polinomio $q(t) = t$).

4. Muestre que $\mathbb{Q}(t)$ no es completo consiguiendo un subconjunto de $\mathbb{Q}(t)$ acotado superiormente que no tiene supremo. *Sugerencia:* Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, \cdots\}$ como subconjunto de $\mathbb{Q}(t)$. Muestre que $A$ es acotado superiormente, pero no tiene supremo. Para esto suponga que $r$ es una cota superior de $A$ y muestre que $r/2$ también es una cota superior de $A$.

# Capítulo 3

# Definiciones recursivas y conjuntos infinitos

**Introducción.** Nuestro interés primordial, en este capítulo, es introducir las nociones de sumatorias, productorias y numerabilidad. Esto será realizado en las secciones 2 y 3, pero necesita de, lo que usualmente se llaman, las definiciones recursivas o por inducción. Este tema será tratado en la sección 1 y, en una primera lectura, el lector puede omitir las demostraciones de los resultados allí probados. En fin, en la sección 4, desarrollamos el tema de *las sumas finitas*, utilizando las mismas ideas de la sección 1. Uno de los logros mayores de este capítulo es la construcción de las funciones potenciales ($f(x) = x^n$) y radicales ($f(x) = \sqrt[n]{x}$).

## 3.1. Definiciones por recursión

El objeto de esta sección es dar significado preciso a expresiones de la forma $a_1 + \cdots + a_n$, $a_1 \cdots a_n$, etc. También se definirán las potencias $a^n; n \in \mathbb{N}$; de un elemento $a \in \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo ordenado en todo lo que sigue. Usaremos la siguiente notación

$$I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

**Teorema 3.1.1.** *Dados un conjunto $X$, un elemento $a \in X$ y una función $f : X \to X$, existe una única función $\phi : \mathbb{N} \to X$ tal que $\phi(1) = a$ y $\phi(n+1) = f(\phi(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Demostración.** Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\mathcal{F}_n$ como el conjunto de todas aquellas funciones $\psi : I_n \to X$ tales que

$$\psi(1) = a \qquad \text{y} \qquad \psi(i+1) = f(\psi(i)) \qquad \text{si} \qquad i < n. \tag{1.1}$$

Note que $\mathcal{F}_1$ es el conjunto singular $\{\psi_1\}$ donde $\psi_1 : I_1 \to X$ es definida por $\psi_1(1) = a$. Probaremos que el conjunto $A := \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_n \text{ es singular}\}$ es inductivo. Para ello, fijemos $n \in A$ y pongamos

$\mathcal{F}_n = \{\psi_n\}$. Definamos ahora $\psi : I_{n+1} \to X$ mediante

$$\psi(i) = \psi_n(i) \qquad \text{si} \qquad i \in I_n,$$

$$\psi(n+1) = f(\psi_n(n)).$$

Usando (1.1) se verifica sin dificultad que $\psi \in \mathcal{F}_{n+1}$ y en consecuencia ese conjunto no es vacío. Supongamos ahora que $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_{n+1}$ y sean $\phi, \psi : I_n \to X$ las restricciones de $\alpha, \beta$ respectivamente. Es fácil ver que $\phi, \psi \in \mathcal{F}_n$ y como este conjunto es singular, se concluye que $\psi = \phi$. Es decir, $\alpha(i) = \beta(i)$ si $i \in I_n$. Pero de (1.1), $\alpha(n+1) = f(\alpha(n)) = f(\beta(n)) = \beta(n+1)$ y en consecuencia $\alpha = \beta$. Esto muestra que $\mathcal{F}_{n+1}$ es singular y en consecuencia, $A$ es inductivo. Así, $A = \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos $\mathcal{F}_n = \{\psi_n\}$ y definamos $\phi : \mathbb{N} \to X$ mediante $\phi(n) = \psi_n(n)$. Ya que la restricción de $\psi_{n+1}$ a $I_n$ está en $\mathcal{F}_n$, se tiene $\psi_{n+1}(n) = \psi_n(n)$, de modo que,

$$\phi(n+1) = \psi_{n+1}(n+1) = f(\psi_{n+1}(n)) = f(\psi_n(n)) = f(\phi(n)),$$

lo cual demuestra la existencia de una función $\phi$ satisfaciendo los requerimientos del teorema. Supongamos ahora que $\phi, \psi : \mathbb{N} \to X$ satisfacen tales requerimientos. El lector interesado mostrará que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \phi(n) = \psi(n)\}$ es inductivo, de donde $\phi = \psi$. ■

El resultado que enunciaremos a continuación, aparentemente más general que el teorema anterior, puede probarse usando los mismos argumentos que en este último. Sin embargo, aquí obtendremos el teorema 3.1.2 como consecuencia del teorema 3.1.1, lo que de paso, ilustra la fuerza de este último.

Necesitamos alguna terminología previa. Dados un conjunto $X$ y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $X^n$ al conjunto de todas las funciones de $I_n$ en $X$. Un elemento $\alpha \in X^n$ suele denotarse por $(x_1, \ldots, x_n)$ donde, $x_i = \alpha(i)$; $i \in I_n$. El conjunto $X^n$ se llama **la n-ésima potencia de** $X$ y el elemento $(x_1, \ldots, x_n)$ una **n-upla** de $X$. Con esta nueva terminología, $X^2$ no es otra cosa que $X \times X$.

**Teorema 3.1.2.** *Sea $X$ un conjunto. Dado $a \in X$ y funciones $f_n : X^n \to X$; para cada $n \in \mathbb{N}$; existe una única función $\phi : \mathbb{N} \to X$ tal que $\phi(1) = a$ y $\phi(n+1) = f_n(\phi(1), \ldots, \phi(n))$.*

**Demostración.** Pongamos $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ y definamos $F : Y \to Y$ como sigue: Si $\alpha \in X^n$, entonces $F(\alpha)$ es el elemento de $X^{n+1}$ definido por:

$$F(\alpha)(i) = \alpha(i) \quad \text{si} \quad i \in I_n$$

y

$$F(\alpha)(n+1) = f_n(\alpha). \tag{1.2}$$

Note que $F(\alpha)|_{I_n} = \alpha$ y que $F(X^n) \subset X^{n+1}$.

En fin, sea $\alpha^* \in X^1$ definida por $\alpha^*(1) = a$. Por el teorema 3.1.1, existe una función $\psi : \mathbb{N} \to Y$ tal que, $\psi(1) = \alpha^*$ y $\psi(n+1) = F(\psi(n))$. En particular,

$$\psi(n+1)|_{I_n} = \psi(n). \tag{1.3}$$

Definamos $\phi : \mathbb{N} \to X$ por $\phi(n) = \psi(n)(n)$. Usando nuevamente inducción puede probarse (hacerlo) que, $\phi|_{I_n} = \psi(n)$, de modo que por (1.2) y (1.3), $\phi(n+1) = F(\psi(n))(n+1) = f_n(\psi(n)) = f_n(\phi|_{I_n})$. La unicidad de $\phi$ se sigue como en el teorema 3.1.1. ■

**Teorema 3.1.3.** *Sea $X$ un conjunto no vacío provisto de una ley de composición $*$. Para cada función $g : \mathbb{N} \to X$ existe una única función $\xi_g : \mathbb{N} \to X$ tal que $\xi_g(1) = g(1)$ y $\xi_g(n+1) = \xi_g(n) * g(n+1)$.*

**Demostración.** Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $f_n : X^n \to X$ por $f_n(x_1, \cdots, x_n) = x_n * g(n+1)$. Por el Teorema 3.1.2 (con $a = g(1)$), existe una función $\xi : \mathbb{N} \to X$ tal que $\xi(1) = g(1)$ y $\xi(n+1) = f_n(\xi(1), \cdots, \xi(n))$. La unicidad de $\xi$ se sigue como en el teorema anterior. ■

**Observaciones**.

a) De las demostraciones de los dos teoremas precedentes se tiene que el teorema 3.1.1 implica el teorema 3.1.2 y que este implica el teorema 3.1.3. Veremos ahora que este último implica el teorema 3.1.1, (de donde los tres teoremas son equivalentes). Para ello, sea $G$ el conjunto de todas las aplicaciones de $X$ en si mismo, provisto de la ley de composición $h * g = g \circ h$. Dada $f \in G$ sea $g : \mathbb{N} \to G$ la aplicación constante $g(n) = f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema 3.1.3 existe una aplicación $\xi : \mathbb{N} \to G$ tal que $\xi(1) = g(1) = f$ y $\xi(n+1) = \xi(n) * g(n+1) = f \circ \xi(n)$. El lector verificará que la función $\phi : \mathbb{N} \to X$ definida por $\phi(1) = a$ y $\phi(n) = \xi(n-1)(a)$; si $n > 1$; satisface los requerimientos del teorema 3.1.1.

b) En el teorema anterior pongamos $g(i) = x_i$. Entonces, $\xi_g(2) = x_1 * x_2$, $\xi_g(3) = (x_1 * x_2) * x_3$, $\xi_g(4) = [(x_1 * x_2) * x_3] * x_4$; etc. Esto nos lleva a definir "el producto"$x_1 * \cdots * x_n$ como $\xi_g(n)$.

c) Sea $(X, *)$ como en el teorema 3.1.3. Dada una aplicación $h : I_n \to X$ definimos $h(1) * \cdots * h(n) = g(1) * \cdots * g(n)$ donde $g : \mathbb{N} \to X$ es cualquier extensión de $h$. En el ejercicio 1 se mostrará que esta definición no depende de la extensión $g$ de $h$ usada.

**Proposición 3.1.4.** *Supongamos que en el teorema 3.1.3 $*$ es asociativa, entonces cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$g(1) * \cdots * g(m+n) = [g(1) * \cdots * g(m)] * [g(m+1) * \cdots * g(m+n)].$$

**Demostración.** Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y definamos $h : \mathbb{N} \to X$ por $h(n) = g(m+n)$. Debemos probar que

$$g(1) * \cdots * g(m+n) = [g(1) * \cdots * g(m)] * [h(1) * \cdots * h(n)],$$

lo cual es equivalente a mostrar que

$$\xi_g(m+n) = \xi_g(m) * \xi_h(n), \tag{1.4}$$

donde $\xi_g$ y $\xi_h$ vienen dadas por el teorema 3.1.3.

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y sea $A$ el conjunto de aquellos $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen (1.4). Ya que $\xi_h(1) = h(1) = g(m+1)$, entonces $\xi_g(m+1) = \xi_g(m) * g(m+1) = \xi_g(m) * \xi_h(1)$, lo cual prueba que $1 \in A$.

Supongamos ahora que $n \in A$. Del Teorema 3.1.3 se tiene,

$$\xi_g(m+n+1) = \xi_g(m+n) * g(m+n+1) = [\xi_g(m) * \xi_h(n)] * h(n+1)$$

porque $n \in A$, y de la asociatividad de $*$ se concluye que

$$\xi_g(m+n+1) = \xi_g(m) * [\xi_h(n) * h(n * 1)] = \xi_g(m) * \xi_h(n+1).$$

Así, $n+1 \in A$ y en consecuencia $A = \mathbb{N}$. Es decir, (1.4) es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$. ■

**Ejemplo 1**. Sea $(X, *) = (\mathbb{K}, +)$. Dada una función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, existe (por el Teorema 3.1.3) una única función $\Sigma_g : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que $\Sigma_g(1) = g(1)$ y $\Sigma_g(n+1) = \Sigma_g(n) + g(n+1)$. Esta aplicación $\Sigma_g$ será llamada **la serie asociada a** $g$. También usaremos el símbolo

$$\sum_{i=1}^{n} g(i)$$

para denotar al número $g(1) + \cdots + g(n) = \Sigma_g(n)$. Dicho símbolo es llamado **la sumatoria** de los $g(i)$ desde 1 hasta $n$. Note que por la Proposición 3.1.4,

$$\sum_{i=1}^{m+n} g(i) = \sum_{i=1}^{m} g(i) + \sum_{i=1}^{n} g(m+i),$$

cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{N}$. La última de estas sumatorias también suele denotarse por $\sum_{i=m+1}^{m+n} g(i)$.

**Ejemplo 2**. Sea $(X, *) = (\mathbb{K}, \cdot)$. Dada una función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, existe (por el Teorema 3.1.3) una única función $P_g : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que $P_g(1) = g(1)$ y $P_g(n+1) = P_g(n) + g(n+1)$. También usaremos los símbolos

$$g(1) \cdots g(n), \quad \prod_{i=1}^{n} g(i),$$

para denotar al número $P_g(n)$. Note que por la Proposición 3.1.4,

$$\prod_{i=1}^{m+n} g(i) = \prod_{i=1}^{m} g(i) + \prod_{i=1}^{n} g(m+i),$$

cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{N}$. La última de estas “productorias” también suele denotarse por $\prod_{i=m+1}^{m+n} g(i)$.

Cuando $g(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el producto $\prod_{i=1}^{n} g(i)$ es llamado **el factorial de** $n$ y es denotado por $n!$. Recuerde que por el Teorema 3.1.3, los factoriales están caracterizados por las dos propiedades siguientes:

$$1! = 1 \quad \text{y} \quad (n+1)! = n!(n+1).$$

**Ejercicios.**

1. Sea $(X, *)$ como en el Teorema 3.1.3 y sean $g, h : \mathbb{N} \to X$ aplicaciones tales que, para algún $p \in \mathbb{N}$, $g(i) = h(i)$ si $i \in I_p$. Pruebe que $g(1) * \cdots * g(p) = h(1) * \cdots * h(p)$. *Ayuda.* Defina $A = \{i \in I_p : g(1) * \cdots * g(i) = h(1) * \cdots * h(i)\}$.

2. Dadas $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ y $n \in \mathbb{N}$, pruebe que:

   *a)* $\sum_{i=1}^{n}[g(i) + h(i)] = \sum_{i=1}^{n} g(i) + \sum_{i=1}^{n} h(i)$.

   *b)* $\sum_{i=1}^{n} ag(i) = a \sum_{i=1}^{n} g(i)$.

   *c)* $|\sum_{i=1}^{n} g(i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |g(i)|$.

   *d)* $\sum_{i=1}^{n} g(i) \leq \sum_{i=1}^{n} h(i)$ si $g(i) \leq h(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

3. Dados $x, y \in \mathbb{K}$ defina $\max\{x, y\}$ como el máximo del conjunto $\{x, y\}$. Pruebe que dada una función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ existe una única función $M_g : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que $M_g(1) = g(1)$ y $M_g(n+1) = \max\{M_g(n), g(n+1)\}$. Pruebe también que $M_g(n) \geq g(i)$ para todo $i \in I_n$. El número $M_g(n)$ se suele denotar por $\max\{g(1), \cdots, g(n)\}$ y se llama **el máximo** de los números $g(1), \cdots, g(n)$.

4. Pruebe un resultado análogo al anterior, concerniente al mínimo.

5. Defina $g : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ por $g(n) = n$ y pruebe que $\sum_{i=1}^{n} g(i) = n(n+1)/2$.

6. Pruebe que $n! \leq (n-i)!n^i$ si $n \in \mathbb{N}$ e $i \leq n$. Aquí, $0! := 1$.

7. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq i \leq n$, definamos el **número combinatorio**

   $$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}.$$

   Pruebe la identidad de Pascal:

   $$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$$

   para todo $1 \leq i \leq n$. Use inducción para concluir que $\binom{n}{i} \in \mathbb{N}$ para todo $1 \leq i \leq n$.

## 3.2. Potenciación y radicación

Fijemos $a \in \mathbb{K}$ y definamos $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ por $f(x) = ax$. Por Teorema 3.1.1 existe una única aplicación $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que $\phi(n+1) = f(\phi(n)) = a \cdot \phi(n)$. Note que $\phi(2) = a \cdot a = a^2, \phi(3) = a^2 \cdot a := a^3$, etc. El elemento $\phi(n)$ será llamado la **n-ésima potencia de** $a$ y será denotado por $a^n$. Con esta nueva notación tenemos

$$a^1 = a \quad \text{y} \quad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

**Teorema 3.2.1.** *Dados $a \in \mathbb{R}$ positivo y $n \in \mathbb{N}$, existe un único $b \in \mathbb{R}$ positivo tal que $b^n = a$.* Este número $b$ es llamado **la raíz n-ésima de** $a$ y será denotado por $a^{1/n}$ ó $\sqrt[n]{a}$.

**Demostración.** (Unicidad) Supongamos que existen $b, c \in \mathbb{R}$ positivos tales que $b^n = a$ y $c^n = a$. Entonces, del ejercicio 3, $b = c$.

(Existencia) Si $a = 1$ basta tomar $b = 1$. Supongamos ahora $a > 1$ y pongamos $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^n < a\}$. Entonces $A$ no es vacío porque $1 \in A$. También, $a$ es cota superior de $A$. En efecto, supongamos por el absurdo que existe $x \in A$ tal que $x > a$, entonces $x^n > a^n \geq a$ (Ver ejercicio 4), lo cual contradice la definición de $A$ y muestra nuestra afirmación.

Pongamos $b = \sup(A)$ y notemos que $b \geq 1$. Probaremos que las relaciones $b^n > a$ y $b^n < a$ llevan a contradicción y por la ley de tricotomía se tendrá $b^n = a$.

Supongamos primero que $b^n < a$. Por el ejercicio 7, existe $p > 0$ tal que

$$(b + \epsilon)^n - b^n \leq p\,\epsilon \quad \text{para todo } \epsilon \in [0, 1]. \tag{2.1}$$

Fijemos ahora $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ y $\alpha < (a - b^n)/p$ (Justifique la existencia de tal $\alpha$). De (2.1) se tiene que $(b + \alpha)^n \leq b^n + p\,\alpha < a$, lo cual dice que $b + \alpha \in A$ y contradice el hecho que $b$ es cota superior de $A$. Luego, la relación $b^n < a$ no puede ocurrir.

Supongamos ahora que $b^n > a$. Por el ejercicio 7 existe $q > 0$ tal que

$$b^n - (b - \epsilon)^n \leq q\epsilon \;\text{ para todo } \epsilon \in [0, b]. \tag{2.2}$$

Fijemos ahora $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \beta \leq b$ y $\beta \leq (b^n - a)/q$. De (2.2), $(b - \beta)^n \geq b^n - q\beta \geq a$, de modo que $(b - \beta)^n \geq x^n$ para cada $x \in A$. De aquí y el ejercicio 3, $b - \beta \geq x$ para todo $x \in A$, lo cual dice que $b - \beta$ es cota superior de $A$. Esto contradice el hecho que $b$ es la más pequeña cota superior de $A$ y prueba que la relación $b^n > a$ no puede suceder. Esto termina la prueba del caso $a > 1$

Supongamos en fin que $a < 1$. Ya que $1/a > 1$, existe $c \in \mathbb{R}$ positivo tal que $c^n = a^{-1}$ y el resultado se sigue tomando $b = 1/c$. ■

**Proposición 3.2.2.** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ positivos y sean $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Entonces:*

*a)* $(a^{1/n})^n = (a^n)^{1/n} = a$.

*b)*$(a^{1/n})^{1/m} = a^{1/mn}$.

*c)* $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$.

*d)* $(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$.

*e)* $(a^m)^{1/n} = (a^p)^{1/q}$ *si* $mq = np$.

*f)* $a^{(mq+np)/nq} = (a^m)^{1/n}(a^p)^{1/q}$.

*g)* $1^{1/n} = 1$.

**Demostración.** a) Por definición de raíz n-ésima, $(a^{1/n})^n = a$. Pongamos ahora $x = (a^n)^{1/n}$; entonces $x$ es la raíz n-ésima de $a^n$, de manera que $x^n = a^n$. De aquí y el ejercicio 3, $x = a$, lo cual prueba la parte a).

b) Escribamos $x = (a^{1/n})^{1/m}$ e $y = a^{1/mn}$. Entonces $x^m = a^{1/n}$, de donde $(x^n)^m = a$. Es decir, $x^{mn} = a$. Análogamente, $y^{mn} = a$, de suerte que $x^{mn} = y^{mn}$ y la parte b) se sigue del ejercicio 3.

El resto de la prueba será dejado a cargo del lector. ■

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{Q}$ positivos, se define $a^r = (a^m)^{1/n}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $r = m/n$. Note que de la parte e) de la proposición anterior se tiene que esta definición no depende de los números $m, n$ tales que $r = m/n$. Con esta definición las partes c), f) y g) de la Proposición anterior pueden enunciarse como sigue.

**Proposición 3.2.3.** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $r, s \in \mathbb{Q}$ números positivos. Entonces, $(ab)^r = a^r b^r$, $a^{r+s} = a^r a^s$ y $1^r = 1$. En particular $(a^r)^{-1} = (a^{-1})^r$.*

Por último, sea $a \in \mathbb{R}$ positivo y defina $a^r = (a^{-1})^{-r}$ si $r \in \mathbb{Q}$ es negativo. Dejamos a cargo del lector verificar que la proposición 3.2.3 permanece válida para $r, s$ racionales cualesquiera.

**Ejercicios**. Sean $a, b \in \mathbb{K}$ y $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Pruebe que $a^{m+n} = a^n \cdot a^m$, $(a^m)^n = a^{mn}$ y $(ab)^n = a^n b^n$.

2. Si $a \neq 0$ definimos $a^0 = 1$ y $a^{-n} = (a^{-1})^n$. Pruebe que el ejercicio anterior permanece válido si $a, b \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$. Concluya que $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

3. Sean $a, b > 0$. Pruebe que $b^n > 0$ y use este hecho para ver que $a > b$ si y sólo si $a^n > b^n$. Concluya que si y $a^p = b^p$ para algún $p \in \mathbb{N}$, entonces $a = b$.

4. Pruebe que si $a > 1$, entonces $a^{n+1} > a^n$. Deduzca que $a^n \geq a$. Análogamente, si $0 < a < 1$, muestre que $a^{n+1} < a^n \leq a$.

5. Pruebe que $b^n - a^n = (b - a) \sum_{i=1}^n b^{n-i} a^{i-1}$.

6. Pruebe que si $a \neq 1$, entonces $\sum_{i=1}^n a^{i-1} = (1-a^n)/(1-a)$. Deduzca que $\sum_{i=1}^n (1/2)^i = 1-(1/2)^n$.

7. Si $a > 0$ pruebe la existencia de $p_n, q_n \in \mathbb{K}$ positivos tales que $(a + \epsilon)^n - a^n \leq p_n \epsilon$ para todo $0 \leq \epsilon \leq 1$ y $a^n - (a - \epsilon)^n \leq q_n \epsilon$ para todo $0 \leq \epsilon \leq a$.

8. (Binomio de Newton) Pruebe que
$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

9. (Desigualdad de Bernoulli) Pruebe que si $n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq 0$ y $a > -1$, entonces $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

10. Pruebe que $2^{n-1} \leq n!$.

11. Suponga $b \geq 1$ y muestre que $[1 + (1/bn)]^n < 1 + (1/b) + (1/b)^2$. *Ayuda.* Note que $\binom{n}{i} n^{-i} \leq 1/i! \leq 1/2^{i-1}$. Concluya que $(1 + 1/n)^n < 3$.

12. Pruebe que la proposición 3.2.3 permanece válida si $r, s \in \mathbb{Q}$ son arbitrarios.

## 3.3. Equipotencia

Sean $A$ y $B$ conjuntos. Diremos que $A$ **es equipotente a** $B$ (o que $A$ y $B$ **son equipotentes**), denotado $A \sim B$, si existe una biyección $f : A \to B$. Note que:

E$_1$) $A \sim A$ ya que $id_A$ es una biyección de $A$ en si mismo.

E$_2$) Si $A \sim B$, entonces $B \sim A$, porque la inversa de una biyección es una biyección.

E$_3$) Si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$ porque la composición de funciones biyectivas es biyectiva.

En otras palabras, la relación de equipotencia entre conjuntos es una relación de equivalencia (ver sección 1.3).

Recordemos que $I_n$ denota el conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$. Un conjunto $A$ se dice **finito** si $A$ es vacío o si es equipotente a $I_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario, se dice que $A$ **es infinito**.

*Observación:* Por E$_1$), $I_n$ es finito para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, por E$_3$) se tiene que si $A \sim B$, entonces $A$ es finito si y sólo si $B$ es finito.

Veremos en un ejercicio mas adelante que si $I_p \sim I_q$, entonces $p = q$. Esto permite definir **el cardinal** de un conjunto finito no vacío $A$, denotado $c(A)$, como aquel entero positivo $n$ tal que $A \sim I_n$. En este caso se dice que $A$ **tiene** $n$ **elementos**. También pondremos $c(\emptyset) = 0$.

Un conjunto equipotente a $\mathbb{N}$ se dirá **infinito numerable**, y un conjunto finito o infinito numerable se dirá **numerable**.

**Proposición 3.3.1.** *Todo subconjunto de $I_n$ es finito.*

**Demostración.** Sea $A$ el conjunto de aquellos $n \in \mathbb{N}$ tales que todo subconjunto de $I_n$ es finito. Bastará ver que $A$ es inductivo.

Ya que los únicos subconjuntos de $I_1$ son $\emptyset$ e $I_1$, se concluye que $1 \in A$. Supongamos ahora que $n \in A$ y fijemos $B \subset I_{n+1}$. Debemos probar que $B$ es finito, para lo cual consideramos dos casos. Si $n + 1 \notin B$, entonces $B \subset I_n$ y en consecuencia $B$ es finito porque $n \in A$. Si $n + 1 \in B$, entonces $B = C \cup \{n + 1\}$ donde $C = B \cap I_n$ es un subconjunto de $I_n$. Luego $C$ es finito. Sea $k$ tal que $C$ es equipotente con $I_k$. Dejamos a cargo del lector mostrar que $B$ es equipotente con $I_{k+1}$. ■

**Proposición 3.3.2.** *a) Si $B \subset A$ y $A$ es finito, entonces $B$ es finito.*

*b) Si $f : A \to B$ es inyectiva y $B$ es finito, entonces $A$ es finito.*

*c) Si $f : A \to B$ es sobreyectiva y $A$ es finito, entonces $B$ es finito.*

**Demostración.** Ejercicio.

Nota. La parte a) de la proposición anterior dice que si un conjunto $A$ contiene un subconjunto infinito, entonces $A$ es infinito.

**Proposición 3.3.3.** *Si $A$ y $B$ son conjuntos finitos, entonces $A \cup B$ es finito y $c(A \cup B) + c(A \cap B) = c(A) + c(B)$.*

**Demostración.** Consideraremos dos casos.

**Caso $A \cap B = \emptyset$.** Sean $f : A \to I_n,\ g : B \to I_m$ biyecciones, donde $n = c(A)$ y $m = c(B)$, y definamos $h : A \cup B \to I_{m+n}$ por

$$\begin{array}{rcll} h(x) &=& f(x) & \text{si } x \in A, \\ h(x) &=& n + g(x) & \text{si } x \in B. \end{array}$$

Como $A$ y $B$ son disjuntos, $h$ está bien definida. Además, $h$ es obviamente inyectiva. Fijemos ahora $p \in I_{m+n}$. Si $p \leq n$, entonces $p = f(x)$ para algún $x \in A$ y así, $p = h(x)$. Mientras que si $p > n$, entonces $p = n + i$ para algún $i \in \mathbb{N}$ y como $p \leq m + n$ concluimos que $i \in I_m$. Luego $i = g(x)$ para algún $x \in B$, de suerte que $h(x) = n + g(x) = n + i = p$. Esto muestra que $h$ es sobreyectiva y prueba el primer caso.

**Caso General.** Notemos primero que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ y que $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Del caso precedente (con $B \setminus A$ en lugar de $B$) se tiene que $A \cup B$ es finito y que $c(A \cup B) = c(A) + c(B \setminus A)$. Pero $B$ es la unión disjunta de $A \cap B$ con $B \setminus A$ y aplicando el caso precedente una vez más, se tiene que $c(B) = c(A \cap B) + c(B \setminus A)$. De esto y lo anterior obtenemos que $c(A \cup B) = c(A) + c(B \setminus A) = c(A) + c(B) - c(A \cap B)$. ■

**Ejercicios**.

1. Sea $A$ un conjunto. Pruebe que si $x, y \in A$, entonces $A \setminus \{x\}$ y $A \setminus \{y\}$ son equipotentes. Concluya que si $A \sim B$, entonces $A \setminus \{x\} \sim B \setminus \{y\}$ cualesquiera sean $x \in A$ e $y \in B$.

2. Pruebe que no existe una función sobreyectiva de $A$ en $\mathcal{P}(A)$. En particular, $A$ y $\mathcal{P}(A)$ no son equipotentes. *Ayuda.* Dada $f : A \to \mathcal{P}(A)$ defina $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ y pruebe por el absurdo que $B \notin f(A)$.

3. Pruebe que $\mathbb{N}$ es infinito.

4. Sea $B$ un subconjunto finito de un conjunto $A$. Pruebe que $B \cup \{a\}$ es finito cualquiera sea $a \in A$.

5. Pruebe que no existen aplicaciones sobreyectivas de $I_p$ en $I_{n+p}$; $p, n \in \mathbb{N}$. (*Ayuda.* Use inducción en $p$). Concluya que si $f : I_p \to I_q$ es sobreyectiva, entonces $q \leq p$.

6. Pruebe que si $I_p \sim I_q$, entonces $p = q$.

7. Sean $A$ y $B$ conjuntos finitos. Pruebe que $A \sim B$ si y sólo si $c(A) = c(B)$.

8. Sea $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Pruebe que existe una aplicación $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $h(n) < h(n+1)$ y $h(n) \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. *Ayuda.* Aplique el Teorema 3.1.2 al caso en que $X = \mathbb{N}$, $a$ es el primer elemento de $E_1$ y $f_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ viene definida como sigue: $f_n(\alpha)$ es el primer elemento de $\{x \in E_{n+1} :\ x > \alpha(i) \text{ para todo } i \in I_n\}$.

9. Sea $A$ un conjunto infinito. Pruebe que si $B \subset A$ es finito, entonces $A \setminus B$ es infinito. En particular, $A \setminus B \neq \emptyset$.

10. Pruebe que un conjunto $A$ es infinito si y sólo si $A$ es equipotente con alguno de sus subconjuntos propios.

11. Sean $A, B$ finitos. Pruebe que $A \sim B$ si y sólo si $A \setminus B \sim B \setminus A$.

12. Sea $f : A \to B$ una biyección entre dos subconjuntos finitos de un conjunto $X$. Pruebe que existe una biyección $F : X \to X$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. *Ayuda.* Existe una biyección $g : B \setminus A \to A \setminus B$.

13. Sean $n \in \mathbb{N}$, $i \in I_n$ y $\mathcal{F}_i$ la familia de aquellos subconjuntos de $I_n$ que tienen cardinal igual a $i$. Pruebe que $c(\mathcal{F}_i) = \binom{n}{i}$ y use el binomio de Newton para concluir que $c(\mathcal{P}(I_n)) = 2^n$. Deduzca que $c(\mathcal{P}(A)) = 2^n$, si $A$ es un conjunto finito con $c(A) = n$.

14. Sea $A$ un conjunto finito el cual es unión de una familia de subconjuntos $\{A_1, \cdots, A_n\}$ dos a dos disjuntos. Pruebe que $c(A) = \sum_{i=1}^{n} c(A_i)$.

15. Pruebe que el cardinal del conjunto $\mathcal{F}$ de todas las funciones de $I_p$ en $I_q$ posee $q^p$ elementos. *Ayuda.* Use inducción en $p$.

16. Muestre que el conjunto $\mathcal{F}$ de todas las funciones de un conjunto $A$ en $\{1, 2\}$ es equipotente a $\mathcal{P}(A)$.

## 3.4. Numerabilidad.

Recordemos que un conjunto equipotente a $\mathbb{N}$ se dice que es *infinito numerable*, y un conjunto finito o infinito numerable se dice que es *numerable*.

**Proposición 3.4.1.** *Todo subconjunto $A$ de $\mathbb{N}$ es numerable.*

**Demostración.** Si $A$ es finito no hay nada que probar. Supongamos ahora que $A$ es infinito y para cada $n \in A$ definamos $A_n = \{x \in A : x > n\}$. Como $A \cap I_n$ es un subconjunto del conjunto finito $I_n$, entonces $A \cap I_n$ es finito para cada $n \in \mathbb{N}$ (ver Proposición 3.3.1). Como $A = A_n \cup (A \cap I_n)$, entonces $A_n$ es infinito para todo $n \in \mathbb{N}$; pues de lo contrario, $A$ sería finito al ser la unión de dos conjuntos finitos. En particular $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La idea para construir una función sobreyectiva de $\mathbb{N}$

en $A$ es sencilla. Queremos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, un elemento $a_n$ en $A$ como sigue:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \text{primer elemento de } A \\
a_2 &= \text{primer elemento de } \{x \in A : \ x > a_1\} \\
a_3 &= \text{primer elemento de } \{x \in A : \ x > a_2\} \\
&\vdots \\
a_{n+1} &= \text{primer elemento de } \{x \in A : \ x > a_n\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Una vez hecho esto, definimos $h(n) = a_n$ y afirmamos que $h$ es la biyección buscada. Note que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, así que $h$ es inyectiva. Ahora mostraremos que $h$ es sobreyectiva. Observe primero que $n \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Razonando indirectamente, si $h$ no fuera sobreyectiva y $b$ es el primer elemento de $A \setminus h[A]$, entonces se muestra facilmente que $a_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esto contradice que $b \leq a_b$.

Ahora bien, ¿Cómo podemos formalizar el argumento anterior? El Teorema 3.1.1 es precisamente la herramienta adecuada para este fin. Sea $a$ el primer elemento de $A$ y definamos $f : A \to A$ poniendo $f(n) =$ primer elemento de $A_n$. Por el Teorema 3.1.1, existe una única función $\phi : \mathbb{N} \to A$ tal que $\phi(1) = a$ y $\phi(n+1) = f(\phi(n))$. Ya que $f(x) \in A_x$ se tiene $f(x) > x$ para cada $x \in A$, de modo que $\phi(n+1) > \phi(n)$. De aquí se sigue que $\phi$ es inyectiva (ver el ejercicio 12 de la sección 2.3).

Supongamos por el absurdo que $\phi$ no es sobreyectiva y sea $b$ el primer elemento de $B := \mathbb{N} \setminus \phi(A)$. Ya que $a \notin B$ tenemos $b > a$ y de aquí $C := \{x \in A : x < b\}$ no es vacío. Por el ejercicio 6 de la sección 2.3, $C$ posee un elemento máximo que denotamos por $c$ y como $c < b$ tenemos que $b \in A_c$. En particular, $f(c) \leq b$. Si fuera $f(c) < b$ tendríamos que $f(c) \in C$, de modo que $f(c) \leq c$. Esto contradice el hecho que $f(x) > x$ para todo $x \in A$ y prueba que $b = f(c)$. Por otra parte, $c \notin B$ ya que $c < b$ y $b$ es el primer elemento de $B$, luego $c \in \phi(\mathbb{N})$. Podemos escribir entonces $c = \phi(m)$ para algún $m \in \mathbb{N}$, de donde $\phi(m+1) = f(\phi(m)) = f(c) = b$. Es decir, $b \in \phi(\mathbb{N})$ y esta contradicción termina la prueba. ■

**Proposición 3.4.2.** *Un conjunto no vacío $A$ es numerable si y sólo si existe una función inyectiva $f : A \to \mathbb{N}$. En consecuencia, si existe un conjunto numerable $B$ y una función inyectiva $f : A \to B$, entonces $A$ es numerable.*

**Demostración.** Si $A$ es numerable, entonces existe una biyección $g : A \to I_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ o existe una biyección $g : A \to \mathbb{N}$. En cualquiera de los dos casos, la función $f : A \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = g(x)$, es una inyección.

Recíprocamente, si $f : A \to \mathbb{N}$ es una inyección, entonces por la Proposición 3.4.1, $f(A)$ es numerable y en consecuencia $A$ también lo es, porque la función $g : A \to f(A)$ dada por $g(x) = f(x)$ es una biyección.

La segunda afirmación se la dejamos al lector para que la verifique (ver ejercicio 1). ■

**Proposición 3.4.3.** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es numerable.*

**Demostración.** De acuerdo a la proposición precedente, bastará ver que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(p, q) = (p + q - 1)(p + q - 2) + 2q$; es inyectiva. Note que $f(p, q) \in \mathbb{Z}$ y $f(p, q) \geq 2q$, de modo que $f(p, q) \in \mathbb{N}$. Es decir, $f$ está bien definida.

Sean $(a, b), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $(a, b) \neq (p, q)$ y consideremos los tres casos siguientes:

i) $a + b = p + q$. En este caso, $b \neq q$ (puesto que en caso contrario se tendría $(a, b) = (p, q)$) y $f(a, b) - f(p, q) = 2(b - q) \neq 0$. Así, $f(a, b) \neq f(p, q)$.

ii) $a + b > p + q$. En este caso definimos $r = (a + b) - (p + q)$ y notamos que $f(a, b) - f(p, q) = r[2p + 2q - 3 + r] + 2(b - q) \geq 2p + 2q - 2 + 2(b - q) = 2(p + b - 1) \geq 2$, porque $r \geq 1$. Luego $f(a, b) > f(p, q)$.

iii) $a + b < p + q$. Igual que antes se tiene $f(a, b) < f(p, q)$. ∎

Sea $f$ la función definida en la prueba de la proposición 3.4.3 y considere la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $g(p, q) = f(p, q)/2$. Dejamos como ejercicio al lector mostrar que $g$ es biyectiva. Explicaremos a continuación el significado de la función $g$. Comenzaremos diciendo que los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ suelen representarse en la siguiente forma cuadrangular:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1), & (1,2), & \cdots, & (1,s), & \cdots \\
(2,1), & (2,2), & \cdots, & (2,s), & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
(s,1), & (s,2), & \cdots, & (s,s), & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Pero para "numerarlos", se ideó el siguiente arreglo diagonal:

$$\begin{array}{c}
(1,1) \\
(2,1),(1,2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(s,1),(s-1,2),\cdots,(1,s) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

La función $g$ asigna a $(1, 1)$ el número 1; a $(2, 1), (1, 2)$ los números 2,3 respectivamente; a $(3, 1), (2, 2), (1, 3)$ los números 4,5,6 respectivamente, etc.

Para ser más precisos, sea $D_s$ la diagonal formada por $(s, 1), (s-1, 2), \ldots, (1, s)$ y notemos que $D_s$ tiene $s$ elementos. Así, el número $n$ de elementos en las diagonales anteriores a $D_s$ es $1+2+\cdots+(s-1) = (s-1)s/2$. En consecuencia, $g(s, 1) = n + 1,\ g(s - 1, 2) = n + 2, \cdots, g(1, s) = n + s$. Es decir, $g(p, q) = n + q$, si $(p, q) \in D_s$. Pero $(p, q) \in D_s$ si y sólo si $p + q = s + 1$, y esto termina la construcción de $g$.

**Proposición 3.4.4.** *El producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable.*

**Demostración.** Ejercicio.

Sean $A, I$ conjuntos. Una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de $A$ se dirá **numerable** si $I$ es numerable. Cuando $I = I_n$, la unión (resp. intersección) de esa familia será denotada por $\bigcup_{i=1}^n X_i$ (resp. $\bigcap_{i=1}^n X_i$). Mientras que si $I = \mathbb{N}$, usaremos los símbolos $\bigcup_{i=1}^\infty X_i, \bigcap_{i=1}^\infty X_i$.

**Proposición 3.4.5.** *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia numerable de subconjuntos numerables de un conjunto $A$. Entonces $\bigcup_{i\in I} X_i$ es numerable.*

**Demostración.** Podemos suponer que cada $X_i$ no es vacío (Justificar). Para cada $i \in I$ pongamos $B_i = X_i \times \{i\}$ y sea $f_i : A_i \to \mathbb{N}$ una inyección (véase Proposición 3.4.2). Sea $B := \bigcup_{i\in I} B_i$ y defina $F : B \to \mathbb{N} \times I$ mediante $F(x, k) = (f_k(x), k)$. (Note que si $(x, k) \in B$, entonces $(x, k) \in B_k$ de modo que $x \in A_k$. Luego, $F$ está bien definida).

Supongamos que $F(x, k) = F(y, j)$. Entonces $k = j$ y $f_k(x) = f_j(y) = f_k(y)$, de donde $x = y$, porque $f_k$ es inyectiva. De aquí, $F$ es inyectiva y como por la Proposición 3.4.4, $\mathbb{N} \times I$ es numerable, concluímos que $B$ es numerable (véase ejercicio 1). En fin, la función $\pi : B \to \bigcup_{i\in I} X_i$ dada por $\pi(x, k) = x$ es sobreyectiva (justificar) y el resultado se sigue del ejercicio 1. ∎

**Proposición 3.4.6.** *$\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.*

**Demostración.** Sabemos que $\mathbb{Z}$ es la unión de tres conjuntos numerables ($\mathbb{N}, \{0\}$ y $-\mathbb{N}$) y en consecuencia, $\mathbb{Z}$ es numerable. En particular, $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ es numerable y como la función $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$ dada por $f(m, n) = m/n$; es sobreyectiva, se sigue del ejercicio 1 que $\mathbb{Q}$ es numerable. ∎

**Ejemplo de un Conjunto no Numerable**. Sea $A$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\{0, 1\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $\xi_n \in A$ la función definida por $\xi_n(n) = 1$ y $\xi_n(i) = 0$ si $i \neq n$. El lector mostrará que el conjunto $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equipotente a $\mathbb{N}$, de manera que $A$ es infinito (por contener un subconjunto infinito).

Supongamos ahora que $B$ es un subconjunto infinito numerable de $A$ y sea $\Phi : \mathbb{N} \to B$ una biyección. Pongamos $f_n = \Phi(n)$ y definamos $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ mediante $f(n) = 0$ si $f_n(n) = 1$ y $f(n) = 1$ si $f_n(n) = 0$. Es claro que $f \neq f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que $f \notin B$. Es decir, $f \in A \setminus B$, lo cual dice que $B \neq A$. Luego $A$ no es infinito numerable.

**Nota**. Otra forma de ver que el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable es la siguiente. Primero recordemos que para cualquier conjunto $A$ no existe una función sobreyectiva de $A$ en $\mathcal{P}(A)$ (ver el ejercicio 2 de la sección 3.3). Ahora razonaremos indirectamente. Suponga que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es numerable. Por la Proposición 3.4.2, existe una inyección $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$. De aquí y las Proposiciones 1.2.6- 1.2.7, existe una aplicación sobreyectiva $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, lo cual es una contradicción.

Una vez que se tiene a la mano un conjunto no numerable, como el descrito en el ejemplo anterior, la proposición que mostraremos a continuación provee un método para mostrar que un conjunto no es numerable. Por ejemplo, puede ser usada para mostrar que $\mathbb{R}$ no es numerable (ver sección 4.11). La demostración es una consecuencia directa de la proposición 3.4.2.

**Proposición 3.4.7.** *Sean $A, B$ conjuntos. Si $A$ no es numerable y existe una función inyectiva $f : A \to B$, entonces $B$ no es numerable.*

**Ejercicios**.

1. Pruebe que si $f : A \to B$ es inyectiva (resp. sobreyectiva) y $B$ (resp. $A$) es numerable, entonces $A$ (resp. $B$) es numerable.

2. Pruebe que $n(n+1)$ es par para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluya que $f(p,q)$ es par, donde $f$ es la función definida en la prueba de la proposición 3.4.3. Muestre que la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $g(p,q) = f(p,q)/2$ es biyectiva. *Ayuda.* Pruebe que $g(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ es inductivo.

3. Pruebe que la función $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(p,q) = 2^p 3^q$ es inyectiva. *Ayuda.* Note que $3^n$ es impar para cada $n \in \mathbb{N}$.

4. Pruebe que si $A$ es infinito, entonces existe una función inyectiva $h : \mathbb{N} \to A$. *Ayuda.* Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos finitos de $A$. Por el Axioma de Elección podemos fijar un elemento $x_B \in A \setminus B$, para cada $B \in \mathcal{F}$. Use el Teorema 3.1.1 para encontrar una función $g : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ tal que $g(1) = \emptyset$ y $g(n+1) = g(n) \cup \{x_{g(n)}\}$. Defina $h : \mathbb{N} \to A$ por $h(n) = x_{g(n)}$.

## 3.5. $\mathbb{R}$ no es numerable.

En esta sección mostraremos que $\mathbb{R}$ no es numerable. Usaremos el siguiente resultado que es importante por si mismo. Recordemos que un intervalo cerrado $[a,b]$, donde $a \leq b$, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por los números reales $x$ tales que $a \leq x \leq b$. Se dice que el intervalo $[a,b]$ no es degenerado cuando $a$ y $b$ no son iguales.

**Teorema 3.5.1.** *(El Teorema de los intervalos encajados de Cantor) Sea $I_n = [a_n, b_n]$, con $a_n < b_n$, un intervalo para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap_n I_n \neq \emptyset$.*

**Demostración:** Como por hipótesis $I_{n+1} \subseteq I_n$, entonces se tiene que

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \tag{5.1}$$

Por lo tanto

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$$

Sea $A$ el siguiente conjunto

$$A = \{b_n : \ n \in \mathbb{N}\}$$

De (5.1) se tiene que cada $a_n$ es una cota inferior de $A$. Por consiguiente $A$ tiene ínfimo, sea $z$ el ínfimo de $A$. Por la misma razón tenemos que $a_n \leq z$ para todo $n$. Por lo tanto $a_n \leq z \leq b_n$. Esto muestra que $z \in I_n$ para todo $n$. ■

**Teorema 3.5.2.** $\mathbb{R}$ *no es numerable.*

**Demostración:** Mostraremos que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función, entonces $f$ no es sobreyectiva. Para esto construiremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, un intervalo cerrado y acotado $I_n$ con las siguientes propiedades.

1. $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. $f(n) \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos por un momento que hemos definido una colección de intervalos con esas características. Por el teorema 3.5.1 existe $r \in \bigcap_n I_n$. Por la segunda condición arriba se tiene que $r \neq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $f$ no es sobreyectiva.

Ahora daremos las indicaciones de cómo construir una sucesión de intervalos con las propiedades indicadas arriba. Comencemos por elegir un intervalo cerrado $I_1$ tal que $f(1) \notin I_1$. Por ejemplo, $I_1$ podría ser $[f(1)+1, f(1)+2]$. Supongamos que $I_k$ ha sido construido para todo $k \leq n$. Entonces para definir $I_{n+1}$ observe que es posible encontrar un intervalo cerrado no degenerado $J \subset I_n$ tal que $f(n+1) \notin J$.

■

**Ejercicios.**

1. Muestre que todo intervalo no degenerado no es numerable.

# Capítulo 4

# Sucesiones y series

En este capítulo introducimos los conceptos fundamentales de *convergencia de sucesiones* y *series* y estudiamos sus relaciones con las operaciones algebraicas y con el orden usual de $\mathbb{R}$. En la sección 4.8 se prueba *la completitud de* $\mathbb{R}$, el cual es quizás, el resultado teórico más importante del capítulo. Este resultado dice que toda sucesión de Cauchy de números reales, converge.

En la última sección, introducimos la noción de *red*. Este concepto generaliza la noción de sucesión, y será utilizado en el estudio de las integrales impropias.

## 4.1. Sucesiones y convergencia de sucesiones.

Las nociones de convergencia y de límite se basan en el concepto mas elemental de distancia. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. El número $|x-y|$ se conoce como la distancia de $x$ a $y$. Esta distancia satisface la propiedad triangular. Es decir,

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|; \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

En efecto, basta notar que, $x - z = (x-y) + (y-z)$, y aplicar la proposición 2.8.3.

Dados $a, r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$, definimos el **entorno (vecindad) de centro** $a$ **y radio** $r$; denotado provisionalmente por $E(a,r)$; como el conjunto de aquellos puntos (elementos) de $\mathbb{R}$ cuya distancia a $a$ es menor que $r$. En símbolos, $E(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$. Por la proposición 2.8.2 tenemos que, $x \in E(a,r)$ si y sólo si $a - r < x < a + r$. Por esta razón, $E(a,r)$ se denota más comúnmente por $(a-r, a+r)$ y se llama el **intervalo de centro** $a$ **y radio** $r$.

Sea $A$ un conjunto no vacío. Toda aplicación $f : \mathbb{N} \to A$, será llamada una **sucesión** de $A$. Usualmente, una sucesión $f$ suele indicarse con el símbolo $\{x_n\}$, donde $x_n = f(n)$. La letra $n$, en esta notación es “muda”, en el sentido que podemos usar otras letras como $i, j, k, m$ etc.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de $\mathbb{R}$. Diremos que $\{x_n\}$ es **convergente** si existe $a \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|x_n - a| < \epsilon \quad \text{si} \quad n > n_0.$$

Esto equivale a decir que, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$, cuando $n > n_0$. En este caso, también se dice que $\{x_n\}$ **converge o tiende a** $a$. El natural $n_0$, de esta definición, depende en general del tamaño de $\epsilon$, y será más grande mientras más pequeño sea $\epsilon$.

**Ejemplos:**

1. La sucesión $1/n$ es el ejemplo típico de una sucesión convergente. Por ser $\mathbb{R}$ arquimediano, es fácil verificar que $1/n \to 0$. Mas generalmente, para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x/n \to 0$.

2. Si $0 < x < 1$, entonces $x^n \to 0$. En efecto, observemos que al multiplicar por $x$ la desigualdad $x < 1$ obtenemos que $x^2 < x$ y en general se cumple que $0 < x^{n+1} < x^n < \cdots < x^2 < x < 1$. Por consiguiente $a := \inf\{x^n : n \geq 1\} \geq 0$. Notemos que $a/x \leq x^n$ pues $a \leq x^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $a/x \leq a$ y de aquí se tiene que $a(1-x) \leq 0$. Como $x < 1$, entonces $a \leq 0$ y por lo tanto $a = 0$ (por la tricotomía). Hemos entonces mostrado que $\inf\{x^n : n \geq 1\} = 0$. Finalmente de las propiedades del ínfimo (Proposición 2.6.2) se tiene que $x^n \to 0$.

En lo que sigue, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ denotarán sucesiones de $\mathbb{R}$. La próxima proposición dice que si una sucesión es convergente, entonces converge a un sólo número.

**Proposición 4.1.1.** *Si $\{x_n\}$ converge a $a \in \mathbb{R}$ y también converge a $b \in \mathbb{R}$, entonces $a = b$.*

**Demostración.** Supongamos $a \neq b$ y definamos $\epsilon = |a-b|/2$. Ya que $\epsilon > 0$ y $\{x_n\}$ converge a $a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_n - a| < \epsilon$ si $n > n_0$. Por la misma razón, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_n - b| < \epsilon$ si $n > m_0$. Escojamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > n_0$ y $k > m_0$ (por ejemplo $k = m_0 + n_0$), entonces $|x_k - a| < \epsilon$, $|x_k - b| < \epsilon$, y por la Propiedad Triangular, $|a-b| \leq |a - x_k| + |x_k - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |a-b|$. Esto contradice la Ley de Tricotomía y termina la prueba. ■

Para indicar que una sucesión $\{x_n\}$ de $\mathbb{R}$ converge a $a \in \mathbb{R}$, usaremos los siguientes símbolos:

$x_n \to a$, que se lee: $x_n$ tiende a $a$.

$a = \lim_{n\to\infty} x_n$, que se lee: $a$ es el límite de $x_n$ cuando $n$ tiende a infinito.

Sea $a \in \mathbb{R}$ y definamos $x_n = a$, para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{x_n\}$ es llamada la **sucesión constante** de valor $a$. El lector comprobará que ella converge a $a$.

Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, diremos que la sucesión $\{x_n\}$ es **acotada**. En otras palabras, $\{x_n\}$ es acotada, si existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicios.**

1. 
   *a*) Sea $x_n = \frac{7n^2+8}{3n^2+5}$. Pruebe que $x_n \to 7/3$.
   
   *b*) Sea $x_n = \frac{3}{n^3+n+3}$. Pruebe que $x_n \to 0$.

2. Suponga que $\{x_n\}$ es convergente. Pruebe que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_m - x_n| < 2\epsilon$, si $n, m > n_0$. Deduzca que $\{(-1)^n\}$ no es convergente.

3. Pruebe que si $\{x_n\} \to a$, entonces $|x_n| \to |a|$. Dé un ejemplo donde el recíproco falla.

4. Pruebe que $x_n \to 0$ si y sólo si $|x_n| \to 0$.

5. Sea $N \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\{x_n\}$ es convergente si y sólo si $\{x_{n+N}\}$ es convergente.

6. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente y sea $b \in \mathbb{R}$ una cota superior de $A$. Pruebe que $b = \sup(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}$ de $A$ que converge a $b$.

## 4.2. Operaciones algebraicas sobre sucesiones

En el conjunto de sucesiones de $\mathbb{R}$ podemos introducir operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación y división. Más precisamente, dadas sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ de $\mathbb{R}$, definimos nuevas sucesiones de $\mathbb{R}$ por: $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$. Si $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, también definimos la **sucesión cociente** $\{x_n/y_n\}$. Si $\{x_n\}$ es la sucesión constante de valor $\lambda$, entonces la sucesión $\{x_n y_n\}$ se denota por $\{\lambda y_n\}$. Las propiedades de estas operaciones algebraicas entre sucesiones se deducirán de otras que poseen las operaciones entre números reales que veremos en esta sección.

Sean $a, b, c, d$ números reales. Es intuitivamente claro que si $a$ y $b$ están cerca en la recta y también lo están $c$ y $d$, entonces $a + c$ y $b + d$ deben estar cerca. Algo similar ocurre con las otras operaciones algebraicas en $\mathbb{R}$. En esta sección mostraremos rigurosamente estos hechos que pueden resumirse diciendo que las operaciones algebraicas en $\mathbb{R}$ son continuas (el significado preciso de esta expresión se aclarará mas adelante).

Recordamos que dados conjuntos $A; B \subset \mathbb{R}$, se define $A + B = \{x + y \,:\, x \in A\,,\, y \in B\}$ y $A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A\,,\, y \in B\}$.

**Proposición 4.2.1.** *Sean $a, b, r, s, \in \mathbb{R}$ con $r, s > 0$. Entonces,*

*i)* $(a - r,\, a + r) + (b - s,\, b + s) \subset (a + b - (r + s),\, a + b + (r + s))$.

*ii)* $(a - r,\, a + r) \cdot (b - s,\, b + s) \subset (ab - \rho,\, ab + \rho)$; *donde* $\rho := r|b| + s|a| + rs$.

*iii) Sean $a, r \in \mathbb{R}$ tales que $0 < r < |a|$ y sea $\rho = r/[|a|(|a| - r]$. Si $x \in (a - r, a + r)$, entonces $x \neq 0$ y $x^{-1} \in (a^{-1} - \rho,\, a^{-1} + \rho)$.*

**Demostración.** Sean $x \in (a - r, a + r)$ e $y \in (b - s, b + s)$. Entonces, $|x - a| < r$ y $|y - b| < s$. Note $(x + y) - (a + b) = (x - a) + (y - b)$, luego por la desigualdad triangular obtenemos

$$|(x + y) - (a + b)| \leq |x - a| + |y - b| < r + s.$$

Esto prueba i).

A fin de probar ii), invitamos al lector a verificar previamente la siguiente identidad:

$$xy - ab = (x - a)b + a(y - b) + (x - a)(y - b). \tag{2.1}$$

De aquí y la Propiedad Triangular,

$$\begin{aligned} |xy-ab| &\leq |(x-a)b|+|a(y-b)|+|(x-a)(y-b)| \\ &= |x-a||b|+|a||y-b|+|x-a||y-b| \\ &< r|b|+|a|s+rs. \end{aligned}$$

Para mostrar iii), sea $x \in (a-r, a+r)$, esto es, $|a-x|<r$. Como $a = x+(a-x)$, por la desigualdad triangular (proposición 2.8.4), se tiene que $|a| < |x|+r$. De aquí,

$$|x| > |a| - r > 0, \tag{2.2}$$

de donde, $x \neq 0$. Por otra parte, $1/x - 1/a = (a-x)/ax$, así que,

$$|x^{-1}-a^{-1}| = \frac{|x-a|}{|a||x|} < \frac{r}{|a||x|}$$

y usando (2.2), tenemos que $x^{-1} < (|a|-r)^{-1}$. Y de aquí

$$|x^{-1}-a^{-1}| < \frac{r}{|a|(|a|-r)}.$$

Esto prueba iii). ∎

**Proposición 4.2.2.** *Sean $a, b, \epsilon \in \mathbb{R}$ con $\epsilon > 0$, entonces:*

*i) Existen $r, s > 0$ tales que, $(a-r, a+r)+(b-s, b+s) \subset (a+b-\epsilon, a+b+\epsilon)$.*

*ii) Existen $r, s > 0$ tales que $(a-r, a+r)\cdot(b-s, b+s) \subset (ab-\epsilon, ab+\epsilon)$.*

*iii) Sean $a, \epsilon \in \mathbb{R}$ tales que, $a \neq 0$ y $\epsilon > 0$. Existe $\mu > 0$ tal que si $x \in (a-\mu, a+\mu)$, entonces $x \neq 0$ y $x^{-1} \in (a^{-1}-\epsilon, a^{-1}+\epsilon)$.*

**Demostración.** La parte i) se sigue de la proposición 4.2.1(i) tomando (por ejemplo), $r = s = \epsilon/2$. Para probar ii), comencemos tomando $0 < r \leq 1$, tal que $r \leq \epsilon/(|a|+|b|+1)$ y sea $s = r$. Entonces

$$r|b| + s|a| + r\cdot s = r[|a|+|b|+r] \leq r[|a|+|b|+1] \leq \epsilon$$

y el resultado se sigue de la proposición 4.2.1(ii). La parte iii) se sigue de 4.2.1(iii), eligiendo $\mu \in \mathbb{R}$ de modo que, $0 < \mu < |a|$ y $\mu \leq \epsilon|a|^2/(1+\epsilon|a|)$. Note que esta última desigualdad es equivalente a $\mu/[|a|(|a|-\mu)] \leq \epsilon$. ∎

**Proposición 4.2.3.** *Si $x_n \to a$ e $y_n \to b$, entonces*

*i) $x_n + y_n \to a+b$.*

*ii) $\lambda x_n \to \lambda a$, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$.*

*iii) $x_n y_n \to ab$.*

*iv)* $x_n/y_n \to a/b$, *si* $y_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $b \neq 0$.

**Demostración.** La parte i) será dejada como ejercicio. (El lector podrá adaptar la prueba de iii) a este caso). La prueba de ii) se seguirá de iii), notando que la sucesión constante de valor $\lambda$ converge a $\lambda$.

Para probar iii), fijemos $\epsilon > 0$ y recordemos que por la proposición 4.2.2, existen $r, s > 0$ tales que,

$$(a - r, a + r) \cdot (b - s, b + s) \subset (ab - \epsilon, ab + \epsilon). \tag{2.3}$$

Ya que $x_n \to a$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$x_n \in (a - r, a + r) \quad \text{si} \quad n > n_1. \tag{2.4}$$

Por el mismo argumento, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$y_n \in (b - s, b + s) \quad \text{si} \quad n > n_2. \tag{2.5}$$

Pongamos $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ y sea $n > n_0$ ($n \in \mathbb{N}$). Ya que $n$ es mayor que $n_1$ y $n_2$ simultáneamente, entonces (2.4)-(2.5) son válidas al mismo tiempo y por (2.3) tenemos que, $x_n \cdot y_n \in (ab - \epsilon, ab + \epsilon)$. Esto termina la prueba de iii).

Ya que $x_n/y_n = x_n(1/y_n)$, iv) se seguirá de iii) si probamos que $1/y_n \to 1/b$. Para ello, fijemos $\epsilon > 0$ y recordemos que por la proposición 4.2.2, existe $\mu > 0$ tal que, si $x \in (a - \mu, a + \mu)$, entonces $x \neq 0$ y $x^{-1} \in (a^{-1} - \epsilon, a^{-1} + \epsilon)$. Como $y_n \to b$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $y_n \in (b - \mu, b + \mu)$ si $n > n_0$. De aquí, $y_n^{-1} \in (b^{-1} - \epsilon, b^{-1} + \epsilon)$ si $n > n_0$. ■

**Nota**. De la proposición 4.2.3 parte ii), se tiene que $-y_n \to -b$. De aquí y de la parte i) de esa proposición, $x_n - y_n \to a - b$.

**Ejercicios.**

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $a \neq b$, existe $\epsilon > 0$ tal que, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (b - \epsilon, b + \epsilon) = \emptyset$.

2. Dé una interpretación geométrica de la identidad (2.1) usada en la proposición 4.2.1, como la diferencia del área de dos rectángulos.

## 4.3. Propiedades de las sucesiones convergentes.

En esta sección mostraremos algunas propiedades de las sucesiones convergentes relativas al orden de $\mathbb{R}$.

**Proposición 4.3.1.** *i) Si* $x_n \to a$ *y* $x_n \geq 0$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $a \geq 0$.

*ii) Si* $x_n \to a$, $y_n \to b$ *y* $x_n \geq y_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $a \geq b$.

**Demostración.** i) Supongamos que $a < 0$ y sea $\epsilon = -a/2$. Ya que $x_n \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, si $n > n_0$. Pero $x_n - a > 0$ porque $x_n \geq 0$ y estamos asumiendo que $a < 0$. De aquí, $x_n - a < \epsilon$ para $n > n_0$, y en consecuencia, $x_n < a + \epsilon = a/2 < 0$, si $n > n_0$. Esto contradice la hipótesis ($x_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$) y termina la prueba de i).

ii) Por la nota a la proposición anterior, $x_n - y_n \to a - b$, pero por hipótesis, $x_n - y_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, y la prueba se sigue de la parte i). ∎

**Proposición 4.3.2.** *Si* $0 \leq x_n \leq y_n$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e* $y_n \to 0$*, entonces* $x_n \to 0$.

**Demostración.** Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0$ tal que $|y_n| < \epsilon$ si $n \geq n_0$. Como $|x_n| \leq |y_n|$ para todo $n$, entonces $|x_n| < \epsilon$ si $n \geq n_0$ ∎

**Ejemplo:** Si $x > 1$, entonces $x^{1/n} \to 1$. En efecto, como $x^{1/n} > 1$, podemos escribir $x^{1/n} = 1 + b_n$, para algún $b_n > 0$. Por definición de raíz n-ésima, $x = (1 + b_n)^n$, y por la desigualdad de Bernoulli (ver ejercicio 9 de la sección 3.2), $(1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$. En consecuencia, $0 < b_n \leq (x - 1)/n$. Como $(x-1)/n \to 0$, entonces por la proposición 4.3.2 tenemos que $b_n \to 0$. Luego de la proposición 4.2.3(i) se obtiene lo deseado.

**Proposición 4.3.3.** *Sean* $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ *sucesiones de* $\mathbb{R}$ *tales que,* $x_n \to a$ *y* $z_n \to a$*. Si* $x_n \leq y_n \leq z_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $y_n \to a$.

**Demostración.** Sabemos que $z_n - x_n \to a - a = 0$. Además, $0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n$, y por la proposición precedente, $y_n - x_n \to 0$. De aquí, $y_n = (y_n - x_n) + x_n \to 0 + a = a$. ∎

**Ejercicios.**

1. Pruebe que si $x_n^2 \to 0$, entonces $x_n \to 0$.

2. Pruebe que dado $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{x_n\}$ de $\mathbb{Q}$ convergente a $x$. *Ayuda.* Use la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ (teorema 2.5.3) para hallar un racional $x_n$ tal que $x < x_n < x + 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. Pruebe que toda sucesión convergente es acotada.

4. Pruebe que $a/(n + b) \to 0$, cualquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$, $-b \notin \mathbb{N}$.

5. Pruebe que $x^n \to 0$ si $|x| < 1$. Pruebe que $\{x^n\}$ no converge si $|x| > 1$. Concluya que $\{x^n\}$ converge si y sólo si $-1 < x \leq 1$.

6. Pruebe que $x^{1/n} \to 1$ si $x > 0$. Compare este resultado con lo mostrado en el ejemplo que sigue a la Proposición 4.3.2.

7. Pruebe que $n^{1/n} \to 1$. *Ayuda.* Muestre que $n^{1/n} = 1 + b_n$ para algún $b_n \geq 0$. Use el Binomio de Newton para probar que si $a \geq 0$, entonces $(1 + a)^n \geq n(n - 1)a^2/2$.

8. Pruebe que si $x_n \to 0$ e $\{y_n\}$ es acotada, entonces $x_n y_n \to 0$.

9. Dados $a, \lambda, t \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, $t \in \mathbb{Q}$, $\lambda < a^t$. Pruebe que existe $s \in \mathbb{Q}$; $s < t$; tal que $\lambda < a^s$. Ayuda: Busque $s$ de la forma $t - 1/n$ para algún natural $n$ y recuerde que $(a)^{1/n}$ tiende a 1.

10. Pruebe que las dos condiciones siguientes son equivalentes:

    *a*) $\mathbb{R}$ es arquimediano,

    *b*) $1/n \to 0$.

## 4.4. Sucesiones monótonas.

Diremos que $\{x_n\}$ es **monótona creciente** o más simplemente **creciente**, si $x_n \leq x_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Cuando la desigualdad es estricta, se dice que $\{x_n\}$ es **estrictamente creciente**. Si $x_{n+1} \leq x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, decimos que $\{x_n\}$ es **monótona decreciente** o simplemente **decreciente.** Diremos que una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

**Teorema 4.4.1.** *Si $\{x_n\}$ es creciente y acotada, entonces $\{x_n\}$ es convergente. De hecho,* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*. Este resultado permanece válido para sucesiones decrecientes, cambiando supremo por ínfimo.*

**Demostración.** Supongamos que $\{x_n\}$ es creciente y acotada y pongamos: $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $a = \sup(A)$. Dado $\epsilon > 0$, por la proposición 2.6.1, existe $x \in A$ tal que, $a - \epsilon < x$. Pero como $x \in A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_N$, y así $a - \epsilon < x_N \leq x_n$ si $n > N$. Por otra parte, $x_n \leq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (porque $a = \sup(A)$), en consecuencia, $a - \epsilon < x_n \leq a < a + \epsilon$ si $n > N$. Esto prueba que $x_n \to a$.

El caso decreciente será dejado a cargo del lector. ∎

**Ejemplo:** Considere la siguiente sucesión

$$a_n = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \cdots + 1/n! = \sum_{i=0}^{n} 1/i!$$

Note que $a_{n+1} - a_n = 1/(n+1)! > 0$, así que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente. Para mostrar que es acotada, note que $2^n < n!$, si $n \geq 4$ (como se verifica fácilmente por inducción). De esto se sigue fácilmente que

$$2 \leq a_n \leq 1 + 1 + 1/2 + 1/2^2 + \cdots + 1/2^n = 1 + \sum_{i=0}^{n} 1/2^i$$

Por otra parte, se prueba fácilmente por inducción que $\sum_{i=0}^{n} 1/2^i = 2 - 1/2^n$ (ver ejercicios de la sección 3.2). Y por ser $\{a_n\}$ creciente, concluimos que $a_n < 3$ para todo $n$. Luego por el teorema 4.4.1 se tiene que $\{a_n\}$ es convergente.

**Proposición 4.4.2.** *La sucesión $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ es convergente.*

**Demostración.** Pongamos $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Por el binomio de Newton,

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} n^{-i}$$

Note que $\binom{n}{i} n^{-i} \leq 1/i!$ (verificarlo). Luego $x_n \leq a_n$ donde $a_n$ es la sucesión definida en el ejemplo anterior. Por lo tanto $x_n < 3$ y claramente $1 < x_n$ para todo $n$. Así, $\{x_n\}$ es acotada.

Probaremos ahora que $\{x_n\}$ es estrictamente creciente, lo que dará fin a la prueba. Para ello notemos que

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (n+1)^{-i} > \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (n+1)^{-i}$$

Por esto, bastará mostrar que

$$\binom{n}{i} n^{-i} \leq \binom{n+1}{i} (n+1)^{-i}, \tag{4.1}$$

si $0 \leq i \leq n$. Es claro que esta desigualdad es válidad para $i = 0$, luego supondremos que $1 \leq i \leq n$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i} n^{-i} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(i-1))}{i!\cdot n^i} \\
&= \frac{1}{i!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(i-1)}{n} \\
&= \frac{1}{i!}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \\
&\leq \frac{1}{i!}(1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{i!}\frac{n+1}{n+1}\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{n+1-(i-1)}{n+1} \\
&= \binom{n+1}{i}(n+1)^{-i}
\end{aligned}$$

Donde la desigualdad arriba es válida ya que $1-\frac{j}{n} \leq 1-\frac{j}{n+1}$ para todo $j \leq n$. ∎

**Observación:** Otra manera de mostrar la desigualdad (4.1) es observando que, por la definición de factorial, esa desigualdad es equivalente a la siguiente

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^i \leq 1+\frac{i}{n+1-i}, \tag{4.2}$$

la cual es obviamente válida para $i = 0, 1$. Supongamos ahora que (4.2) es válida para algún $i < n$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{i+1} &\leq \left(1+\tfrac{1}{n}\right)\left(1+\tfrac{i}{n+1-i}\right) \qquad = \left(1+\tfrac{i+1}{n+1-i}\right)+\left(\tfrac{1}{n(n+1-i)}\right) \\
&\leq \left(1+\tfrac{i+1}{n-i}\right)-\tfrac{i}{(n-i)(n+1-i)} \quad \leq \quad 1+\tfrac{i+1}{n+1-(i+1)}
\end{aligned}$$

lo cual dice que (4.2) es válida para $i+1$. Por inducción tenemos que (4.2) es válida para cada $i \in \{0, 1 \cdots, n\}$.

El límite de la sucesión $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ juega un papel tan importante en matemática, que se optó por denotarlo con un signo particular; a saber, la letra $e$. Es decir,

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

**Ejercicios.**

1. Pruebe que si $\{x_n\}$ es creciente, entonces $x_m \leq x_n$ cuando $m < n$.

2. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$. Pruebe que $\{x^{1/n}\}$ es decreciente.

3. Considere la sucesión $\{x_n\}$ definida recursivamente de la siguiente manera: $x_1 = 1$ y para $n \geq 1$ se cumple que
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$
Pruebe que es convergente ¿Puede determinar su límite?. *Ayuda:* Pruebe que a partir de $n = 2$ la sucesión es decreciente y acotada inferiormente, para esto muestre por inducción que $2 < x_n^2 < 9/4$.

4. Pruebe que $\{n/x^n\}$ es decreciente si $x \geq 2$.

5. Pruebe que $\{x_n\}$ es creciente si y sólo si $\{-x_n\}$ es decreciente.

6. Suponga que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq x_{n+1}$ si $n > N$. Pruebe que $\{x_n\}$ es convergente si ella es acotada.

7. Pruebe que $x^n/n! \to 0$, cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$. *Ayuda.* Suponga primero que $x > 0$ y escoja $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq x$. Sea $x_n := x^n/n!$ para $n \geq N$. Aplique el ejercicio anterior para deducir que $\{x_n\}$ converge a algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que $x_{n+1} = x_n([x/(n+1)]$, y $x_{n+1} \to \lambda$.

8. Use los argumentos del ejercicio anterior para mostrar que $n/x^n \to 0$, si $x > 1$.

9. Considere la sucesión $\{x_n\}$ definida recursivamente de la manera siguiente: $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$, para $n \geq 1$. Pruebe que $\{x_n\}$ no es acotada. *Ayuda:* Use 4.4.1

**Problemas** Los siguientes ejercicios contienen los resultados necesarios para definir la función exponencial $e^x$. Pondremos $F_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$, para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$.

1. Use los argumentos de la demostración de la proposición 4.4.2 para probar que $\{F_n(x)\}$ es convergente si $0 < x \leq 1$.

2. Pruebe que si $b_n \to +\infty$, entonces $(1 + 1/nb_n)^n \to 1$.

3. Sean $x, y > 0$. Pruebe que si $\{F_n(x)\}$ y $\{F_n(y)\}$ son convergentes, entonces $\{F_n(x+y)\}$ también lo es y
$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x+y) = \lim_{n\to+\infty} F_n(x)F_n(y);$$
*Ayuda.* Use el ejercicio anterior para ver que $F_n(x)F_n(y)/F_n(x+y) \to 1$.

4. Use inducción en $k$ para probar que $F_n(k) \to e^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

5. Pruebe que $\{F_n(x)\}$ es convergente si $x > 0$. *Ayuda.* Por el ejercicio 1, sólo falta mostrar el caso cuando $x > 1$. En consecuencia, puede suponer que $x = k + r$ con $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r < 1$.

6. Pruebe que $(1 - n^{-2})^n \to 1$. *Ayuda.* Use la desigualdad de Bernoulli.

7. Pruebe que $F_n(x)F_n(-x) \to 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Pruebe que $\{F_n(x)\}$ es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Defina $F(x) = \lim_{n\to+\infty} F_n(x)$ y pruebe que $F(x+y) = F(x)F(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

## 4.5. Límites al infinito

En esta sección precisaremos el significado de los límites al infinito. Diremos que $\{x_n\}$ **tiende a** $+\infty$, denotado $x_n \to +\infty$, si para cada $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ si $n > n_0$. Análogamente, diremos que $\{x_n\}$ **tiende a** $-\infty$, si para cada $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < -M$ si $n > n_0$.

Las sucesiones monótonas acotadas son convergentes (por el teorema 4.4.1). La siguiente proposición complementa ese resultado.

**Proposición 4.5.1.** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión monótona.*

*i) Si $\{x_n\}$ es creciente y no está acotada superiormente, entonces $x_n \to +\infty$.*

*ii) Si $\{x_n\}$ es decreciente y no está acotada inferiormente, entonces $x_n \to -\infty$.*

**Demostración.** i) Dado $K > 0$, ya que $\{x_n\}$ no es acotada superiormente, existe $n$ tal que $x_n > K$. Como $\{x_n\}$ es creciente, entonces $x_m > K$ para todo $m \geq n$. Esto muestra lo deseado. La parte ii) la dejaremos a cargo del lector. ■

**Observación:** Tenemos entonces que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ cualquiera sea la sucesión creciente $\{x_n\}$.

**Ejemplo:** Mostraremos que $x^n \to +\infty$, si $x > 1$. En efecto, tenemos que $x < x^2 < x^3 < \cdots$, es decir que esta sucesión es creciente. Afirmamos que $x^n$ no es acotada superiormente. En efecto, si lo fuera, entonces $x^n$ convergería a un valor $a$ (justifique). Por otra parte tenemos que $x^{n+1} - x = x(x^n - 1)$. Como $x^n$ y $x^{n+1}$ convergen ambas a $a$, entonces se tiene que $a - x = x(a-1)$. Simplificando esta igualdad se tiene que $a = ax$ y en consecuencia $x = 1$ contradiciendo la hipótesis.

La siguiente proposición nos habla del comportamiento de los límites al infinito en relación a la suma, al producto y al orden. Su demostración quedará a cargo del lector.

**Proposición 4.5.2.** *i) Si $\{x_n\}$ es acotada e $y_n \to +\infty$, entonces $x_n + y_n \to +\infty$. Análogamanete, si $y_n \to -\infty$, entonces $x_n + y_n \to -\infty$*

*ii) Suponga que $x_n \to a$ e $y_n \to +\infty$. Si $a > 0$, entonces $x_n y_n \to +\infty$ y si $a < 0$, entonces $x_n y_n \to -\infty$*

*iii) Suponga que $x_n \leq y_n$ para todo $n$. Si $x_n \to +\infty$, entonces $y_n \to +\infty$ y si $y_n \to -\infty$, entonces $x_n \to -\infty$.*

**Ejercicios.**

1. Complete la demostración de la proposición 4.5.1.

2. Pruebe que $|x_n| \to +\infty$ si y sólo si $1/x_n \to 0$.

3. Demuestre la proposición 4.5.2.

4. Sea $a$ un real mayor que 1 y $p \in \mathbb{N}$. Pruebe que $a^n/n^p \to +\infty$. *Ayuda.* Pruebe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ es creciente. Después muestre que no puede ser acotada.

5. Pruebe que $n^n/n! \to +\infty$. *Ayuda.* Muestre que $n^n/n!$ es creciente. Factorize $(n+1)^{n+1}/(n+1)! = (n^n/n!)(1 + 1/n)^n$. Suponga que es acotada y llegue a una contradicción.

## 4.6. Subsucesiones

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $n_k$ naturales tales que

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$$

Entonces la sucesión

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

dada por $g(k) = x_{n_k}$ se llama una subsucesión de $\{x_n\}$. Mas formalmente, diremos que $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es **estrictamente creciente**, si $\phi(n) < \phi(m)$ cuando $n < m$. La composición $f \circ \phi$, de una sucesión $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con una función estrictamente creciente $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, será llamada una **subsucesión** de $f$.

Si denotamos a $f$ por $\{x_n\}$, entonces $f \circ \phi$ es denotada por $\{x_{\phi(n)}\}$. La notación usual para $f \circ \phi$ es $\{x_{n_k}\}$, donde $n_k = \phi(k)$.

**Ejemplo:** Considere la sucesión $x_n = 1/n^2$. Las siguientes son subsucesiones con sus correspondiente funciones $\phi$: (i) $y_n = 1/4n^2$ donde $\phi(n) = 2n$. (ii) $y_n = 1/2^{2n}$ donde $\phi(n) = 2^n$. Por otra parte, la sucesión $1/4, 1, 1/16, 1/9, 1/36, 1/25, \cdots, 1/(2n+1)^2, 1/(2n)^2, \cdots$ no es una subsucesión de $\{x_n\}$.

**Proposición 4.6.1.** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $\{x_{\phi(n)}\}$ una subsucesión. Entonces*

*i) Si $\{x_n\}$ es acotada, entonces $\{x_{\phi(n)}\}$ también es acotada.*

*ii) Si $\{x_n\} \to a$, entonces $\{x_{\phi(n)}\} \to a$.*

*iii) Si $\{x_n\}$ es monótona creciente, entonces $\{x_{\phi(n)}\}$ también lo es. Análogamente para monótona decreciente.*

*iv) Si $\{x_{\psi(n)}\}$ es una subsucesión de $\{x_{\phi(n)}\}$, entonces $\{x_{\psi(n)}\}$ también es una subsucesión de $\{x_n\}$.*

**Demostración.** i) Suponga que $|x_n| \leq M$ para todo $n$. Entonces $|x_{\phi(n)}| \leq M$ para todo $n$. ii) Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_n - a| < \epsilon$ si $n > n_0$. Por inducción es facil mostrar que por ser $\phi$ estrictamente creciente, entonces $\phi(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; de modo que $|x_{\phi(n)} - a| < \epsilon$ si $n > n_0$. Dejamos a cargo del lector el resto de la demostración. ■

La sucesión $x_n = (-1)^n/n$ no es ni creciente ni decreciente, sin embargo la subsuceción $\{x_{2n}\}$ es decreciente. Este es un hecho general que mostramos a continuación.

**Teorema 4.6.2.** *Toda sucesión tiene una subsucesión monótona*

**Demostración.** Considere el siguiente conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \, x_n \leq x_k \text{ para todo } k \geq n\}$$

Hay dos casos posibles:

(i) $A$ es infinito. Podemos entonces enumerar los elementos de $A$ en forma creciente

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$$

Es decir, tomemos $\phi : \mathbb{N} \to A$ con $\phi(k) = m_k$ creciente y sobreyectiva (vea la proposición 3.4.1 y su demostración). Entonces $\{x_{\phi(n)}\}$ es una subsucesión creciente (verificarlo).

(ii) $A$ es finito. En este caso sea $N$ tal que $A \subseteq \{1, \cdots, N\}$. Entonces para cada $n > N$ existe $k \geq n$ tal $x_n > x_k$. Ahora definiremos inductivamente una sucesión creciente $n_j$ de naturales tales que $x_{n_j} > x_{n_{j+1}}$. Por las hipótesis del caso (ii) existe $n_1 > N$ tal que $x_{N+1} > x_{n_1}$. Suponga que hemos definido $N < n_1 < n_2 < \cdots < n_j$ tales que $x_{n_i} > x_{n_{i+1}}$ para todo $i < j - 1$. De nuevo por las hipótesis de (ii) existe $n_{j+1} > n_j$ tal que $x_{n_j} > x_{n_{j+1}}$. Esto muestra nuestra afirmación. Para terminar, notemos que $\{x_{n_k}\}_k$ es una subsucesión decreciente de $\{x_n\}$. ■

**Nota:** La definición de la subsuceción hecha en el caso (ii) también se puede presentar en términos de lo visto en la sección 3.3. En efecto, observemos que el conjunto $E_n = \{k : x_n > x_k\}$ es infinito para cualquier $n > N$ (justificar). Luego por el ejercicio 8 de la sección 3.3 existe una función $h : \{k \in \mathbb{N} : k > N\} \to \mathbb{N}$ creciente tal que $h(n) \in E_n$ para cada $n > N$. Entonces $\{x_{h(n)}\}_{n>N}$ es una subsucesión decreciente.

**Corolario 4.6.3.** *Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.*

**Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. Por el teorema 4.6.2 $\{x_n\}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ monótona que además es acotada (por serlo $\{x_n\}$). Por consiguiente $\{x_{n_k}\}$ es convergente (por el teorema 4.4.1). ∎

**Ejercicios.**

1. Halle una sucesión que tenga una subsucesión convergente a 1 y otra convergente a 2.

2. Sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que $\phi(n) < \phi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\phi$ es estrictamente creciente.

3. Sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente. Use inducción para probar que $\phi(n) \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Pruebe que si $\{x_n\}$ no es acotada, entonces $\{x_n\}$ posee una subsucesión $\{x_{h(n)}\}$ tal que $|x_{h(n)}| \to +\infty$. *Ayuda.* Pruebe que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $E_n = \{k \in \mathbb{N} : |x_k| \geq n\}$ es infinito.

5. *a*) Construya una sucesión que posea una subsucesión (estrictamente) creciente y también otra subsucesión decreciente.

   *b*) Suponga que $\{x_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ que no tiene subsucesiones decrecientes. ¿Será cierto que $\{x_n\}$ es creciente?

6. Pruebe que si las subsucesiones $\{x_{2n-1}\}$, $\{x_{2n}\}$ de $\{x_n\}$ convergen a un mismo $a \in \mathbb{R}$, entonces $x_n \to a$.

7. Pruebe que si $\{x_{2n-1}\}$, $\{x_{2n}\}$, $\{x_{3n}\}$ son convergentes, entonces $\{x_n\}$ es convergente. *Ayuda.* Note que $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{3n}\}$ tienen una subsucesión común y que lo mismo ocurre con $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{3n}\}$.

8. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión y sean $\phi_1, \ldots, \phi_N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente crecientes tales que, $f(\phi_i(n)) \to x$ para todo $i = 1, \cdots, N$. Pruebe que si $\phi_1(\mathbb{N}) \cup \cdots \cup \phi_N(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, entonces $f(n) \to x$.

9. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Pruebe lo siguiente

   *a*) Si toda subsucesión de $\{x_n\}$ es acotada, entonces $\{x_n\}$ es acotada.

b) Si toda subsucesión de $\{x_n\}$ es convergente, entonces $\{x_n\}$ es convergente.

c) Si toda subsucesión de $\{x_n\}$ es monótona, entonces $\{x_n\}$ es monótona.

¿Que tiene esto que ver con la proposición 4.6.1?

10. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada.

 a) Suponga que todas las subsucesiones *convergentes* de $\{x_n\}$ convergen al mismo punto. Muestre que $\{x_n\}$ es convergente.

 b) Suponga que todas las subsucesiones *monótonas* de $\{x_n\}$ convergen al mismo punto. Muestre que $\{x_n\}$ es convergente.

## 4.7. Límites superior e inferior

Si $\{x_n\}$ es acotada definimos:

$$\bar{x}_n = \sup\{x_i : i \geq n\} \text{ y } \underline{x}_n = \inf\{x_i : i \geq n\}.$$

El lector verificará que $\{\bar{x}_n\}$ es una sucesión acotada monótona decreciente y que $\{\underline{x}_n\}$ es acotada monótona creciente. Por el teorema 4.4.1, la sucesión $\{\bar{x}_n\}$ (resp. $\{\underline{x}_n\}$) tiene límite, que denotaremos por $\limsup_{n\to\infty} x_n$ (resp. $\liminf_{n\to\infty} x_n$) y que llamaremos el **límite superior** (resp. **límite inferior** de $\{x_n\}$).

Note que $\underline{x}_n \leq \bar{x}_n$; para cada $n \in \mathbb{N}$; y por la proposición 4.3.1, $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Si $\{x_n\}$ no está acotada superiormente (resp. inferiormente), se define $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (resp. $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

**Ejemplo:** Considere la sucesión $x_n = (-1)^n + 1/n$. Se tiene que $-1 \leq x_n \leq 2$ y por lo tanto $\{x_n\}$ es acotada. Por otra parte

$$\bar{x}_n = \sup\{x_i : i \geq n\} = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 + \dfrac{1}{n+1}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Así que los primeros términos de la sucesión $\{\bar{x}_n\}$ son:

$$1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{6}, 1 + \frac{1}{6}, \cdots,$$

y $\limsup x_n = 1$. Razonando de manera análoga se puede verificar que la sucesión $\{\underline{x}_n\}$ es constante igual a -1 y por lo tanto $\liminf x_n = -1$.

**Proposición 4.7.1.** *Supongamos que $\{x_n\}$ es acotada. Entonces $\{x_n\}$ es convergente si y sólo si sus límites superior e inferior coinciden. En ambos casos,* $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$.

**Demostración.** Pongamos $\bar{x}_n = \sup\{x_i : i \geq n\}$, $\underline{x}_n = \inf\{x_i : i \geq n\}$ y sea $\bar{x}$ (resp. $\underline{x}$) el límite de $\{\bar{x}_n\}$ (resp. $\{\underline{x}_n\}$).

Supongamos que $\bar{x} = \underline{x}$. Ya que $\underline{x}_n \leq x_n \leq \bar{x}_n$, se sigue de la proposición 4.3.3 que $\{x_n\}$ converge a $\bar{x}$. Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}$ es convergente y notemos que, por la proposición 2.8.5,

$$\bar{x}_n - \underline{x}_n = \sup\{|x_i - x_j|\} : i, j \geq n\}. \tag{7.1}$$

Por otra parte, mostraremos que, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i - x_j| < \epsilon$ si $m, n \geq N$. En efecto, existe $N$ tal que $|x_n - x| < \epsilon/2$ si $n \geq N$. Luego como $x_n - x_m = x_n - x + x - x_m$, entonces por la desigualdad triangular, se tiene que $|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \epsilon$ si $n, m \geq N$. De aquí y (7.1), $\bar{x}_n - \underline{x}_n \leq \epsilon$ si $n \geq N$, lo cual prueba que $\bar{x} = \underline{x}$. ■

**Ejercicios:**

1. Determine los primeros términos de la sucesiones $\bar{x}_n$ y $\underline{x}_n$ para cada una de las siguientes sucesiones y calcule $\operatorname{lím\,sup} x_n$ y $\operatorname{lím\,inf} x_n$:

   *a*) $x_n = (-1)^n + (-1)^n/n$

   *b*) $x_n = [n + (-1)^n(3n - 1)]/n$.

2. Sea $\bar{x}$ el límite superior de $\{x_n\}$. Pruebe que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq \bar{x} + \epsilon$ si $n \geq N$.

3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión convergente. Muestre que

$$\operatorname{lím\,inf} x_n \leq \operatorname{lím} x_{n_k} \leq \operatorname{lím\,sup} x_n$$

## 4.8. Sucesiones de Cauchy

Se dice que $\{x_n\}$ **es de Cauchy**, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \epsilon$ cuando $m, n > n_0$. La demostración de la siguiente proposición la puede extraer el lector interesado de la prueba de la proposición 4.7.1.

**Proposición 4.8.1.** *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

El objeto de esta sección es probar el recíproco del resultado anterior. Pero antes de hacerlo mostraremos un resultado que nos hará falta.

**Proposición 4.8.2.** *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

**Demostración.** Supongamos que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_m - x_n| < 1$ si $m, n > N$. En particular, $|x_n - x_{N+1}| < 1$ si $n > N$, y por la proposición 2.8.4,

$$|x_n| < 1 + |x_{N+1}| \quad \text{si} \quad n > N. \tag{8.1}$$

Si $M := \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\}$, entonces $|x_i| \leq M$ para $1 \leq i \leq N$. Además $1 + |x_{N+1}| \leq M$. De esto junto con (8.1) se tiene que $|x_n| \leq M$ para todo $n$. ∎

**Teorema 4.8.3.** *(Completitud de $\mathbb{R}$) Toda sucesión de Cauchy, en $\mathbb{R}$, es convergente.*

**Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por la proposición anterior sabemos que $\{x_n\}$ es acotada y por tanto tiene límites superior e inferior.

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_j - x_i| \leq \epsilon$, si $i, j \geq N$, y argumentando como en la proposición 4.7.1 mostraremos que los límites superior e inferior de $\{x_n\}$ coinciden y de la proposición 4.7.1, $\{x_n\}$ es convergente. En efecto, por la proposición 2.8.5,

$$\bar{x}_n - \underline{x}_n = \sup\{|x_i - x_j|\} : i, j \geq n\}.$$

Luego $\bar{x}_n - \underline{x}_n \leq \epsilon$ si $n \geq N$. De aquí se sigue que $\bar{x} - \underline{x} \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Luego $\bar{x} = \underline{x}$. ∎

**Ejercicios.**

1. En este ejercicio daremos una prueba alternativa de la completitud de $\mathbb{R}$.

   *a*) Pruebe que si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente, entonces dicha sucesión converge.

   *b*) Use la proposición 4.8.2 y el corolario 4.6.3 para mostrar que toda sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente y luego concluya usando la parte (a).

2. Pruebe que $\{x_n\}$ es de Cauchy si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$ si $p \in \mathbb{N}$ y $n > N$.

3. Sean $A_n \subset \mathbb{R}$ conjuntos tales que

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots A_n \cdots$$

   y además que

$$|x - y| < 1/n \text{ para todo } x, y \in A_n$$

   Muestre que si $\{x_n\}$ es una sucesión tal que $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}$ es convergente.

4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y defina

$$\begin{aligned} s_n &= x_1 + x_2 + \cdots x_n \\ t_n &= |x_1| + |x_2| + \cdots |x_n| \end{aligned}$$

   Muestre que si $t_n$ es convergente también lo es $s_n$ *Ayuda:* Por la desigualdad triangular $|s_n - s_m| \leq |t_n - t_m|$.

5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión con la siguiente propiedad

$$\exists n_0, \forall i, j \geq n_0, |x_i - x_j| < 1$$

Muestre que $\{x_n\}$ es acotada. Compare la hipótesis de este ejercicio con la de la proposición 4.8.2.

6. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Dadas $f, g \in \mathcal{S}$, escriba $f \simeq g$ si $f(n) - g(n) \to 0$ y pruebe que $\simeq$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{S}$. Denote por $\mathbb{R}_0$ el conjunto cociente de $\mathcal{S}$ por $\simeq$ y pruebe que la función $L : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}; \quad L([f]) = \lim_{n\to\infty} f(n)$; está bien definida y es biyectiva. Aquí, $[f]$ denota la clase de $f \in \mathcal{S}$ según $\simeq$ (Ver sección 1.3).

**Nota.** El ejercicio 6 dice que el cuerpo de los números reales puede ser construido, una vez conocido el cuerpo de los números racionales, a través de ciertas clases de sucesiones de Cauchy de números racionales.

## 4.9. Series.

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión, por el teorema 3.1.3, existe una única función $\Sigma_f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que, $\Sigma_f(1) = f(1)$ y $\Sigma_f(n+1) = \Sigma_f(n) + f(n+1)$. Esta sucesión $\Sigma_f$ se conoce como la **serie asociada a** $f$.

Denotemos la sucesión $f$ por $\{a_n\}$ ($a_n := f(n)$). En la literatura corriente, la serie $\Sigma_f$ se denota por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ó por $\sum_n a_n$ o aún, por $a_1 + \cdots + a_n \cdots$) y se llama la **serie de término general** $a_n$. El número $\Sigma_f(n)$ se denomina la **n-ésima suma parcial** de la serie $\sum_n a_n$ y se denota por $s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Si la sucesión $\Sigma_f$ $(= \{s_n\})$ converge, diremos que la **serie** $\sum_n a_n$ **es convergente**. En caso contrario, se dice que la **serie diverge**. Si la serie $\sum_n a_n$ converge, entonces el límite de la sucesión $\{s_n\}$ se llama la **suma de** $\sum_n a_n$ y se denota también por $\sum_n a_n$. Este abuso de notación no causa, en general, confusión. En fin, la serie $\sum_n a_n$ también suele indicarse por $a_1 + \cdots + a_n + \cdots$ ó por $a_1 + a_2 + \cdots$.

**Ejemplo. La Serie Geométrica**. Sea $r \in \mathbb{R}$. La serie

$$\sum_n r^{n-1} = 1 + r + \cdots + r^{n+1} + \cdots,$$

se conoce con el nombre de **serie geométrica de razón** $r$. Sabemos que, $(1-r)(1+r+\cdots+r^{n-1}) = 1 - r^n$ (ver el ejercicio 5 de la sección 3.2); así que la n-ésima suma parcial, $s_n = 1 + \cdots + r^{n-1}$, de esa serie, viene dada por $s_n = (1-r^n)/(1-r)$ si $r \neq 1$ y $s_n = n$ si $r = 1$. En particular, la serie diverge si $r = 1$. Por otra parte, también sabemos que $\{r^n\}$ converge si y sólo si $-1 < r \leq 1$ y además $r^n \to 0$ si $|r| < 1$ (ver el ejercicio 5 de la sección 4.3). En consecuencia, la serie geométrica de razón $r$ converge si y sólo si $|r| < 1$ y en este caso, su suma es, $1/(1-r) = \lim_{n\to\infty} s_n$.

**Proposición 4.9.1.** *Si* $\sum_n a_n$ *converge, entonces* $a_n \to 0$.

**Demostración.** Sea $s_n$ la n-ésima suma parcial de la serie en cuestión. Por hipótesis, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que, $s_n \to s$, pero $\{s_{n+1}\}$ también converge a $s$, por ser una subsucesión de $\{s_n\}$, y así $s_{n+1} - s_n \to 0$. Es decir, $a_{n+1} \to 0$ y de aquí, $a_n \to 0$. ■

**Contraejemplo. La Serie Armónica.** Probaremos que la serie $\sum_n 1/n$ (llamada **armónica**) diverge, aunque su término general tiende a cero. Sea $s_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ y para $k$ pongamos

$$t_k = s_{2^k} = 1 + 1/2 + \cdots + 1/2^k;$$

probaremos por inducción que $t_k \geq 1 + k/2$. Para ello sea $A = \{k \in \mathbb{N} : t_k \geq 1 + k/2\}$. Ya que $t_1 = s_2 = 3/2$, entonces $1 \in A$. Sea $k \in A$ y pongamos $n = 2^k$. Es fácil ver que

$$t_{k+1} = t_k + \sum_{i=1}^{n} 1/(n+i)$$

y como $n+i \leq 2n$ para $1 \leq i \leq n$, entonces, $t_{k+1} \geq 1 + k/2 + n/2n = 1 + (k+1)/2$. Es decir, $k+1 \in A$, de modo que $A$ es inductivo y así, $t_k \geq 1 + k/2$; para todo $k \in \mathbb{N}$. Ya que $\{t_k\}$ no es acotada, entonces $\{s_n\}$ no es convergente porque $\{t_k\}$ es una subsucesión de $\{s_n\}$.

## 4.10. Series absolutamente convergentes

Se dice que $\sum_n a_n$ es **absolutamente convergente**, si $\sum_n |a_n|$ es convergente.

**Proposición 4.10.1.** *Toda serie* $\sum_n a_n$ *absolutamente convergente es convergente y* $|\sum_n a_n| \leq \sum_n |a_n|$.

**Demostración.** Sea $\sum_n a_n$ absolutamente convergente y pongamos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $t_n = |a_1| + \cdots |a_n|$. Por hipótesis, $\{t_n\}$ es convergente y en consecuencia de Cauchy. Por otra parte, $|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| = t_{n+p} - t_n$; de donde $\{s_n\}$ es de Cauchy y en consecuencia convergente. Sean $s, t$ los límites de $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ respectivamente, ya que $|s_n| \leq t_n$ y $|s_n| \to |s|$, entonces por la proposición 4.3.1(ii), $|s| \leq t$. ■

Si una serie es convergente pero no absolutamente convergente, decimos que ella es **condicionalmente convergente**. Veremos mas adelante (proposición 4.11.6) que $\sum_n (-1)^{n-1}/n$ es convergente, y como la serie armónica diverge, entonces $\sum_n (-1)^{n-1}/n$ es condicionalmente convergente.

**Definición 4.10.2.** *Si* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es una biyección, la serie* $\sum_n a_{h(n)}$ *es llamada un* **reordenamiento de** $\sum_n a_n$.

Por ejemplo, la serie

$$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \cdots,$$

es un reordenamiento de la serie

$$\sum_n (-1)^{n-1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots.$$

En este caso, la aplicación $h$ viene dada por: $h(3n-2) = 4n-3$, $h(3n-1) = 4n-1$ y $h(3n) = 2n$.

**Nota**. Si $\sum_n a_n$ es condicionalmente convergente, puede probarse que, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un reordenamiento de ella convergente a $\alpha$. Ver [**?**].

**Proposición 4.10.3.** *Si $\sum_n a_n$ es absolutamente convergente, entonces todo reordenamiento de $\sum_n a_n$ converge y tiene la misma suma que $\sum_n a_n$*

**Demostración.** Sea $\sum_n a_{h(n)}$ un reordenamiento de $\sum_n a_n$ y pongamos, $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $t_n = a_{h(1)} + \cdots + a_{h(n)}$, $r_n = |a_1| + \cdots + |a_n|$, $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ y $r = \lim_{n\to\infty} r_n$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $|s_n - s| < \epsilon/2$ y $r - r_n < \epsilon/2$ si $n > N$.

Por otro lado, es fácil probar que $\{j \in \mathbb{N} : h(j) \leq N\}$ es acotado y en consecuencia tiene máximo, que denotamos por $p$. Note que, $h(I_p) \supset I_N$ (recuerde que $I_n$ denota el conjunto $\{1, \cdots, n\}$). Si $n \geq p$, entonces $h(I_n) \supset I_N$ de modo que, $t_n = s_N + \sum_{i \in F} a_i$, donde $F = h(I_n) \setminus I_N$. Sea $q$ el máximo de $F$. Entonces

$$|t_n - s| \leq |s - s_N| + \sum_{i \in F} |a_i| \leq \epsilon/2 + \sum_{i=N+1}^{i=q} |a_i| \leq \epsilon/2 + r_q - r_N \leq \epsilon/2 + r - r_N < \epsilon.$$

Hemos probado que: dado $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, $|t_n - s| \leq \epsilon$, si $n \geq p$. ■

**Ejercicios.**

1. Sean $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ series convergentes y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\sum(a_n + b_n)$ y $\sum_n \lambda a_n$ son convergentes y que, $\sum(a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n$, $\sum_n \lambda a_n = \lambda \sum_n a_n$.

2. Sea $N \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\sum_n a_n$ converge si y sólo si $\sum_n a_{n+N}$ converge. Deduzca que lo mismo es cierto para series absolutamente convergentes.

3. Pruebe que el reordenamiento $\sum_n b_n$ de $\sum_n (-1)^{n-1}/n$, dado después de la definición 4.10.2, es convergente y que su suma es $(3/2)\sum(-1)^{n-1}/n$. *Ayuda*. Escriba $t_n = b_1 + \cdots + b_n$, $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ y pruebe que:

   *a*) $\{t_{3n}\}$, $\{t_{3n+2}\}$ son monótonas, la primera creciente y la segunda decreciente.

   *b*) $t_{3n+2} - t_{3n+1} \to 0$ y $t_{3n+1} - t_{3n} \to 0$.

   *c*) $t_{3n+2} \geq t_{3n+1} \geq t_{3n}$.

   *d*) Deduzca que $\{t_{3n}\}$, $\{t_{3n+1}\}$ y $\{t_{3n+2}\}$ son convergentes a un mismo límite. Concluya que $\{t_n\}$ es convergente (ver el ejercicio 7 de la sección 4.6).

   *e*) $t_{3n} = s_{4n} + s_{2n}/2$.

## 4.11. Criterios de convergencia de series

**Proposición 4.11.1.** *(Criterio de Cauchy). Sea $\sum_n a_n$ una serie con la siguiente propiedad: Para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,*

$$|\sum_{i=n+1}^{i=n+p} a_i| < \epsilon \quad si \quad p \in \mathbb{N} \text{ y } n > N. \tag{11.1}$$

*Entonces, $\sum_n a_n$ es convergente.*

**Demostración.** Sea $s_n$ la $n$-ésima suma parcial de la serie en cuestión. De (11.1) se tiene que, $|s_{n+p} - s_n| \leq \epsilon$ si $n > N$; de modo que $\{s_n\}$ es de Cauchy, y por lo tanto convergente (por el teorema 4.8.3). ■

**Proposición 4.11.2.** *Si $\sum_n a_n$ es una serie de términos no negativos (esto es, $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$) y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales es acotada, entonces $\sum_n a_n$ es convergente.*

**Demostración.** Note que las desigualdades $s_n \leq s_{n+1}$, $a_{n+1} \geq 0$ son equivalentes. Por lo tanto la sucesión de sumas parciales es creciente y acotada, luego convergente (por el teorema 4.4.1). ■

**Proposición 4.11.3.** *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que $0 \leq a_n \leq b_n$; $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_n b_n$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge y $\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$. La conclusión sigue siendo válida si para algún $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n > N$.*

**Demostración.** Pongamos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ y $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. Entonces $s_n \leq t_n$ y $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ son crecientes. Por hipótesis, $t_n \to t$, para algún $t \in \mathbb{R}$, y por ser ser creciente $t = \sup\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ (teorema 4.4.1). En particular, $0 \leq s_n \leq t_n \leq t$, y por lo tanto, $\{s_n\}$ es acotada. Por la proposición 4.11.2, $s_n \to s$, para algún $s \in \mathbb{R}$, y por la proposición 4.3.1, $s \leq t$. La segunda parte de la proposición se prueba de manera similar y la dejamos al lector (ver ejercicio 2). ■

**Proposición 4.11.4.** *Sean $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ series de términos positivos y supongamos que la sucesión $\{b_n/a_n\}$ converge a un número positivo $c$. Entonces $\sum_n a_n$ es convergente si y sólo si, $\sum_n b_n$ es convergente.*

**Demostración.** Pongamos $\epsilon = c/2$ y fijemos $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|\frac{b_n}{a_n} - c| < \epsilon \quad \text{si} \quad n > N.$$

De la definición de $\epsilon$ queda, después de algunas manipulaciones que,

$$\frac{c}{2}a_n < b_n < \frac{3c}{2}a_n \quad \text{si} \quad n > N$$

Ahora la prueba se sigue fácilmente de la proposición 4.11.3 (verficarlo). ■

**Proposición 4.11.5.** *(Criterio del Cociente). Supongamos que* $a_n \neq 0; \quad n \in \mathbb{N}$.

*a) Si* $c := \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| < 1$, *entonces* $\sum_n a_n$ *es absolutamente convergente.*

*b) Si* $d := \liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$, *entonces* $\sum_n a_n$ *es divergente.*

**Demostración.** a) Fijemos $b \in \mathbb{R}$ tal que, $c < b < 1$ y sea $\epsilon = b - c$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $|a_{n+1}/|a_n| < c + \epsilon = b$, si $n \geq N$. De aquí,

$$\frac{|a_{n+N}|}{|a_N|} = \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}\frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}}| \cdots \frac{|a_{n+N}|}{|a_{N+n-1}|} < b^n.$$

Luego $|a_{n+N}| \leq \lambda b^n$; $n \in \mathbb{N}$; donde $\lambda := |a_N|$. Pero la serie geométrica, de razón $b$, es convergente (porque $0 < b < 1$), y por la proposición 4.11.3, $\sum_n |a_{n+N}|$ es convergente. De aquí, $\sum_n |a_n|$ es convergente.

b) Fijemos $b \in (1, d)$. Usando el argumento de la parte a), podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+N}| \geq |a_N| b^n$. En consecuencia, la sucesión $\{a_n\}$ no puede converger a cero y la prueba se sigue de la proposición 4.9.1. ■

**Nota.** Supongamos que $a_n \neq 0; \quad n \in \mathbb{N}$; y que la sucesión $\{|a_{n+1}/a_n|\}$ converge a $c \in \mathbb{R}$. La proposición anterior dice que la serie $\sum_n a_n$ es absolutamente convergente (resp. divergente) si $c < 1$ (resp. $c > 1$). Sin embargo, en el caso $c = 1$, dicha serie puede ser convergente o divergente, como lo muestran los siguientes ejemplos:

1. Para la serie armónica se tiene que $c = 1$ y esta serie es divergente.

2. Si $a_n = (-1)^{n-1}/n$, entonces $c = 1$ y la serie converge, porque satisface las hipótesis de la proposición 4.11.6, más abajo.

**Proposición 4.11.6.** *(***Series Alternadas***). Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión decreciente de números reales no negativos, convergente a cero* ($a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *y* $a_n \to 0$)*, entonces* $\sum_n (-1)^{n-1} a_n$ *converge.*

**Demostración.** Pongamos $s_n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} a_i$, entonces:

a) $s_{2n-2} - s_{2n} = a_{2n-1} - a_{2n+2} \geq 0$.

b) $s_{2n-1} - s_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0$

c) $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \geq 0$.

De a) (resp. b)), se tiene que $\{s_{2n}\}$ (resp. $\{s_{2n-1}\}$) es creciente (resp. decreciente). En particular, $s_{2n} \geq s_2$ y $s_{2n-1} \leq s_1$, y por c), $s_2 \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$. Esto prueba que $\{s_{2n}\}$ y $\{s_{2n-1}\}$ son acotadas y por el teorema 4.4.1, convergentes. Por c) $\{s_{2n}\}$ y $\{s_{2n-1}\}$ tienen el mismo límite, ya que $a_{2n} \to 0$. Sea $s$ el límite de ambas, mostraremos que $s_n$ converge a $s$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N$ tal que $|s - s_{2n}| < \epsilon$ y $|s - s_{2n+1}| < \epsilon$ si $n \geq N$. Luego $|s - s_n| < \epsilon$ si $n \geq 2N$. ■

La serie $\sum_n (-1)^{n-1} a_n$, con $a_n \geq 0$, se dice alternada, porque escrita en la forma $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \cdots$, los términos de la serie van alternando su signo.

**Ejemplo.** Sea $p \in \mathbb{R}$ un racional positivo. La serie $\sum_n \frac{1}{n^p}$ es llamada una **p-serie**. (En realidad, esta terminología es utilizada para cualquier número real positivo, pero en nuestro caso, todavía no hemos definido el símbolo $n^p$, para $p$ irracional). Nuestro próximo objetivo es probar que la p-serie converge si y sólo si, $p > 1$. Ya sabemos que la serie armónica ($p = 1$) diverge, de suerte que la p-serie diverge si $p \leq 1$. (Justificar). Restaría probar que la p-serie converge si $p > 1$

**Proposición 4.11.7.** *La p-serie converge si $p > 1$.*

**Demostración.** Definamos $q = p - 1$, $d_n = n^{-q}$ y $b_n = d_n - d_{n+1}$. Del ejercicio 8, mas abajo, $\sum_n b_n$ converge, y del ejercicio 9, mas abajo, $\lim_{n\to+\infty} n^p b_n = q$, (justificar). La prueba se sigue ahora de la proposición 4.11.4 colocando $a_n = 1/n^p$. ■

**No numerabilidad de** $\mathbb{R}$. Usaremos los resultados de esta sección para dar otra demostración de que $\mathbb{R}$ no es numerable. La demostración que presentaremos dará mas información que la dada por la prueba del teorema 3.5.2. Pues ahora mostraremos que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es al menos la del conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\{0, 1\}$, el cual denotaremos por $A$. Recordemos que $A$ no es numerable (ver sección 3.4). Construiremos una inyección $\xi : A \to \mathbb{R}$, y de la proposición 3.4.7, resultará lo deseado.

Para cada $f \in A$ se tiene que la serie $\sum_n f(n) \cdot 3^{-n}$ converge (justificarlo). Denotemos su suma por $x_f$ y veamos que $x_f \neq x_g$ si $f \neq g$. Con este fin, sea $N$ el primer elemento de $\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}$. Ya que $f(N) \neq g(N)$, podemos asumir, intercambiando los papeles de $f$ y de $g$ si fuera necesario, que $f(N) = 0$ y $g(N) = 1$. Pongamos $s_n = \sum_{i=1}^n f(i) \cdot 3^{-i}$, $t_n = \sum_{i=1}^n g(i) \cdot 3^{-i}$. Observe que $s_n = t_{N-1} + \sum_{i=N+1}^n f(i) \cdot 3^{-i}$ y $t_N = t_{N-1} + 3^{-N}$. Luego, si $n > N$ se tiene que

$$t_N - s_n = 3^{-N} - \sum_{i=N+1}^{n} f(i) 3^{-i}.$$

Ya que $0 \leq f(n) \leq 1$, entonces

$$t_N - s_n \geq 3^{-N} - \sum_{i=N+1}^{n} 3^{-i} \geq 3^{-N}[1 - \sum_i 3^{-i}] = 3^{-N}/2 > 0.$$

Es decir, $s_n < t_N - 2^{-1} \cdot 3^{-N} < t_N \leq x_g$. Por lo tanto, la función $\xi : A \to \mathbb{R}$, $\xi(f) = x_f$, es inyectiva.

**Ejercicios.**

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de $\mathbb{R}$ tal que $|x_{n+1} - x_n| < (1/2)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\{x_n\}$ es convergente. *Ayuda.* Las sumas parciales de la serie $\sum_n x_{n+1} - x_n$ vienen dadas por $s_n = x_{n+1} - x_1$.

2. Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones de $\mathbb{R}$ y suponga que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $0 \leq a_n \leq b_n$, cuando $n \geq N$. Pruebe que si $\sum_n b_n$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge.

3. Pruebe que si $\sum_n a_n$ es convergente y $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_n a_n^2$ es convergente. *Ayuda.* Recuerde que si $0 \leq x \leq 1$, entonces $x^2 \leq x$.

4. Pruebe que si $\sum_n a_n$ es acotada y $0 < r < 1$, entonces $\sum_n a_n r^n$ es absolutamente convergente.

5. Pruebe que la serie $\sum_{n\geq 0} x^n/n!$ converge cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$. Aquí, $x^0 := 1$, $0! = 1$ y $\sum_{n\geq 0} a_n$ denota la serie $\sum_n a_{n-1}$.

6. Pruebe que $\sum_{n\geq 0} 1/n! = e$. *Ayudas.* Muestre que $\binom{n}{i} n^{-i} \leq \frac{1}{i!}$, si $0 \leq i \leq n$, y concluya que $(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$. Por otra parte, fijado $m \in \mathbb{N}$, se tiene $(1+\frac{1}{n})^n \geq \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} n^{-i}$, para cualquier $n \geq m$; $n \in \mathbb{N}$. Además, $\binom{n}{i} n^{-i} \to \frac{1}{i!}$.

7. (**Criterio de la Raíz.**) Pruebe que si $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1$ (resp. $\liminf_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 1$), entonces $\sum_n a_n$ es absolutamente convergente (resp. divergente).

8. Pruebe que si la sucesión $\{d_n\}$ converge a cero, entonces la serie $\sum_n (d_n - d_{n+1})$ converge.

9. Pruebe que si $q \in \mathbb{Q}$ es positivo, entonces $\lim_{n\to+\infty} n[(1+\frac{1}{n})^q - 1] = q$. *Ayuda.* Pruebe primero el caso en que $q \in \mathbb{N}$. En el caso general, escriba $q = m/r$ con $m, r \in \mathbb{N}$ y use el ejercicio 5 de la sección 3.2 para mostrar que si, $a, b \in \mathbb{R}$ son positivos, entonces
$$b^m - a^m = (b^q - a^q) \sum_{i=1}^{r} b^{q(r-i)} a^{q(i-1)}.$$

10. Pruebe que todo intervalo no degenerado es no numerable. *Ayuda.* Muestre que la aplicación $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$; $f(x) = x(1+x^2)^{-1/2}$; es biyectiva.

## 4.12. Redes.

El concepto de convergencia de sucesiones, establecido en la sección 4.3, es insuficiente en algunas ramas de las matemáticas. De hecho, en la teoría de integrales impropias desarrolladas en el capítulo 8, se toman límites de familias de elementos de $\mathbb{R}$, que están indizadas por el conjunto de los intervalos compactos, contenidos en el intervalo $I$ de integración.

Sea $I$ un conjunto. Diremos que $\mathbb{J} \subset \mathcal{P}(I)$ es un **conjunto dirigido**, si dados $J, K \in \mathbb{J}$ existe $L \in \mathbb{J}$ tal que $J \subset L$ y $K \subset L$. Por una **red** en un conjunto $A$ entendemos cualquier familia $\{x_J\}_{J\in\mathbb{J}}$, de elementos de $A$, indizada por un conjunto dirigido $\mathbb{J}$. Cuando no haya peligro de confusión, utilizaremos la notación abreviada $\{x_J\}$.

**Nota**. Los conceptos de “dirigido” y “red”, que acabamos de dar, son un caso particular de una teoría más general, pero son suficientes para nuestros propósitos.

**Ejemplos.**

1. El conjunto $\mathbb{J} = \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es dirigido. Además, una red indizada por este $\mathbb{J}$ corresponde exactamente a una sucesión.

2. El conjunto $\mathbb{J}$, de todos los subconjuntos finitos de $I$, es dirigido. Además, con cualquier familia $\{a_i\}$ de números reales, se tiene la red de "las sumas parciales" $\{\sum_{i\in J} a_i\}_{J\in\mathbb{J}}$.

Diremos que una red $\{x_J\}_{J\in\mathbb{J}}$ de $\mathbb{R}$ es **convergente**, si existe $a \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Para cada $\epsilon > 0$, existe $J_0 \in \mathbb{J}$ tal que,

$$|x_J - a| < \epsilon \quad \text{si} \quad J \supset J_0.$$

En este caso se dice que $\{x_J\}$ **converge a** $a$ y lo denotaremos por $x_J \to a$.

Los resultados de esta sección serán, en su mayoría, dejados como ejercicios. La demostración del primero de ellos servirá para ilustrar donde se utiliza el hecho de que $\mathbb{J}$ es dirigido. Las otras pruebas se obtienen utilizando los argumentos de este primer resultado y los argumentos de las cuatro secciones precedentes.

**Proposición 4.12.1.** *Sea $\{x_J\}$ una red en $\mathbb{R}$. Si $x_J \to a$ y $x_J \to b$, entonces $a = b$.*

**Demostración.** Supongamos $a \neq b$ y pongamos $\epsilon = |b-a|/2$. Ya que $x_J \to a$, existe $J_1 \in \mathbb{J}$ tal que

$$|x_J - a| < \epsilon \quad \text{si} \quad J \supset J_1. \tag{12.1}$$

Por el mismo argumento, existe $J_2 \in \mathbb{J}$ tal que,

$$|x_J - b| < \epsilon \quad \text{si} \quad J \supset J_2. \tag{12.2}$$

Como $\mathbb{J}$ es dirigido, existe $K \in \mathbb{J}$ tal que $J_1 \subset K$ y $J_2 \subset K$, y por (12.1)-(12.2), $|a-b| \leq |a - x_K| + |x_K - b| < 2\epsilon = |a-b|$. Esta contradicción termina la prueba. ∎

En lo que resta del capítulo, $\{x_J\}$, $\{y_J\}$ denotarán redes en $\mathbb{R}$, indizadas por un conjunto dirigido $\mathbb{J}$.

**Proposición 4.12.2.** *Supongamos que $x_J \to a$ e $y_J \to b$. Entonces: $x_J + y_J \to a + b$, $x_J y_J \to ab$ y $\lambda x_J \to \lambda a$ si $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, $1/y_J \to 1/b$, si $b \neq 0$ e $y_J \neq 0$ para todo $J \in \mathbb{J}$.*

**Proposición 4.12.3.** *Supongamos que $x_J \to a$ e $y_J \to b$. Si $x_J \leq y_J$, para todo $J \in \mathbb{J}$, entonces $a \leq b$.*

Diremos que $\{x_J\}$ **es creciente**, si $x_j \leq x_K$ cuando $J \subset K$. Se dice que $\{x_J\}$ **está acotada superiormente** si $\{x_J : J \in \mathbb{J}\}$ está acotado superiormente. De manera análoga se definen los conceptos de **red decreciente y acotada inferiormente**.

**Proposición 4.12.4.** *Si $\{x_J\}$ es creciente y acotada superiormente, entonces ella es convergente y su límite es* $\sup\{x_J : J \in \mathbb{J}\}$. *Un resultado análogo ocurre para redes decrecientes acotadas inferiormente.*

Se dice que la red $\{x_J\}$ **es de Cauchy**, si para cada $\epsilon > 0$, existe, $J_0 \in \mathbb{J}$ tal que, $|x_J - x_K| < \epsilon$, cuando $J, K \supset J_0$.

**Proposición 4.12.5.** *Toda red $\{x_J\}$ de Cauchy converge.*

**Demostración.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la definición de red de Cauchy, con $\epsilon = 2^{-n}$, tenemos que existe $J_n \in \mathbb{J}$ tal que,

$$|x_J - x_K| < 2^{-n} \quad \text{si} \quad J, K \supset J_n. \tag{12.3}$$

Definamos $K_n = \cup_{i=1}^{n} J_i$ e $y_n = x_{k_n}$. Como $K_{n+1} \supset K_n \supset J_n$, se sigue de (12.3) que $|y_{n+1} - y_n| < 2^{-n}$ y por el ejercicio 2 de la sección 4.5, $\{y_n\}$es convergente. Así, $y_n \to x$, para algún $x \in \mathbb{R}$.

Sea $\epsilon > 0$. Ya que, $y_n \to x$ y $2^{-n} \to 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|y_N - x| < \epsilon/2$ y $2^{-n} < \epsilon/2$. De aquí y (12.3), $|x_J - x| \le |x_J - y_N| + |y_N - x| < 2^{-n} + \epsilon/2 < \epsilon$, si $J \supset J_N$. ∎

Sea $I$ un conjunto. Dada una aplicación $f : I \to \mathbb{R}$, existe una única aplicación $\Sigma_f : \mathbb{P}_\infty(I) \to \mathbb{R}$ tal que $\Sigma_f(\{i\}) = f(i)$; $i \in I$; y $\Sigma_g(J \cup \{i\}) = \Sigma_g(J) + f(i)$, si $J \in \mathbb{P}_\infty(I)$ e $i \in I \setminus J$. Ver corolario **??**. Esta aplicación $\Sigma_g$ la llamaremos **la serie asociada a** $f$ y la denotaremos por $\sum_{i \in I} a_i$, donde $a_i = f(i)$. Asociada con la serie $\sum_{i \in I} a_i$ tenemos la red $\{s_j\}$ de sumas parciales definida por $s_j = \sum_{i \in J} a_i$, para cada $J \in \mathbb{J} := \mathbb{P}_\infty(I)$. En lo que resta del capítulo, pondremos $\mathbb{J} = \mathbb{P}_\infty(I)$. Si $\{s_J\}$ converge a $s \in \mathbb{R}$, se dice que $\sum_{i \in I} a_i$ **es convergente y que su suma es** $s$. En este caso escribiremos $s = \sum_{i \in I} a_i$.

**Ejercicios**.

1. Suponga que existe $L \in \mathbb{J}$ tal que $J \subset L$ para todo $J \in \mathbb{J}$ y pruebe que $x_J \to x_L$. (Este $L$, cuando existe, se llama el **máximo de** $\mathbb{J}$).

2. Pruebe que si $\{x_J\}$ es constante de valor $a$ (Es decir, $x_J = a$, para todo $J \in \mathbb{J}$), entonces $x_J \to a$.

3. Pruebe que toda red convergente es de Cauchy.

4. Pruebe que la red $\{s_F\}$, de sumas parciales, es de Cauchy si y solo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $J_0 \in \mathbb{J}$ tal que, $|s_H| < \epsilon$, cuando $H \in \mathbb{J}$ y $H \cap J_0 = \emptyset$.

5. Pruebe que si $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i \in I} b_i$ convergen, entonces $\sum_{i \in I}(a_i + b_i)$ y $\sum_{i \in I} \lambda a_i$ convergen, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, $\sum_{i \in I}(a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$, $\sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i$.

6. Pruebe que si $\sum_{i \in I} |a_i|$ converge, entonces, $\sum_{i \in I} a_i$ converge. Además $|\sum_{i \in I} a_i| \le \sum_{i \in I} |a_i|$. *Ayuda.* $|s_J - s_K| \le |s_J - s_{J \cup K}| + |s_{J \cup K}| = |s_{K \setminus J}| + |s_{J \setminus K}|$.

7. Suponga que $a_i \ge 0$ para todo $i \in I$. Pruebe que si la red $\{s_J\}$ está acotada superiormente, entonces $\sum_{i \in I} a_i$ converge y su suma es $\sup\{\sum_{i \in J} a_i : J \subset I \text{ es finito no vacío}\}$.

8. Supongamos que $I$ es la unión de una familia numerable $\{I_n\}_{n\in J}$, de conjuntos numerables $I_n$, y sea $g : I \to \mathbb{R}$ no negativa. Pruebe que $\sum_{i\in I} g(i) \leq \sum_{n\in J}[\sum_{i\in I_n} g(i)]$. *Ayuda.* Si $F \subset I$ es finito, entonces existe $G \subset J$ finito, tal que $F \subset \cup_{n\in G} I_n$.

9. Suponga que $\sum_{i\in I} |a_i|$ converge y sea $h : I \to I$ una biyección. Pruebe que $\sum_{i\in I} a_{h(i)}$ converge y que tiene la misma suma que $\sum_{i\in I} a_i$.

# Capítulo 5

# Topología de la Recta

**Introducción.**

El concepto básico de este capítulo es el de *conjunto abierto*. A partir de él, se derivan los conceptos de: *conjunto cerrado, punto interior, punto de clausura, punto de acumulación, conjunto denso y conjunto compacto*, los cuales son llamados *conceptos topológicos*, precisamente porque pueden definirse usando solamente la noción de conjunto abierto.

Los resultados más importantes del capítulo son la caracterización de los conjuntos compactos como conjuntos cerrados y acotados, y el teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual asegura que todo subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$, posee un punto de acumulación.

## 5.1. Intervalos

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ definimos:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}; \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}; \quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Estos conjuntos son llamados **intervalos de extremos** $a$ **y** $b$. El primero (resp. último) de ellos se dice **abierto** (resp. **cerrado**). Cuando $a = b$ se tiene $(a,b) = \emptyset$; $[a,b] = \{a\}$ y se les llama **intervalos degenerados**.

Los cuatro intervalos definidos anteriormente, son conjuntos acotados, por lo que también se denominan **intervalos acotados**. La **longitud** de cualquiera de ellos se define como el número $b - a$.

Dado $a \in \mathbb{R}$ definimos:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}; \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}; \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.$$

Estos conjuntos son conocidos como **intervalos no acotados**. El primero (resp. segundo) de ellos también se le dice **la semirrecta izquierda abierta** (resp. **cerrada**) **de extremo** $a$, mientras que para los dos últimos se utiliza una terminología análoga. En fin, alguna veces pondremos

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Los nueve conjuntos, definidos anteriormente, son conocidos bajo el nombre genérico de **intervalos**. Los que se definen usando sólo paréntesis, son llamados **abiertos**.

Sea $I$ un intervalo de $\mathbb{R}$. Es fácil ver que si $x, y \in I$ con $x < y$, entonces $(x, y) \subset I$. Probaremos que esta propiedad caracteriza los intervalos.

**Proposición 5.1.1.** *Sea $I \subset \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \subset I$, para todo $x, y \in I$ con $x < y$. Entonces $I$ es un intervalo.*

**Demostración.** Supongamos primero que $I$ es acotado y pongamos $a = \inf(I)$ y $b = \sup(I)$. Es claro que $I \subset [a, b]$. Probaremos que $(a, b) \subset I$ y en consecuencia $I$ será un intervalo.

Sea $c \in (a, b)$. Por la Proposición 2.6.1, existe $y \in I$ tal que $c < y$ y por la Proposición 2.6.2 existe $x \in I$ tal que $x < c$. Por hipótesis, $(x, y) \subset I$, luego $c \in I$. Esto muestra que $(a, b) \subset I$.

Supongamos ahora que $I$ está acotado superiormente pero que no lo está inferiormente y definamos $a = \sup(I)$. Es claro que $I \subset (-\infty, a]$, por lo cual basta ver que $(-\infty, a) \subset I$. Para ello, sea $c < a$. Igual que antes, existe $y \in I$ tal que $c < y$, pero como $I$ no está acotado inferiormente, existe $x \in I$ tal que $x < c$. Así, $c \in (x, y) \subset I$, y la prueba de este caso es completa.

La prueba de los dos casos restantes será dejada a cargo del lector. ∎

**Proposición 5.1.2.** *La unión de una familia de intervalos con un punto común, es un intervalo.*

**Demostración.** Sea $\{I_p : p \in P\}$ una familia de intervalos indizada por un conjunto $P$ y supongamos que existe $a \in \mathbb{R}$, tal que, $a \in I_p$, para cada $p \in P$. Denotemos por $I$ la unión de esa familia y fijemos $x, y \in I$ con $x < y$. De acuerdo a la proposición anterior bastará ver que $(x, y) \subset I$. Con este fin, fijemos $p, q \in P$ tales que $x \in I_p$ e $y \in I_q$ y consideremos los tres casos que siguen:

i) $y \leq a$**.** En este caso, $(x, y) \subset (x, a) \subset I_p \subset I$.

ii) $a \leq x$**.** En este caso se tiene $(x, y) \subset (a, y) \subset I_q \subset I$.

iii) $x < a < y$**.** En este caso, $(x, y) \subset (x, a] \cup [a, y) \subset I_p \cup I_q \subset I$. ∎

**Ejercicios.**

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Pruebe que $(a, b)$ es el entorno de centro (ver sección 4.2) $(a + b)/2$ y radio $(b - a)/2$.

2. Sea $\{I_p : p \in P\}$ una familia de intervalos y suponga que existe $q \in P$ tal que $I_p \cap I_q \neq \emptyset$, para todo $p \in P$. Pruebe que la unión de los $I_p$ es un intervalo. *Ayuda.* Aplique la proposición 5.1.2 a la familia $\{J_p : p \in P\}$ donde $J_p = I_p \cup I_q$, para cada $p \in P$.

3. Sea $\{I_p : p \in P\}$ una familia de intervalos no degenerados dos a dos disjuntos. Pruebe que $P$ es numerable. *Ayuda.* Muestre que todo intervalo no degenerado contiene un número racional y construya una inyección de $P$ en $\mathbb{Q}$.

4. Sea $A$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Para todo $x \in A$ existe $y \in A$ tal que $x \neq y$ y $(x, y) \subset A$ o $(y, x) \subset A$ (según sea $x < y$ o $y < x$). ¿Es $A$ un intervalo? Justifique su respuesta y compárela con la proposición 5.1.1.

## 5.2. Conjuntos Abiertos

Diremos que $U \subset \mathbb{R}$ es **abierto**, si para cada $x \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$. Este número $\epsilon$ depende en general de $x$.

**Ejemplos:** Es obvio que $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto. También se tiene que $\emptyset$ es abierto, porque no hay ningún $x$ en $\emptyset$ que no verifique la condición anterior. Por otra parte, $\mathbb{Q}$ no es abierto, pues todo intervalo contiene irracionales (proposición 2.5.4). Los intervalos de la forma $[a, b)$ no son abiertos, pues la condición de la defınción de abierto no se cumple para $x = a$.

**Proposición 5.2.1.** *Sea $I$ un intervalo. Entonces $I$ es un intervalo abierto sii $I$ es un conjunto abierto.*

**Demostración.** Sea $I$ un intervalo abierto. Ya que $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son abiertos, debemos considerar los casos $I = (a, b), (-\infty, a), (a, +\infty)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ si $I = (a, b)$.

Supongamos que $I = (a, b)$. Dado $x \in I$ definamos $\epsilon = \text{mín}\{x - a, b - x\}$. Entonces $a \leq x - \epsilon < x + \epsilon \leq b$, de donde $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$. Luego $I$ es abierto. Los otros dos casos serán dejados a cargo del lector.

Sea $I$ un intervalo que satisface la definición de conjunto abierto. Para ver que $I$ es un intervalo abierto, basta mostrar que no puede ser de ninguno de los siguientes: $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, donde $a < b$. Le dejamos al lector la tarea de verificar que en cualquiera de estos casos los extremos acotados del intervalo no satisfacen condición en la definición de conjunto abierto. ∎

**Proposición 5.2.2.** *a) La unión de cualquier familia de abiertos es abierto.*

*b) La intersección de cualquier familia finita de abiertos es abierto.*

**Demostración.** La parte a) será dejada a cargo del lector. Para probar b), mostraremos sólo que la intersección de dos abiertos es abierto, el caso general se hace por inducción en el número de abiertos y lo dejaremos al lector. Sean $U_1, U_2$ abiertos de $\mathbb{R}$ y fijemos $x \in U_1 \cap U_2$. Ya que $x \in U_1$, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $(x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \subset U_1$. Por el mismo argumento, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $(x - \epsilon_2, x + \epsilon_2) \subset U_2$. Sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Es claro que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U_1 \cap U_2$. ∎

**Proposición 5.2.3.** *Todo abierto de $\mathbb{R}$ es la unión de una familia numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos.*

**Demostración.** Sea $U$ un abierto de $\mathbb{R}$ y sea $x \in U$. Entonces la familia $\mathcal{F}_x$, de aquellos intervalos abiertos contenidos en $U$ que contienen a $x$, no es vacía y tienen a $x$ como punto común. De aquí y la Proposición 5.1.2, la unión de los miembros de $\mathcal{F}_x$ es un intervalo $I_x$, que contiene a $x$. Note también que por las Proposiciones 5.2.1 y 5.2.2, $I_x$ es abierto. Es más, $I_x$ es el más grande de los intervalos abiertos contenidos en $U$ y que contienen a $x$.

Sea $x, y \in U$ y supongamos que $I_x \cap I_y \neq \emptyset$. De las Proposiciones 5.1.2, 5.2.1 y 5.2.2, $I_x \cup I_y$ es un intervalo abierto contenido en $U$. Como $x$ (resp. $y$) está en esa unión, se sigue de la maximalidad de $I_x$ (resp. $I_y$) que $I_x \cup I_y \subset I_x$ (resp. $I_x \cup I_y \subset I_y$). De aquí, $I_y \subset I_x$ (resp. $I_x \subset I_y$), lo cual muestra que $I_x = I_y$. En otras palabras, cualesquiera dos elementos de la familia $\{I_x : x \in U\}$ son iguales o disjuntos. Denotemos por $\mathcal{I}$ esa familia de intervalos. Para cada intervalo $I \in \mathcal{I}$ escoja un racional $q_I$ en $I$. Como la familia $\mathcal{I}$ es dos a dos disjunta, entonces la función $I \mapsto q_I$ es inyectiva. Como $\mathbb{Q}$ es numerable entonces $\mathcal{I}$ es numerable (ver proposición 3.4.2). Para concluir, note que $U$ es la unión de los intervalos en $\mathcal{I}$. ■

**Nota:** La proposición anterior por una parte dice que todo conjunto abierto es la unión de una colección numerable de intervalos. Esto se puede mostrar simplemente notando que para todo punto $x$ de un conjunto abierto $U$ existen racionales $r < s$ tales que $r < x < s$ y $(r, s) \subset U$ (justificarlo). Así que la colección de todos los intervalos abiertos con extremos racionales contenidos en $U$ cumple con lo requerido. Esto es, todo conjunto abierto es la unión de intervalos con extremos racionales. Note que una colección infinita de intervalos con extremos racionales es equipotente con una colección de pares ordenados $(s, r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tales que $r < s$ y en consecuencia dicha colección es numerable. Sin embargo, no es cierto que todo conjunto abierto es la unión *disjunta* de intervalos con extremos racionales, por ejemplo, el intervalo $(0, r)$ donde $r$ es cualquier irracional positivo (ver ejercicio 11).

**Proposición 5.2.4.** *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo si y sólo si existen abiertos $U, V$ de $\mathbb{R}$ tales que*

$$U \cap V = \emptyset, \ U \cap A \neq \emptyset, \ V \cap A \neq \emptyset, \ y \ A \subset U \cup V. \tag{2.1}$$

**Demostración.** Si $A$ no es un intervalo entonces, por la Proposición 5.1.1 existen $x < y$ en $A$ y $c \in (x, y)$ tales que $c \notin A$. De aquí, los conjuntos $U = (-\infty, c)$, $V = (c, \infty)$ son abiertos que verifican (2.1).

Supongamos ahora que $U, V$ son abiertos de $\mathbb{R}$ verificando (2.1) y fijemos $a \in U \cap A$ y $b \in A \cap V$. Ya que $U \cap V = \emptyset$, tenemos $a \neq b$, e intercambiando los papeles de $U$ y $V$ si fuera necesario, podemos asumir que $a < b$.

Pongamos $B = \{x \in [a, b] : [a, x] \subset U\}$ y notemos que $a \in B$ y que $b$ es cota superior de $B$. Esto permite definir $c = \sup(B)$. Ya que $U$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset U$ y en consecuencia, $a + r/2 \in B$. Luego, $c > a$.

Sea $d \in [a, c)$. Por la Proposición 2.6.1, existe $z \in B$ tal que $z > d$, y como $[a, z] \subset U$, entonces $d \in U$. Esto prueba que $[a, c) \subset U$. Veamos ahora que $c \notin U$, porque si ese fuera el caso, existiría $\epsilon > 0$ tal que $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset U$ y por lo tanto $[a, c + \epsilon/2] \in U$. Es decir, $c + \epsilon/2 \in B$, lo cual contradice el hecho que $c$ es el supremo de $B$ y muestra que $c \notin U$.

Supongamos que $c \in V$ y fijemos $\rho > 0$ tal que $(c - \rho, c + \rho) \subset V$. Entonces $(c - \rho, c) \cap [a, c) \subset U \cap V = \emptyset$, pero esto es contradictorio porque, al ser $a < c$, se tiene que $(c - \rho, c) \cap [a, c) \neq \emptyset$. Esta contradicción prueba que $c \notin V$; de donde $c < b$. Además, $c \notin U \cup V$, y por lo tanto $c \notin A$. Por la Proposición 5.1.1, $A$ no es un intervalo porque $a, b \in A,\ a < b$ y $c \in (a, b)$. ■

**Ejercicios.**

1. Complete la demostración de la proposición 5.2.2.

2. Sea $U_n = (-1/n, 1/n); n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$ y concluya que la intersección de una familia infinita de abiertos no es necesariamente abierto.

3. Sea $U \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto no vacío. Pruebe que $U \cap \mathbb{Q}$ y $U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ no son vacíos.

4. Pruebe que si $\{U_i : i \in I\}$ es una familia de abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos, entonces $I$ es numerable.

5. Sean $x \in A \subset \mathbb{R}$. Diremos que $x$ **es un punto interior de** $A$ si existe un abierto $U$ de $\mathbb{R}$ tal que $x \in U \subset A$. Denotaremos por $\mathring{A}$ o $int(A)$ el conjunto de los puntos interiores de $A$. Pruebe que

   *a*) $int(A)$ es abierto. Es decir, $x \in int(A)$ si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A$.

   *b*) Cualquier abierto de $\mathbb{R}$, contenido en $A$, está contenido en $int(A)$. Es decir, si $U \subset A$ y $U$ es un abierto, entonces $U \subset int(A)$.

   *c*) Concluya de lo anterior que $int(A)$ es el abierto más grande contenido en $A$. Por ejemplo, muestre que $int([1, 3)) = (1, 3)$.

6. Calcule $int([a, b]), int(\mathbb{Q})$ e $int(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

7. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Pruebe que $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$ y que $int(A \cup B) \subset int(A) \cup int(B)$. Dé un ejemplo donde esta contención sea estricta.

8. Sea $A_n = (-1/n, 1/n); n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $int(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \neq \cap_{n \in \mathbb{N}} int(A_n)$.

9. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que $B \subset A$ **es abierto en** $A$ si para cada $x_0 \in B$ existe $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A \subset B$. Pruebe que $B \subset A$ es abierto en $A$ si y sólo si $B = A \cap U$ para algún abierto $U$ de $\mathbb{R}$.

10. Sea $U \subset \mathbb{R}$. Muestre que las siguientes condiciones son equivalentes

    (a) $U$ es abierto.

    (b) Para todo $x \in U$ y toda sucesión $\{x_n\}$ convergente a $x$, existe $N$ tal que $x_n \in U$ para todo $n > N$.

11. *a*) Muestre que ningún intervalo abierto es igual a la unión disjunta de dos intervalos abiertos (no vacíos).

    *b*) Muestre que ningún intervalo de la forma $(a, b)$ donde $a$ o $b$ es irracional es igual a la unión de una colección numerable y dos a dos disjunta de intervalos abiertos con *extremos racionales*. Explique por qué no hay conflicto entre este ejercicio y la proposición 5.2.3. *Ayuda:* Suponga, sin pérdida de generalidad, que $b$ es irracional. Sea $I_n = (a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, intervalos con extremos racionales y dos a dos disjuntos contenidos en $(a, b)$. Muestre que $b_1 \notin \bigcup_n I_n$.

12. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $r > 0$ cualesquiera. Muestre que el siguiente conjunto es abierto

$$U = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < r \text{ para algún } a \in A\}$$

*Ayuda:* Escriba $U$ como la unión de una colección de intervalos abiertos.

## 5.3. Conjuntos Cerrados y Clausura

En esta sección, $A$ denota un subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que $A$ es **cerrado** si su complementario $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto. Por ejemplo, los intervalos de la forma $[a, b]$ son cerrados.

**Proposición 5.3.1.** *a) $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son cerrados.*

*b) La unión de una familia finita de cerrados es cerrado.*

*c) La intersección de cualquier familia de cerrados es cerrado.*

**Demostración.** Ejercicio.

**Observación:** Note que $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son a la vez abiertos y cerrados. De hecho son los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ con esta propiedad (ver ejercicio 12). Es importante tener presente que un conjunto puede no ser ni abierto ni cerrado, por ejemplo $(1, 5]$.

Diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto de clausura** de $A$ si $U \cap A \neq \emptyset$ para cualquier abierto $U$ de $\mathbb{R}$ que contenga a $x_0$. El conjunto de todos los puntos de clausura de $A$ será denotado $\bar{A}$ y será llamado **la clausura o adherencia de** $A$. Es obvio que $\bar{\emptyset} = \emptyset$ y que $A \subset \bar{A}$. En particular, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

**Ejemplo:** Mostraremos que 2 es un punto de clausura del intervalo $(2, 7]$. En efecto, sea $U$ un abierto cualquiera que contenga a 2. Por definición de conjunto abierto, existe $r > 0$ tal que $(2 - r, 2 + r) \subset U$. Podemos escoger $r$ tal que $2 + r < 7$. Escoja ahora $t$ tal que $2 < t < 2 + r$. Entonces $t \in U \cap (2, 7]$.

**Proposición 5.3.2.** *$\bar{A}$ es cerrado.*

**Demostración.** Mostraremos que $B := \mathbb{R} \setminus \bar{A}$ es abierto. Sea $x_0 \in B$, es decir $x_0 \notin \bar{A}$. Por definición de clausura, existe un abierto $U$ tal que $x_0 \in U$ y $U \cap A = \emptyset$. Por definición de abierto, existe $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset U$. Luego es claro que $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A = \emptyset$. Como $(x_0 - r, x_0 + r)$ es un conjunto abierto, entonces por la definición de clausura tenemos que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset \mathbb{R} \setminus \bar{A}$. Y con esto termina la prueba. ■

**Proposición 5.3.3.** *$A$ es cerrado si y sólo si $A = \bar{A}$.*

**Demostración.** Si $A = \bar{A}$ se tiene, de la proposición anterior, que $A$ es cerrado. Supongamos ahora que $A$ es cerrado. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \neq \mathbb{R}$ (¿por qué?). Fijemos $x \notin A$, entonces $x$ está en el abierto $U := \mathbb{R} \setminus A$ y por tanto existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subset U$. Luego, $(x - r, x + r) \cap A = \emptyset$ y en consecuencia, $x \notin \bar{A}$. Esto muestra que $\mathbb{R} \setminus A \subset \mathbb{R} \setminus \bar{A}$. Por lo tanto, $\bar{A} \subset A$ y como $A \subset \bar{A}$, entonces $\bar{A} = A$. ■

**Proposición 5.3.4.** *a) Si $B \subset \mathbb{R}$ y $A \subset B$ entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$. En particular, si $B$ es cerrado y $A \subset B$, entonces $\bar{A} \subset B$.*

*b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, cualesquiera sean $A, B \subset \mathbb{R}$.*

**Demostración.** a) Suponga que $A \subset B$ y fije $x \in \bar{A}$ y un abierto $U$ que contiene a $x$. Como $U \cap A \neq \emptyset$, entonces $U \cap B \neq \emptyset$. Así $x \in \bar{B}$. La segunda afirmación se sigue de la Proposición 5.3.3.

b) De la relación $A \subset A \cup B$ se tiene $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$. De manera análoga, $\bar{B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$, de modo que $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Por otra parte, de las Proposiciones 5.3.2 y 5.3.1 se tiene que $\bar{A} \cup \bar{B}$ es cerrado y como obviamente, ese cerrado contiene a $A \cup B$, se sigue de la parte a), que $\bar{A} \cup \bar{B} \supset \overline{A \cup B}$. ■

**Ejemplo:** Mostraremos que la clausura de $(2, 7]$ es $[2, 7]$. Es claro que $\mathbb{R} \setminus [2, 7] = (-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$ es abierto, luego $[2, 7]$ es cerrado. Por lo tanto, la proposición 5.3.4 a) nos asegura que $\overline{(2, 7]} \subseteq [2, 7]$. Por otra parte, ya vimos que 2 es un punto de clausura de $(2, 7]$, es decir, $2 \in \overline{(2, 7]}$. Como $(2, 7] \subset \overline{(2, 7]}$, entonces $[2, 7] \subseteq \overline{(2, 7]}$. En conclusión, tenemos que $\overline{(2, 7]} = [2, 7]$.

La Proposición 5.3.2, junto con la parte a) de la proposición anterior, dicen que $\bar{A}$ es el cerrado "más pequeño" (con respecto al orden $\subseteq$) que contiene a $A$. Terminaremos esta sección caracterizando los conjuntos cerrados a través de sucesiones. Para ello establecemos la siguiente definición. Diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ **es un punto límite de** $A$ si existe una sucesión $\{x_n\}$ en $A$ que converge a $x_0$.

**Proposición 5.3.5.** *$x_0 \in \mathbb{R}$ es punto límite de $A$ si y sólo si $x_0 \in \bar{A}$.*

**Demostración.** Sea $x_0$ un punto límite de $A$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión en $A$ que converge a $x_0$. Dado un abierto $U$ de $\mathbb{R}$ que contiene a $x_0$, fijemos $\epsilon > 0$ tal que $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset U$; entonces existe

$N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \epsilon$, para $n > N$. Es decir, $x_n \in A \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$; $n > N$; lo cual prueba que $U \cap A \neq \emptyset$. Es decir, $x_0 \in \bar{A}$.

Supongamos ahora que $x_0 \in \bar{A}$, entonces $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap A \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si fijamos $x_n \in (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap A$, tenemos una sucesión $\{x_n\}$ en $A$ tal que $|x_n - x_0| < 1/n$. En particular, $x_n \to x_0$ y por lo tanto, $x_0$ es un punto límite de $A$. ■

Como corolario a las Proposiciones 5.3.3-5.3.5 se obtiene:

**Corolario 5.3.6.** *$A$ es cerrado si y sólo si $A$ contiene todos sus puntos límite.*

Un subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$ se dice **denso**, si $\bar{A} = \mathbb{R}$. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$ (ver ejercicio 6). Por consiguiente, de la proposición 5.3.5 se tiene que todo real es el límite de una sucesión de racionales.

**Ejercicios.**

1. Demuestre la proposición 5.3.1.

2. Sean $a \leq b$ en $\mathbb{R}$. Pruebe que los intervalos $[a, b], (-\infty, a], [a, \infty)$ son conjuntos cerrados.

3. Pruebe que $\mathbb{Z}$ es cerrado. *Ayuda.* Recuerde que para todo real $r$ existe un entero $m$ (llamado la parte entera de $r$) tal que $m \leq r < m + 1$ (la parte entera está formalmente definida en el ejercicio 4 de la sección 2.4).

4. Pruebe que el conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ no es cerrado.

5. Pruebe que un subconjunto de $\mathbb{R}$ que contiene un sólo elemento es cerrado. Concluya que todo conjunto finito es cerrado.

6. Pruebe que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Calcule además la clausura de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(a, b)$ y $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

7. Pruebe que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, cualesquiera sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Muestre, con un ejemplo, que la contención puede ser estricta.

8. Pruebe que $x_0 \in \bar{A}$ si y sólo si $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

9. Sea $U$ un abierto de $\mathbb{R}$ tal que $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Pruebe que $U \cap A \neq \emptyset$.

10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{1/n\}$. Pruebe que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n$.

11. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina
$$U_n = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < 1/n \text{ para algún } a \in A\}$$

a) Muestre que

$$\bar{A} = \bigcap_n U_n$$

b) Concluya que todo cerrado es igual a una intersección numerable de abiertos y análogamente, que todo abierto es igual a una unión numerable de cerrados. *Ayuda:* Use el ejercicio 12 de la sección 5.2.

12. Pruebe que si $A \neq \emptyset$ es abierto y cerrado entonces $A = \mathbb{R}$. *Ayuda:* Suponga que $x \notin A$ y $z \in A$. Sin perdida de generalidad suponga que $z < x$. Sea $B = \{y \in \mathbb{R} : y < x, [y, x] \cap A = \emptyset\}$. $B$ es acotado inferiormente. Sea $a = \inf B$. Muestre que se llega a una contradicción ya sea que $a \in A$ o que $a \notin A$.

13. Sea $A \neq \emptyset$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, defina **la distancia de $x_0$ a $A$** mediante, $d(x_0, A) := \inf\{|x - x_0| : x \in A\}$.

   a) Muestre que si $x_0 \in A$, entonces $d(x_0, A) = 0$.

   b) Pruebe que si $A$ es cerrado y $d(x_0, A) = 0$, entonces $x_0 \in A$.

   c) Suponga que $A$ no es vacío y es acotado superiormente. Pruebe que $d(\sup(A), A) = 0$. Concluya que $d(1, [0, 1)) = 0$.

14. En el ejercicio 9 de la sección 5.2 introdujimos el concepto de abierto relativo a un conjunto, ahora haremos lo correspondiente con el concepto de cerrado. Sean $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que $B$ es **cerrado en** $A$ is $A \setminus B$ es abierto en $A$. Muestre que $B$ es cerrado en $A$ si dada una sucesión $\{x_n\}$ en $B$ convergente a un punto $x$ en $A$, entonces $x$ pertenece a $B$.

15. Sea $U$ y $V$ subconjuntos densos de $\mathbb{R}$. Suponga que uno de ellos es abierto y muestre que $U \cap V$ es denso en $\mathbb{R}$. ¿Será cierto el resultado para conjuntos densos cualesquiera?

16. Muestre que si $A$ es numerable, entonces $\mathbb{R} \setminus A$ es denso. *Ayuda:* Use que todo intervalo no degenerado no es numerable (ver ejercicio 10 de la sección 4.11).

## 5.4. Puntos de Acumulación

Al igual que en la sección precedente, $A$ denota un subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es **un punto de acumulación de** $A$, si $U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, para cada abierto $U$ de $\mathbb{R}$, que contenga a $x_0$. Es obvio que todo punto de acumulación de $A$ es punto de clausura de $A$. Un punto $x_0 \in A$ se dice **aislado en** $A$ si existe un abierto $U$ de $\mathbb{R}$, conteniendo $x_0$, tal que $U \cap A = \{x_0\}$.

**Ejemplo:** Considere el conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene que 0 es un punto de acumulación de $A$ y de hecho es el único. Note que todo elemento de $A$ es un punto de clausura de $A$ pero no es de acumulación, pues todo los elementos de $A$ son aislados en $A$.

Ya vimos que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente (Corolario 4.6.3). El siguiente teorema generaliza este resultado a conjuntos infinitos y acotados.

**Teorema 5.4.1.** *(Bolzano-Weierstrass) Todo subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$ posee un punto de acumulación.*

**Demostración.** Daremos dos argumentos diferentes para mostrar el teorema. Sea $A$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ infinito y acotado.

*Primera versión:* Como $A$ es infinito, entonces existe una función $f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva. Considere la sucesión dada por $f$, es decir, $x_n = f(n)$. Por el Corolario 4.6.3 sabemos que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ convergente a un punto $a$. Para ver que $a$ es un punto de acumulación de $A$, sea $U$ un abierto que contenga a $a$. Luego existe $N$ tal que $x_{n_k} \in U$ para todo $k \geq N$. Por ser $f$ inyectiva, tenemos que $x_{n_k} \neq a$ para todo $k$ excepto para a lo sumo un valor de $k$. En particular, como el rango de $f$ está contenido en $A$, se tiene que $U \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Y esto termina la prueba.

*Segunda versión:* Dado un intervalo $J = [c, d]$, definimos su **punto medio** como $z = (c + d)/2$ y cada uno de los intervalos $[c, z], [z, d]$ será llamado **una mitad de** $J$. Si $A \cap J$ es infinito y $J_1, J_2$ son las dos mitades de $J$ entonces $A \cap J_i$ es infinito para algún $i = 1, 2$; pués en caso contrario, $A \cap J = (A \cap J_1) \cup (A \cap J_2)$ sería finito al ser la unión de dos conjuntos finito (ver proposición 3.3.3).

Definamos $a = \inf(A)$, $b = \sup(A)$ e $I = [a, b]$. Es claro que $A \subset I$. Sea $I_1$ una mitad de $I$ tal que $I_1 \cap A$ es infinito. Sea $I_2$ una mitad de $I_1$ tal que $A \cap I_2$ es infinito. “Prosiguiendo de esta manera”, se construye una familia de intervalos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con las siguientes propiedades:

(i) $I_{n+1}$ es una mitad de $I_n$.

(ii) $I_n \cap A$ es infinito.

En particular de (i) se tiene que cada $I_n$ es un intervalo cerrado, digamos que $I_n = [a_n, b_n]$. Observemos que de (i) también se tiene que $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$ y aplicando inducción se muestra que $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. De aquí, $b_n - a_n \to 0$.

Por el teorema de los intervalos encajados (3.5.1) se tiene que existe $x_0 \in \bigcap_n I_n$. Mostraremos que $x_0$ es un punto de acumulación de $A$. Para ello, fijemos un abierto $U$ que contiene a $x_0$. Debemos mostrar que $U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Por definición de conjunto abierto, sabemos que existe $r > 0$ tal $(x_0 - r, x_0 + r) \subset U$. Es claro que es suficiente mostrar que $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A$ es infinito. Como $b_n - a_n \to 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_N - a_N < r$. Como $x_0 \in [a_N, b_N]$, entonces $[a_N, b_N] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$. En consecuencia, $I_N \cap A \subset (x_0 - r, x_0 + r) \cap A$. De (ii) concluimos que $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A$ es infinito. ■

**Nota**. La oración “Prosiguiendo de esta manera”, en la segunda versión de la prueba de 5.4.1, es imprecisa y, aunque de uso corriente, consideramos saludable dar una versión matemáticamente correcta de lo que ella significa. Para ello sea $\mathcal{J}$ el conjunto de todos aquellos intervalos cerrados $J \subset I$ tales que $A \cap J$ es infinito. Obviamente, $I \in \mathcal{J}$. Dado $J \in \mathcal{J}$, denotemos por $f(J)$ una de las mitades de $J$ tal que $f(J) \cap A$ es infinito. Se tiene así una aplicación $f : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$. Por el Teorema 3.1.1, existe una aplicación $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{J}$ tal que $\phi(1) = I$ y $\phi(n+1) = f(\phi(n))$. Los intervalos $I_n$ "construídos" en la prueba anterior pueden ahora definirse de manera precisa poniendo $I_n = \phi(n+1)$.

**Ejercicios**.

1. Pruebe que todo punto de clausura de $A$ que no es punto de acumulación de $A$ es un punto aislado de $A$.

2. Use la Proposición 5.3.3 para probar que $A$ es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.

3. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   i) $x_0 \in \mathbb{R}$ es punto de acumulación de $A$.

   ii) $(A \setminus \{x_0\}) \cap (x_0 - r, x_0 + r) \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

   iii) $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A$ es infinito para cada $r > 0$.

   iv) Existe una sucesión $\{x_n\}$ en $A \setminus \{x_0\}$ que converge a $x_0$.

4. Pruebe que si todos los puntos de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ son aislados en $A$, entonces $A$ es numerable. *Ayuda:* Muestre que existen intervalos abiertos, dos a dos disjuntos, cada uno conteniendo un sólo punto de $A$ y cuya unión es $A$. Para hacerlo, defina, para cada $a \in A$, $s_a = \inf\{|x - a| : x \in A \setminus \{a\}\}$ (se puede suponer que $A$ contiene al menos dos elementos). Muestre que $s_a > 0$ y ponga $r_a := s_a/2$. Muestre ahora que $(a - r_a, a + r_a) \cap (b - r_b, b + r_b) = \emptyset$, si $a, b \in A$, $a \neq b$. (Vea el ejercicio 13 de la sección 5.3 para entender mejor el significado de los números $s_a$).

5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ el rango de la sucesión.

   *a*) Recuerde la definición de $\bar{x}_n$ y $\underline{x}_n$ dada en la sección 4.7. Suponga que $a$ es un punto de acumulación de $A$ y muestre que $\underline{x}_n \leq a \leq \bar{x}_n$ para todo $n$ y que
   $$\liminf x_n \leq a \leq \limsup x_n$$

   *b*) Determine bajo que condiciones $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$ son puntos de acumulación de $A$.

   *c*) De un ejemplo de una sucesión acotada $\{x_n\}$ tal que su rango no tenga puntos de acumulación y calcule $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$.

   *d*) Sea $\{x_n\}$ una enumeración de los racionales en $[0, 1]$. Calcule $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$. ¿Cuáles son los puntos de acumulación del rango de $\{x_n\}$?

## 5.5. Conjuntos Compactos

En esta sección, $K$ denota un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i\in I}$ denota una familia de abiertos de $\mathbb{R}$ indizada por algún conjunto $I$.

Diremos que $\mathcal{U}$ es un **cubrimiento abierto** de $K$, si la unión $\cup_{i\in I} U_i$ contiene a $K$. Si para algún subconjunto $J$ de $I$ se tiene que $\{U_i\}_{i\in J}$ es un cubrimiento de $K$, diremos que $\{U_i\}_{i\in J}$ es **un subcubrimiento de** $K$ **extraído de** $\mathcal{U}$, el cual se dirá **finito** si el conjunto $\{U_i : i \in J\}$ es finito. Diremos que $K$ **es compacto**, si todo cubrimiento abierto de $K$ posee un subcubrimiento finito extraído de $\mathcal{U}$.

Esta definición es bastante abstracta y esto obedece al hecho de estar enunciada utilizando únicamente la noción de conjunto abierto. Sin embargo, uno de los propósitos principales de la sección es caracterizar los conjuntos compactos de una manera simple; a saber como aquellos que son a la vez cerrados y acotados.

**Ejemplos:**

(i) Considere el conjunto $A = (1, 3)$ y el cubrimiento $\mathcal{U}$ de $A$ formado por los conjuntos

$$(1 + 1/n, 3 - 1/n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\mathcal{U}$ no admite un subcubrimiento finito (verificarlo). Luego $A$ no es compacto. Los conjuntos compactos mas sencillos son los conjuntos finitos (ver ejercicios).

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ positivo sea

$$V_n = \left(-1, \frac{n}{n+1}\right)$$

y sea $\mathcal{U}$ la siguiente colección de abiertos:

$$\mathcal{U} = \{V_n :\ n \geq 1\} \cup \{(98/99,\ 2)\}$$

Es fácil verificar que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de $[0, 1]$. El lector verificará que el siguiente subconjunto de $\mathcal{U}$ es un subcubrimiento finito de $[0, 1]$:

$$\{V_n :\ 1 \leq n \leq 99\} \cup \{(98/99,\ 2)\}$$

¿Puede el lector conseguir un subcubrimiento finito que contenga sólo dos conjuntos?

**Teorema 5.5.1.** *Todo intervalo $[a, b]$, con $a < b$ en $\mathbb{R}$, es compacto.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $[a, b]$ y definamos $A$ como el conjunto de aquellos $x \in [a, b]$, tales que, $[a, x]$ admite un subcubrimiento finito extraído de $\mathcal{U}$. Para completar la demostración bastaría probar que $b \in A$. Para lo cual comenzamos notando que $a \in A$ y $A$ es acotado. Esto permite definir $c = \sup(A)$.

*Afirmación.* $c = b$. En efecto, es claro que $c \leq b$. Razonaremos indirectamente. Supongamos $c < b$ y escojamos $U \in \mathcal{U}$ tal que $c \in U$. Ahora escojamos $r > 0$ tal que $(c - r, c + r) \subset U$ y fijemos $x \in A$ tal que $c - r < x$ (recuerde que $c$ es el supremo de $A$). En fin, fijemos $y \in (c, c + r) \cap (c, b)$ y notemos que $[x, y] \subset U$ y por lo tanto $[a, y]$ admite un subcubrimiento finito extraído de $\mathcal{U}$ (note que $[a, y] = [a, x] \cup [x, y]$). Luego, $y \in A$, pero esto es una contradicción (porque $y > c = \sup(A)$), lo cual prueba la afirmación.

Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $b \in U$ y sea $r > 0$ tal que $(b - r, b + r) \subset U$. Por la afirmación, $b = \sup(A)$ y en consecuencia existe $x \in A$ tal que $b - r < x$. De aquí, $[a, b]$ admite un subcubrimiento finito extraído de $\mathcal{U}$, porque $[a, b] = [a, x] \cup [x, b]$ y $[x, b] \subset U$. ■

**Proposición 5.5.2.** *Todo compacto es cerrado y acotado.*

**Demostración.** Sea $K$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es arquimediano (ver proposición 2.5.2), se tiene que $\{U_n := (-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento de $\mathbb{R}$ y por tanto de $K$. Como $K$ es compacto y $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset U_N$ y en consecuencia, $K$ es acotado.

Supongamos ahora que $K$ no es cerrado, entonces $\mathbb{R} \setminus K$ no es abierto y así existe $x_0 \in \mathbb{R} \setminus K$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r)$ no está contenido en $\mathbb{R} \setminus K$, para ningún $r > 0$. En particular,

$$(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap K \neq \emptyset \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $V_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > 1/n\}$. El lector probará que $V_n$ es abierto y que la unión de los $V_n$ es $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. De aquí, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de $K$, porque $x_0 \notin K$. Como $V_1 \subset V_2 \subset \cdots$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset V_N$ y en consecuencia, $[x_0 - 1/N, x_0 + 1/N] \cap K = \emptyset$. Esto contradice (5.1) y termina la prueba. ■

**Proposición 5.5.3.** *Si $K$ es compacto y $A \subset K$ es cerrado, entonces $A$ es compacto.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $A$. Entonces $\mathcal{U} \cup \{\mathbb{R} \setminus A\}$ es un cubrimiento abierto de $K$ y en consecuencia existe un subconjunto finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V} \cup \{\mathbb{R} \setminus A\}$ es un cubrimiento de $K$. De aquí (justificar) $\mathcal{V}$ es un cubrimiento finito de $A$. ■

**Teorema 5.5.4.** *(Heine-Borel) Un subconjunto $K$ de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si $K$ es cerrado y acotado.*

**Demostración.** La primera mitad del teorema fué probada en la Proposición 5.5.2. Supongamos ahora que $K$ es cerrado y acotado y pongamos $a = \inf(K), b = \sup(K)$. Entonces $K$ es un subconjunto cerrado del compacto $[a, b]$ y el resultado se sigue de la Proposición 5.5.3. ■

El siguiente teorema caracteriza los subconjuntos compactos de la recta en términos de sucesiones convergentes. Este resultado es sumamente útil, pues no hace referencia al concepto mas complejo de cubrimiento por abiertos.

**Teorema 5.5.5.** *$K$ es compacto si y sólo si toda sucesión en $K$ posee una subsucesión convergente a un punto de $K$.*

**Demostración.** Supongamos primero que $K$ es compacto y fijemos una sucesión $\{x_n\}$ en $K$. Como $K$ es acotado (proposición 5.5.2), entonces $\{x_n\}$ también lo es. Del Corolario 4.6.3, esa sucesión posee una subsucesión $\{x_{h(k)}\}$ que converge a un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, $x_0$ es un punto límite de $K$. Por ser $K$ cerrado, $x_0 \in K$ (proposición 5.5.2 y corolario 5.3.6).

Ahora mostraremos el recíproco. Sea $K$ un conjunto como en la hipótesis. Por el teorema de Heine-Borel (5.5.4) basta mostrar que $K$ es cerrado y acotado. Para ver que $K$ es cerrado, sea $\{x_n\}$ una sucesión en $K$ que converge a $x \in \mathbb{R}$. Por hipótesis, $\{x_n\}$ posee una subsucesión $\{x_{h(k)}\}$ que converge a un punto $z \in K$. Pero por la Proposición 4.6.1, $x_{h(k)} \to x$ y así $x = z \in K$. Es decir, $K$ contiene todos sus puntos límite, luego $K$ es cerrado (Corolario 5.3.6).

Para terminar, supongamos que $K$ no es acotado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $|x_n| > n$. Por otro lado, la sucesión $\{x_n\}$ posee una subsucesión convergente, en particular, posee una subsucesión acotada $\{x_{h(k)}\}$. Pero $|x_{h(k)}| > h(k) \geq k$; $k \in \mathbb{N}$; y esta contradicción termina la demostración. ■

**Ejercicios.**

1. Pruebe que la unión de una familia finita de compactos es compacto. Concluya que todo conjunto finito de $\mathbb{R}$ es compacto.

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de $\mathbb{R}$ convergente a $z \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ es compacto. Es muy ilustrativo resolver este ejercicio usando las tres maneras de verificar compacidad vistas hasta ahora: por definición, usando el teorema de Heine-Borel o el teorema 5.5.5.

3. Sean $A$ y $B$ subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ y $C$ un subconjunto compacto.

   *a*) Muestre que $A + C = \{a + c : \ a \in A, c \in C\}$ es cerrado. *Ayuda:* Sea $a_n + c_n \to x$. Para mostrar que $x \in A + C$, use una subsucesión de $\{c_n\}$ convergente.

   *b*) Muestre que $A + B$ no es necesariamente cerrado. *Ayuda:* Considere por ejemplo $A = \mathbb{N}$ y $B = \{-n + 1/n : \ n = 2, 3, \cdots\}$.

   *c*) ¿Es cierto que si $A$ y $B$ son compactos, entonces $A + B$ es compacto?

4. Sea $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$, una familia decreciente de compactos no vacíos. Pruebe que $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ no es vacío.

5. Sea $K$ un conjunto compacto, muestre que $\sup K$ e $\inf K$ pertenecen a $K$.

6. Dé otra prueba del Teorema 5.5.1 como sigue. Suponga que existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de $I_0 := [a, b]$ del cual no es posible extraer un subcubrimiento finito y construya una familia de

intervalos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, contenidos en $[a, b]$, tal que $I_n$ es una mitad de $I_{n-1}$ (como en la demostración del teorema 5.4.1) que no posee un subcubrimiento finito extraído de $\mathcal{U}$. Sea $x_0$ como en la prueba del Teorema 5.4.1 y sea $U \in \mathcal{U}$ conteniendo a $x_0$. Pruebe que $I_N \subset U$ para algún $N \in \mathbb{N}$.

## 5.6. Los subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$

La siguiente serie de problemas tiene por objeto clasificar los subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$.

Por **un subgrupo aditivo de** $\mathbb{R}$ (ó **subgrupo de** $(\mathbb{R}, +)$) entendemos un subconjunto no vacío $G$ de $\mathbb{R}$ tal que $b - a \in G$ si $a, b \in G$. En los problemas que siguen, $G$ denota un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ tal que $G \neq \{0\}$.

1. Pruebe que $\{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, y $\mathbb{R}$ son subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$.

2. Pruebe que $0 \in G$ y que $-x \in G$, si $x \in G$. Concluya que $(G, +)$ es un grupo y que $G_+ := \{x \in G : x > 0\}$ no es vacío.

3. Pruebe que si $a \in G$, entonces $a\mathbb{Z} \subset G$. *Ayuda.* Use inducción para mostrar que $a\mathbb{N} \subset G$.

   En los problemas que siguen, $a$ denota el ínfimo de $G_+$. Es decir, $a = \inf(G_+)$. De la definición de $G_+$ se tiene $a \geq 0$.

4. Pruebe que si $a > 0$, entonces $a \in G$. *Ayuda.* Por definición de ínfimo, existe $x \in G_+$ tal que $a \leq x < 2a$. Asuma $a < x$ y vuelva a aplicar la definición de ínfimo.

5. Pruebe que si $a > 0$, entonces $G = a\mathbb{Z}$. *Ayuda.* Aplique el ejercicio 6 de la sección 2.4.

6. Pruebe que si $a = 0$, entonces $G$ es denso en $\mathbb{R}$. *Ayuda.* Suponga primero que $x > 0$ y fije $\epsilon > 0$. Muestre que existe $y \in G$ tal que $|x - y| < \epsilon$. Ya que $a = 0$, se sigue de las propiedades del ínfimo, la existencia de $x_0 \in G_+$ tal que $x_0 < \epsilon$. Aplique ahora el ejercicio 6 de la sección 2.4 con $b = x_0$.

7. Pruebe que el conjunto $G := \{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$. Concluya que $A := \{\frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}, m < 2^n\}$ es un subconjunto denso en $(0, 1)$. Esto significa que: para cada $x \in (0, 1)$ y cada $\epsilon > 0$ existe $y \in A$ tal que $|x - y| < \epsilon$.

8. Sea $G$ un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$. Pruebe que si $int(G) \neq \emptyset$, entonces $G = \mathbb{R}$.

9. En este ejercicio trabajaremos con la estructura multiplicativa de $\mathbb{R}$. Sea $H \subset (0, +\infty)$. Suponga que si $x, y \in H$, entonces $x/y \in H$. Muestre que si $int(H) \neq \emptyset$ entonces $H = (0, +\infty)$.

# Capítulo 6

# Límites y Continuidad

**Introducción.** En este capítulo introducimos el concepto más importante de este libro; a saber, el concepto de límite, el cual es usado explícitamente en el tema de derivadas e implícitamente, en el tema de integración. La mayor parte del capítulo es dedicado al estudio de las funciones continuas y de las funciones monótonas. El estudio de las funciones continuas y estrictamente monótonas, nos conducen a la construcción de las funciones exponenciales ($f(x) = a^x$) y logarítmicas ($f(x) = log_a x$).

## 6.1. Límites

En este capítulo, salvo mención contraria, $A$ denotará un subconjunto de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ será un punto de acumulación de $A$ y $f : A \to \mathbb{R}$ indicará una función. Diremos que $f(x)$ **tiene límite cuando** $x$ **tiende a** $x_0$, si existe un número real $\lambda$ con la siguiente propiedad: Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$\text{si } \ 0 < |x - x_0| < \delta \text{ y } x \in A, \text{ entonces } |f(x) - \lambda| < \epsilon. \tag{1.1}$$

En este caso se escribe,

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{ó} \quad f(x) \to \lambda, \quad \text{cuando} \quad x \to x_0.$$

El primer símbolo se lee: "$\lambda$ es el límite de $f(x)$, cuando $x$ tiende a $x_0$", mientras que el segundo se lee, "$f(x)$ tiende a $\lambda$, cuando $x$ tiende a $x_0$". La definición precedente dice que dado un entorno de $\lambda$ de radio $\epsilon$, existe un entorno de $x_0$ de radio $\delta$ (que depende de $\epsilon$) tal que $f(x) \in (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$ si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + d) \cap A$ y $x \neq x_0$. Es decir, $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\})) \subset (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$. Informalmente hablando, esta definición dice que $f(x)$ está "cerca" de $\lambda$, si $x$ está cerca de $x_0$ y $x \neq x_0$. El hecho que $x_0$ es punto de acumulación asegura que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, de modo que la definición de límite "no es trivial". Por otra parte, es irrelevante que $x_0$ pertenezca o no al dominio de $f$. Estos dos comentarios se aclararán con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo:** Sea $A = [0, 1] \cup \{2\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ cualquier función. El lector interesado comprobará que dado $\epsilon > 0$ la condición (1.1) es válida para $x_0 = 2$, $\delta = 1/2$ y cualquiera $\lambda$!. En otras palabras, el hecho que 2 no es un punto de acumulación del dominio de la función hace que el concepto de límite (en ese punto) no tenga ninguna utilidad.

Por otra parte si $A = [0, 2)$ y $f(x) = x^2$, entonces el límite de $f$ cuando $x$ tiende a 2 es igual a 4. Note que es irrelevante que 2 no pertenezca al dominio de $f$. En otras palabras, podemos agregar 2 al dominio de la función y definirla en 2 como queramos y todavía obtener que el límite de $f$ cuando $x$ tiende a 2 es igual a 4.

La siguiente proposición muestra que el concepto de límite puede expresarse en términos de la convergencia de ciertas sucesiones y es, por consiguiente, un concepto topológico.

**Proposición 6.1.1.** *$f(x) \to \lambda$, cuando $x \to x_0$, si y sólo si, $f(x_n) \to \lambda$ para cada sucesión $\{x_n\}$ de $A \setminus \{x_0\}$ que converge a $x_0$.*

**Demostración.** $\Rightarrow$). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de $A \setminus \{x_0\}$ que converge a $x_0$ y fijemos $\epsilon > 0$. Por definición de límite de una función, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ y } x \in A, \tag{1.2}$$

y por definición de límite de una sucesión existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_0| < \delta \text{ si } n > N. \tag{1.3}$$

Por otra parte, $x_n \neq x_0$, lo cual permite aplicar (1.2)-(1.3) para concluir que

$$|f(x_n) - \lambda| < \epsilon \text{ si } n > N.$$

Esto prueba que $\{f(x_n)\}$ converge a $\lambda$.

$\Leftarrow$). Supongamos por el absurdo que $f(x)$ no tiende a $\lambda$, cuando $x \to x_0$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\})$ no está contenido en $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$, para ningún $\delta > 0$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap (A \setminus \{x_0\})$ tal que $f(x_n) \notin (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$. De esta forma queda construída una sucesión $\{x_n\}$ en $A \setminus \{x_0\}$ tal que $|x_n - x_0| < 1/n$ y $|f(x_n) - \lambda| \geq \epsilon$. Es decir, $x_n \to x_0$ pero $\{f(x_n)\}$ no converge a $\lambda$. Esta contradicción termina la demostración. ■

**Observación:** Es importante que el lector ponga atención a la estructura lógica de la implicación ($\Leftarrow$) en la demostración anterior. Observe que se hizo de manera indirecta. La contradicción se obtuvo *construyendo* una sucesión $\{x_n\}$ que converge a $x_0$ pero que $\{f(x_n)\}$ no converge a $\lambda$.

**Ejemplos:**

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por partes de la manera siguiente: $f(x) = 0$ si $x$ es racional y $f(x) = 1$ si $x$ es irracional. Sea $x_0$ un real cualquiera. Mostraremos que $f$ no tiene

límite en $x_0$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ existe una sucesión $x_n \in \mathbb{Q}$ con $x_n \neq x_0$ para todo $n$ y tal que $x_n \to x_0$. Note que $f(x_n) \to 0$, de hecho $f(x_n)$ es una sucesión contante igual a 0. De igual forma, como los irracionales también son densos en $\mathbb{R}$, existe una sucesión $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $y_n \neq x_0$ para todo $n$ y tal que $y_n \to x_0$. Note que $f(y_n) \to 1$. Usando la proposición 6.1.1 concluimos que $f$ no tiene límite en $x_0$.

2. Considere ahora la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por partes de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{, si } x \text{ es racional} \\ x^2 & \text{, si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Se tiene que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. En efecto, sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a 2. Es claro que si $\{x_n\}$ estuviera formada sólo por racionales o sólo por irracionales, entonces $f(x_n) \to 4$. Dejamos la tarea al lector (ver ejercicio 5) de mostrar que esto garantiza que $f(x_n)$ es convergente. ¿En que otro punto existe el límite?

3. Considere ahora la función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por partes de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{, si } x = p/q \text{ donde } p < q \text{ son enteros positivos y sin divisores comunes.} \\ 0 & \text{, si } x \text{ es irracional y } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Sea $x_0 \in (0,1)$ cualquiera. Mostraremos que $f$ tiende a 0 en $x_0$. Sea $\varepsilon > 0$ y escoja $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$. Sea $B$ el conjunto de todos los racionales de la forma $p/q$ con $0 < p < q$ y $q \leq n$. Note que $B$ es finito. Observe ahora que si $x$ es racional y $x \notin B$, entonces $0 < f(x) < 1/n$. Como $B$ es finito, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x_0 - x| < \delta$, entonces $x \notin B$. De aquí se puede fácilmente deducir que si $0 < |x_0 - x| < \delta$, entonces $|f(x)| < 1/n$.

Los cuatro resultados enunciados a continuación pueden probarse usando los mismos argumentos de las secciones 4.1, 4.2 y 4.3 o utilizando la Proposición 6.1.1 y los correspondientes resultados del capítulo 4.

**Proposición 6.1.2.** *Si $f(x) \to \lambda$ y $f(x) \to \mu$ cuando $x \to x_0$, entonces $\lambda = \mu$.*

Dadas funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se definen funciones $f+g, cf, f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ mediante $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$; $(cf)(x) = cf(x)$; $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Si además, $g(x) \neq 0; x \in A$; se define $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

**Proposición 6.1.3.** *Sean $f, g, c$ como antes y supongamos que $f(x) \to \lambda$ y $g(x) \to \mu$, cuando $x \to x_0$. Entonces $f(x) + g(x) \to \lambda + \mu$, $cf(x) \to c\lambda$ y $f(x)g(x) \to \lambda\mu$, cuando $x \to x_0$. Si además, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$ y $\mu \neq 0$, entonces $f(x)/g(x) \to \lambda/\mu$, cuando $x \to x_0$.*

**Proposición 6.1.4.** *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ tales que $f \leq g$ (lo que por definición significa que $f(x) \leq g(x); x \in A$). Si $f(x) \to \lambda$ y $g(x) \to \mu$, cuando $x \to x_0$, entonces $\lambda \leq \mu$.*

**Proposición 6.1.5.** *Sean $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f \leq g \leq h$. Si $f(x) \to \lambda$ y $h(x) \to \lambda$ cuando $x \to x_0$, entonces $g(x) \to \lambda$ cuando $x \to x_0$.*

Definiremos ahora el concepto de límite lateral. Para ello necesitamos el siguiente concepto: Diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es **un punto de acumulación a derecha** (resp. **izquierda**) de $A$ si $(x_0, x_0 + \epsilon) \cap A$ (resp. $(x_0 - \epsilon, x_0) \cap A$) no es vacío, para ningún $\epsilon > 0$.

**Ejemplo**. Todo punto de $\mathbb{Q}$ es a la vez punto de acumulación a derecha e izquierda de $\mathbb{Q}$. Si $I$ es un intervalo no degenerado, entonces todo punto de $int(I)$ es punto de acumulación a derecha e izquierda de $I$. Por otra parte, si $a$ es el extremo izquierdo de $I$, entonces $a$ es un punto de acumulación a derecha de $I$.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación a derecha (resp. *izquierda*) de $A$. Diremos que $f(x)$ **tiene límite, cuando $x$ tiende a $x_0$ por la derecha** (resp. *izquierda*), si existe un número real $\lambda$ con la siguiente propiedad:

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \text{ si } 0 < x - x_0 < \delta \text{ (resp. } -\delta < x - x_0 < 0) \text{ y } x \in A.$$

En este caso también se dice que $f(x)$ *tiende a $\lambda$, cuando $x$ tiende a $x_0$ por la derecha* (resp. *izquierda*), o que $\lambda$ *es el límite de $f(x)$, cuando $x$ tiende a $x_0$ por la derecha* (resp. *izquierda*). Para denotar esta situación, se utilizan los siguientes símbolos:

$$\begin{array}{ll}
\lambda = \lim_{x\to x_0^+} f(x) & (resp.\ \lambda = \lim_{x\to x_0^-} f(x)). \\
f(x) \to \lambda, \text{ cuando } x \to x_0^+ & (resp.\ x \to x_0^-). \\
\lambda = f(x_0+) & (resp.\ \lambda = f(x_0-)).
\end{array}$$

**Proposición 6.1.6.** *Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación a derecha e izquierda de $A$. Entonces $f(x)$ tiene límite $\lambda$, cuando $x \to x_0$ si y sólo si existen los límites laterales $f(x_0+), f(x_0-)$ y $f(x_0+) = f(x_0-)$. En ambos casos, $\lambda = f(x_0+) = f(x_0-)$.*

**Demostración.** Ejercicio.

Terminaremos esta sección definiendo los conceptos de límites al infinito y límites infinitos. Para lo primero, necesitamos suponer que $A$ no está acotado superiormente (resp. inferiormente). En este caso decimos que $f(x)$ **tiene límite $\lambda$, cuando $x$ tiende a** $+\infty$ (resp. $-\infty$), si para cada $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que,

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \text{ si } x > M \text{ (resp. } x < -M) \text{ y } x \in A.$$

Esta situación suele expresarse a través de algunos de los siguientes símbolos:

$$\begin{array}{ll}
\lambda = \lim_{x\to+\infty} f(x) & (resp.\ \lambda = \lim_{x\to-\infty} f(x)). \\
f(x) \to \lambda \text{ cuando, } x \to +\infty & (resp.\ x \to -\infty). \\
\lambda = f(+\infty) & (resp.\ \lambda = f(-\infty)).
\end{array}$$

Sea $x_0$ un punto de acumulación de $A$. Diremos que $f(x)$ **tiende a más infinito** (resp. **menos infinito**), **cuando** $x$ **tiende a** $x_0$, si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$f(x) > M \quad (resp.\ f(x) < -M) \ \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ y } x \in A.$$

En este caso escribimos:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty & (resp.\ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty) \\ f(x) \to +\infty & (resp.\ f(x) \to -\infty) \ \text{ cuando, } \ x \to x_0. \end{array}$$

Dejaremos a cuidado del lector definir los conceptos de límites laterales infinitos.

**Ejercicios.**

1. En cada uno de los siguientes ejercicios pruebe usando la definición $\epsilon$-$\delta$ que el límite de $f$ cuando $x$ tiende a $a$ es $\lambda$.

   *a*) $f(x) = x^4$, $\lambda = a^4$.

   *b*) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $\lambda = 1$.

   *c*) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$, $a = 1$, $\lambda = 2$.

   *d*) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$, $\lambda = 0$.

   *e*) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $\lambda = 1$.

2. Pruebe las proposiciones 6.1.2-6.1.5.

3. Suponga que las funciones $f$ y $g$ tienen la siguiente propiedad. Para todo $\epsilon > 0$ y todo $x$,

   si $0 < |x - 2| < \epsilon/2$, entonces $|f(x) - 2| < \epsilon$,

   si $0 < |x - 2| < \epsilon^2$, entonces $|g(x) - 4| < \epsilon$.

   Para cada $\epsilon > 0$ halle un $\delta > 0$ tal que para todo $x$,

   si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x)g(x) - 8| < \epsilon$.

   *Ayuda:* Note que $f(x)g(x) - 8 = [f(x) - 2]g(x) + 2[g(x) - 4]$.

4. Halle un ejemplo de una función $f : A \to \mathbb{R}$ tal que para algún punto de acumulación $x_0$ de $A$ exista una sucesión $\{x_n\}$ convergente a $x_0$ pero que $f(x_n)$ no sea convergente. ¿Qué tiene esto que ver con la demostración de la proposición 6.1.1?.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in \mathbb{R}$. Suponga que para todo par de sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ con $x_n \in \mathbb{Q}$ y $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ambas convergiendo a $x_0$ se cumple que $f(x_n)$ y $f(y_n)$ convergen al mismo valor $\lambda$. Muestre que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$. *Ayuda:* Vea el ejercicio 6 de la sección 4.6.

6. Suponga que $f(x) \to \lambda$ cuando $x \to x_0$ y sea $\phi : T \to A \setminus \{x_0\}$ una función definida en un subconjunto $T$ de $\mathbb{R}$, tal que $t_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de $T$ y $\phi(t) \to x_0$ cuando $t \to t_0$. Pruebe que $f(\phi(t)) \to \lambda$ cuando $t \to t_0$.

7. Pruebe que las Proposiciones 6.1.2-6.1.5 siguen siendo válidas para límites laterales.

8. Enuncie y demuestre una versión de la Proposición 6.1.1 para límites laterales.

9. Enuncie y demuestre resultados análogos a las Proposiciones 6.1.1-6.1.5 referentes a los límites al infinito.

10. Sea $p(x)$ una *función polinomial*, es decir, $p$ es una función de la forma $p(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$; donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Use la versión de 6.1.1 para límites al infinito (probada en el ejercicio anterior) para determinar $\lim_{x\to+\infty} p(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} p(x)$.

11. De otra demostración de la implicación ($\Leftarrow$) en la proposición 6.1.1. Primero muestre la contrarecíproca de ($\Leftarrow$). Luego intente dar una demostración directa de ($\Leftarrow$) (sin reducción al absurdo).

12. Halle ejemplos que muestren que los siguientes enunciados no son equivalentes al concepto de límite "$f(x) \to \lambda$, cuando $x \to a$".

    *a*) Para todo $\delta > 0$ existe un $\epsilon > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - \lambda| < \epsilon$.

    *b*) Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|f(x)) - \lambda| < \epsilon$, entonces $0 < |x - a| < \delta$.

    *c*) Existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - \lambda| < \epsilon$.

## 6.2. Funciones Continuas

En esta sección, $A$ denota un subconjunto de $\mathbb{R}$, $x_0$ un punto de $A$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función. Diremos que $f$ **es continua en** $x_0$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta \text{ y } x \in A.$$

Informalmente hablando, $f$ es continua en $x_0$ si $f(x)$ está próximo a $f(x_0)$, cuando $x$ lo está de $x_0$. Diremos que $f$ **es continua en** $A$ si ella es continua en todo punto de $A$.

La siguientes dos proposiciones caracterizan la continuidad de una función en términos de su comportamiento con respecto a los límites y a las sucesiones convergentes. La primera es una consecuencia inmediata de las definiciones y la segunda se deduce a partir de la proposición 6.1.1.

**Proposición 6.2.1.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $x_0$ es un punto de acumulación de $A$. Se tiene que $f$ es continua en $x_0$ si y sólo si $f(x) \to f(x_0)$ cuando $x \to x_0$.*

**Proposición 6.2.2.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$. Se tiene que $f$ es continua en $x_0$ si y sólo si, $f(x_n) \to f(x_0)$, para cada sucesión $\{x_n\}$ en $A$ convergente a $x_0$.*

La proposición que sigue nos dice que la composición de funciones continuas es una función continua.

**Proposición 6.2.3.** *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Si $f : A \to B$ es continua en $x_0$ y $g : B \to \mathbb{R}$ es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en $x_0$.*

**Demostración.** Sea $\epsilon > 0$. Para simplificar la notación pondremos $y_0 := f(x_0)$. Ya que $g$ es continua en $y_0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$|g(y) - g(y_0)| < \epsilon, \quad \text{si } |y - y_0| < \eta \text{ y } y \in B.$$

Como a su vez, $f$ es continua en $x_0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \eta, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta \text{ y } x \in A.$$

De aquí y la relación precedente, y teniendo en cuenta que $y_0 = f(x_0)$ obtenemos:

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta \text{ y } x \in A.$$

■

**Ejercicios.**

1. Determine los puntos de continuidad de las funciones definidas en el ejemplo que sigue a la proposición 6.1.1.

2. Pruebe que si $x_0$ es un punto aislado de $A$, entonces cualquier función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0$.

3. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua y $B \subset A$. Muestre que la restricción de $f$ a $B$ es una función continua. Este resultado se puede mostrar directamente usando la definición de continuidad o se puede deducir de la proposición 6.2.3 (*Ayuda:* Sea $g : B \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$ y considere la función $g \circ f$).

4. Completar las demostraciones de las proposiciones 6.2.1 y 6.2.2.

5. Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $x_0$. Pruebe que $f + g$ y $f \cdot g$ son continuas en $x_0$. Si además, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces $f/g$ también es continua en $x_0$.

6. Pruebe que si $f$ es constante ó si $f(x) = x$ para todo $x \in A$, entonces $f$ es continua. Use el ejercicio anterior para concluir que toda función polinomial es continua, es decir las funciones de la forma $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$; donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.

7. Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ continuas en un punto $a \in A$. Defina $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente

$$\varphi(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\} \;\text{ y }\; \psi(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$$

Muestre que $\varphi$ y $\psi$ son continuas en $a$.

8. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pruebe que $f$ es continua si y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto para cada abierto $V$ de $\mathbb{R}$.

   *b*) Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Pruebe que $f$ es continua si y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto en $A$, para cada abierto $V$ de $\mathbb{R}$ (ver ejercicio 9 de la sección 5.2).

9. Recuerde que un subconjunto $B$ de $A$ se dice cerrado en $A$ si $A \setminus B$ es abierto en $A$ (ver ejercicio 14 de la sección 5.3). Pruebe que $f$ es continua si y sólo si $f^{-1}(Z)$ es cerrado en $A$ para cada cerrado $Z$ de $\mathbb{R}$. En particular, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces $f$ es continua si y sólo si $f^{-1}(Z)$ es cerrado para cada cerrado $Z$ de $\mathbb{R}$.

10. Pruebe que si $f$ es continua, entonces $f(\bar{C} \cap A) \subset \overline{f(C)}$, para cada subconjunto $C$ de $A$.

11. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo racional $x$. Muestre que $f = g$. ¿Que puede decir si $f$ y $g$ son iguales en los irracionales?

12. Pruebe que $f$ tiene a lo sumo una extensión continua $F : \bar{A} \to \mathbb{R}$. Es decir, si $F, G : \bar{A} \to \mathbb{R}$ son continuas y $F(x) = G(x)$ para todo $x \in A$, entonces $F = G$.

13. Sea $A \subset \mathbb{R}$ cerrado y no vacío.

    *a*) Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente $f(x) = \inf\{|x - a| : \; a \in A\}$. Muestre que $f$ es continua y que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$. *Ayuda:* Muestre que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

    *b*) Si $c \notin A$. Muestre que existe una función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(c) = 1$ y $g(x) = 0$ para todo $x \in A$.

14. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Muestre que $\{x \in \mathbb{R} : \; f(x) = g(x)\}$ es cerrado y que $\{x \in \mathbb{R} : \; f(x) < g(x)\}$ es abierto.

15. Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ es numerable, entonces $f$ es constante. *Ayuda.* Pruebe primero que $f(\mathbb{R})$ es numerable. Enseguida suponga que existen $a, b \in f(\mathbb{R})$ con $a < b$. Ya que $(a, b)$ no es numerable, existe $c \in (a, b) \setminus f(\mathbb{R})$. Defina $U = f^{-1}((-\infty, c))$ y $V = f^{-1}((c, +\infty))$. Muestre que $U$ es cerrado y use el ejercicio 12 de la sección 5.3.

## 6.3. Funciones continuas definidas sobre compactos y sobre intervalos

Estudiaremos ahora los conceptos de máximo y mínimo de una función y probaremos que si $A$ es compacto entonces toda función continua $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza máximo y mínimo.

Diremos que $f : A \to \mathbb{R}$ **alcanza mínimo** (resp. **máximo**), si existe $x_0 \in A$ tal que, $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x) \leq f(x_0)$) para cada $x \in A$. El número $f(x_0)$ es llamado **el mínimo** (resp. **el máximo**) **(absoluto) de** $f$ **en** $A$. Se dice también que $f$ **alcanza mínimo** (resp. **máximo**) **en** $x_0$ o que $x_0$ **es un punto de mínimo** (resp **máximo**) de $f$.

**Proposición 6.3.1.** *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua y $A$ es compacto, entonces f(A) es compacto.*

**Demostración.** Sea $\{y_n\}$ una sucesión en $f(A)$. De acuerdo al Teorema 5.5.5, bastará probar que $\{y_n\}$ posee una subsucesión convergente a un punto de $f(A)$.

Para cada $n$ escoja $x_n \in A$ tal que $f(x_n) = y_n$. Ya que $A$ es compacto, se sigue del Teorema 5.5.5, que $\{x_n\}$ posee una subsucesión $\{x_{h(k)}\}$ convergente a un punto $x_0 \in A$ y por la proposición 6.2.2 tenemos que $y_{h(k)} = f(x_{h(k)}) \to f(x_0)$. ■

**Teorema 6.3.2.** *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua y $A$ es compacto, entonces $f$ alcanza máximo y mínimo.*

**Demostración.** Por la proposición anterior, $K := f(A)$ es compacto, lo que permite definir $c = \inf(K), d = \sup(K)$. Dejamos al lector verificar que por ser $K$ cerrado, se tiene que $c, d \in K$ (ver ejercicio 5 de la sección 5.5). De modo que, $c = f(x_0)$ y $d = f(z_0)$, para ciertos $x_0, z_0 \in A$. El resultado se sigue ahora notando que $c \leq f(x) \leq d$ para todo $x \in A$. ■

Incluir gráfica

Nos encaminamos ahora a probar el Teorema de Bolzano de los Valores Intermedios, una de cuyas formas dice que: "*la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo*". Una versión más sugerente es que si dos puntos $y_0, y_1$ están en la imagen de una función continua, cuyo dominio es un intervalo, entonces todo punto entre $y_o$ e $y_1$ también está en la imagen de $f$. La prueba de este resultado necesita el siguiente resultado auxiliar.

**Proposición 6.3.3.** *i) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y supongamos que $f(x_0) > 0$ (resp. $f(x_0) < 0$), para algún $x_0$. Entonces existe $r > 0$ tal que, $(x_0 - r, x_0 + r) \subset (a, b)$ y $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$), para cada $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.*

*ii) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua con $a < b$ y supongamos que $f(a) < 0$ (resp. $f(a) > 0$). Entonces existe $r \in (0, b-a)$ tal que $f(x) < 0$ (resp. $f(x) > 0$) para cada $x \in [a, a+r]$.*

*iii) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua con $a < b$ y supongamos que $f(b) < 0$ (resp. $f(b) > 0$). Entonces existe $r \in (0, b-a)$ tal que $f(x) < 0$ (resp. $f(x) > 0$) para cada $x \in [b-r, b]$.*

**Demostración.** (i) Probaremos sólo el caso en que $f(x_0) > 0$. De la definición de continuidad con $\epsilon = f(x_0)$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$, si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in (a,b)$. El resultado se seguirá fácilmente fijando $r > 0$ tal que $(x_0-r, x_0+r)$ está contenido en el abierto $(a,b)\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Dejaremos a cargo del lector la demostración de (ii) y (iii). ■

**Teorema 6.3.4.** *(Bolzano) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

**Demostración.** Sea $B := \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$. Entonces $a \in B$ y $b$ es cota superior de $B$, lo cual permite definir $c = \sup(B)$. Note que de la proposición 6.3.3(ii) se concluye que $a < c$.

*Afirmación:* $c < b$. En efecto, si fuera $c = b$, entonces de la proposición 6.3.3(iii) se concluye que existe $r \in (0, b-a)$ tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in [b-r, b]$. De aquí, $B \subset [a, b-r)$ y en consecuencia, $b-r$ es una cota superior de $B$. Esto es una contradicción (porque $c = b$ es la menor de tales cotas) y prueba la afirmación.

Supongamos que $f(c) < 0$. Por la proposición 6.3.3(i) existe $d \in (c,b)$ tal que $f(d) < 0$ y esto es una contradicción porque $d \in B$ y $c$ es cota superior de $B$. Esta contradicción muestra que $f(c) \geq 0$.

Si fuera $f(c) > 0$ entonces, por la proposición 6.3.3(i) existiría $r > 0$ tal que $(c-r, c+r) \subset (a,b)$ y $f(x) > 0$ en $(c-r, c+r)$. Así, $B \subset [a, c-r]$ (justificar) y en consecuencia, $c-r$ sería una cota superior de $B$ menor que el supremo. Esta contradicción termina la demostración. ■

Incluir gráfica

El lector comprobará que el resultado anterior permanece válido si reemplazamos la hipótesis $f(a) < 0 < f(b)$ por $f(b) < 0 < f(a)$. De aquí se tiene que si: *"$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo $[a,b]$, entonces $f$ se anula por lo menos una vez en $(a,b)$."*

**Corolario 6.3.5.** *Sea $A$ un intervalo y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in A$. Entonces $f(x) > 0$, para todo $x \in A$; ó $f(x) < 0$ para todo $x \in A$.*

**Demostración.** Supongamos por el absurdo que existen $a, b \in A$ tales que $f(a) < 0 < f(b)$. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $a < b$. Pero $[a,b] \subset A$, y aplicando el Teorema de Bolzano

(6.3.4) a la restricción de $f|_{[a,b]}$, tendríamos $f(c) = 0$, para algún $c \in (a, b)$. Esta contradicción termina la prueba. ■

**Corolario 6.3.6.** *Si $A$ es un intervalo y $f : A \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f(A)$ es un intervalo.*

**Demostración.** Fijemos $c < d$ en $f(A)$ y $z \in (c, d)$. Pongamos ahora $c = f(a), d = f(b)$ para ciertos $a, b \in A$. Intercambiando los papeles de $a$ y $b$ si fuera necesario, podemos suponer que $a < b$. (Note que $a \neq b$, pues $c \neq d$). Si definimos $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - z$ tenemos que $g(a) < 0 < g(b)$ y por el Teorema de Bolzano, $g(w) = 0$ para algún $w \in (a, b)$. Así, $f(w) = z$, lo cual prueba que $(c, d) \subset f(A)$ y el resultado se sigue de la Proposición 5.1.1. ■

De lo visto en esta sección se deduce que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces el rango de $f$ es un intervalo compacto de la forma $[c, d]$. Sin embargo, si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua e $I$ es un intervalo, no podemos en general decir que tipo de intervalo tiene el rango de $f$. Por ejemplo, considere la función $f(x) = x^2$ definida $x \in \mathbb{R}$. Entonces la imagen de $(-1, 1)$ bajo $f$ es $[0, 1)$. Por otra parte, la imagen del intervalo $(-2, -1]$ es $[1, 4)$ y la imagen de $[1, 3)$ es $[1, 9)$. Le dejamos al lector la tarea de buscar ejemplos que muestren que el rango de una función continua definida en un interval no compacto puede ser de cualquier tipo. Por otra parte, veremos en la sección que sigue, que cuando $f$ es creciente o decreciente, si podemos saber el tipo de intervalo que aparece en el rango.

**Ejercicios:**

1. Dé otra prueba de la proposición 6.3.1, usando la definición original de conjunto compacto en términos de cubrimiento por abiertos *Ayuda:* Use el ejercicio 8 de la sección 6.2.

2. Complete la demostración de la proposición 6.3.3.

3. En este ejercicio se demuestra que todo polinomio real de grado impar tiene al menos una raíz real.

   *a*) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ impar tal que $g(x)/x^n \to 0$ cuando $x \to +\infty$ y también cuando $x \to -\infty$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c^n + g(c) = 0$. *Ayuda:* Sea $h(x) = g(x) + x^n$. Use un argumento indirecto para mostrar que $h$ cambia de signo.

   *b*) Sea $n \in \mathbb{N}$ impar y sean $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$. Use la parte a) para probar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n = 0$.

4. Pruebe que si $g : [0, 1] \to [0, 1]$ es continua, entonces $g(c) = c$ para algún $c$. *Ayuda.* Si $g(0) = 0$ ó si $g(1) = 1$ no hay nada que mostrar. En caso contrario aplique el Teorema de Bolzano a la función $f(x) = x - g(x)$. Concluya que este resultado permanece válido para cualquier función continua $g : [a, b] \to [a, b]$.

5. Pruebe que toda función continua e inyectiva $g : A \to \mathbb{R}$, definida en un intervalo $A$, es monótona. *Ayuda.* Suponga que existen $x_0 < x_1, y_0 < y_1$ en $A$ tales que $g(x_0) < g(x_1)$ y $g(y_0) > g(y_1)$ y aplique el Teorema de Bolzano a la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(s) = g((1-s)x_0 + sy_0) - g((1-s)x_1 + sy_1)$.

6. Sea $f : [a,b] \to [c,d]$ continua y biyectiva. Muestre que la función inversa $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ es continua. *Ayuda:* Muestre que si $y_n$ es una sucesión en $[c,d]$ convergente a un punto $y$, entonces $f^{-1}(y_n)$ converge a $f^{-1}(y)$. Suponga que no es así y use el teorema 5.5.5 aplicado al compacto $[a,b]$.

## 6.4. Continuidad Uniforme

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, para cada $x_0 \in A$ y cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. Lo que deseamos hacer notar, es que este $\delta$ depende no solamente de $\epsilon$ si no también de $x_0$. Cuando se pueda tomar el $\delta$ independiente de $x_0$ se dirá que $f$ es uniformemente continua. De manera precisa, diremos que $f$ **es uniformemente continua** si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(z)| < \epsilon, \quad \text{si } |x - z| < \delta \text{ y } x, z \in A. \tag{4.1}$$

El lector verificará sin dificultad que toda función uniformemente continua es continua. Sin embargo, el recíproco no es cierto, como lo muestra el ejemplo que veremos en seguida. El ejemplo mas sencillo de función uniformemente continua es la función identidad. En efecto, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ y $\varepsilon > 0$ si ponemos $\delta = \varepsilon$ es claro que (4.1) se cumple.

**Ejemplo:** La función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$; es obviamente continua, pero veremos enseguida que no es uniformemente continua. Para ello supongamos que la afirmación es falsa y apliquemos la definición de continuidad uniforme, con $\epsilon = 1$, para obtener $\delta > 0$ tal que, $|f(x) - f(z)| < 1$, si $|x - z| < \delta$ y $x, z > 0$. Entonces

$$|x^2 - z^2| = |x + z||x - z| < 1, \quad \text{si } |x - z| < \delta \text{ y } x, z > 0.$$

Fijemos ahora $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta > 1$ y pongamos $x = n + \delta/2,\ z = n$, entonces $|x - z| = \delta/2 < \delta$ y $|x + z||x - z| = (2n + \delta/2)\delta/2 > n\delta > 1$, lo cual contradice la relación precedente y prueba nuestra afirmación.

Por otra parte, si restringimos el dominio a un intervalo compacto $[a,b]$, entonces $f$ si es uniformemente continua. Sea $M = \max\{|2a|, |2b|\}$. Notemos que $2a \le x + z \le 2b$ para todo $x, z \in [a,b]$. Luego $|x + z| \le M$ para todo $x, z \in [a,b]$ y en consecuencia

$$|x^2 - z^2| = |x + z||x - z| \le M|x - z|, \quad \text{si } x, z \in [a,b]$$

Luego dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon/M$. De la desigualdad anterior se sigue inmediatamente que (4.1) se cumple y por consiguiente $f$ es uniformemente continua en $[a, b]$.

El teorema que mostramos a continuación dice que el hecho ilustrado en el ejemplo anterior es un resultado general que se cumple para toda función continua con dominio compacto. La prueba hará uso del teorema de Heine-Borel 5.5.4. De hecho, el teorema de Heine-Borel (y el concepto de conjunto compacto definido por cubrimientos abiertos) está históricamente relacionado con la demostración del teorema que sigue[1].

**Teorema 6.4.1.** *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua y $A$ es compacto, entonces $f$ es uniformemente continua.*

**Demostración.** Fijemos $\epsilon > 0$. Como $f$ es continua en $A$, entonces para cada $z \in A$, existe $\delta_z > 0$ tal que,

$$|f(x) - f(z)| < \epsilon/2, \quad \text{si } |x - z| < \delta_z \text{ y } x \in A. \tag{4.2}$$

Para cada $z \in A$ denotemos por $U_z$ al intervalo $(z - \delta_z/2, z + \delta_z/2)$. Tenemos entonces que la familia $\{U_z : z \in A\}$ es un cubrimiento abierto de $A$. Como $A$ es compacto, entonces existe un subconjunto finito $F$ de $A$ tal que $\mathcal{V} := \{U_z : z \in F\}$ es un cubrimiento de $A$. Definamos $\delta = \text{mín}\{\delta_z/2 : z \in F\}$ y fijemos $x, z \in A$ tales que $|x - z| < \delta$. Ya que $\mathcal{V}$ es cubrimiento de $A$, existe $w \in F$ tal que $x \in U_w$, de donde

$$|z - w| \leq |z - x| + |x - w| < \delta + \delta_w/2 \leq \delta_w/2 + \delta_w/2 = \delta_w.$$

De aquí y (4.2), se obtiene que $|f(z) - f(w)| < \epsilon/2$. Luego por la desigualdad triangular concluimos que $|f(x) - f(z)| < \epsilon$, con lo cual termina la prueba. ■

Terminaremos la sección mostrando que toda función uniformemente continua $f : A \to \mathbb{R}$ admite una única extensión continua a $\bar{A}$, es decir, existe una única función $F : \bar{A} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. De hecho, $F$ es uniformemente continua, como se indica en el ejercicio 3. Comenzaremos con el siguiente resultado auxiliar, que por si sólo tiene su interés.

**Proposición 6.4.2.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua y $\{x_n\}$ una sucesión en $A$. Si $\{x_n\}$ es de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy.*

**Demostración.** Dado $\epsilon > 0$ escojamos $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(z)| < \epsilon, \quad \text{si} \quad |x - z| < \delta. \tag{4.3}$$

Ya que $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \delta$ si $m, n > N$. De aquí y (4.3), $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$, si $m, n > N$. ■

**Teorema 6.4.3.** *Toda función uniformemente continua $f : A \to \mathbb{R}$ posee una única extensión continua $F : \bar{A} \to \mathbb{R}$. De hecho, $F$ es uniformemente continua.*

[1]Se puede obtener mas información sobre la historia de este teorema en http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Heine.html

**Demostración.** Fijemos $x \in \bar{A}$ y recordemos que por la proposición 5.3.5, existe una sucesión $\{x_n\}$ en $A$ que converge a $x$. En particular, esa sucesión es de Cauchy, y por la proposición anterior, lo mismo vale para $\{f(x_n)\}$. De aquí, $\{f(x_n)\}$ es convergente, lo que permite definir,

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n). \tag{4.4}$$

Debemos ver que esta definición no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$. Con ese fin, sea $\{z_n\}$ otra sucesión en $A$ que converge a $x$ y mostremos que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(z_n). \tag{4.5}$$

Para ello, fijemos $\epsilon > 0$. Como $f$ es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ verificando (4.3) y como $x_n - z_n \to 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_n - z_n| < \delta$ si $n > N$. De aquí y (4.3), $|f(x_n) - f(z_n)| < \epsilon$ si $n > N$ lo cual dice que $f(x_n) - f(z_n) \to 0$. Esto prueba (4.5) y en consecuencia, se tiene una función bien definida $F : \bar{A} \to \mathbb{R}$ mediante (4.4).

Sea $x \in A$ y pongamos $x_n = x$; para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $x_n \to x$ y $f(x_n) \to f(x)$. De aquí y (4.4), $F(x) = f(x)$, lo cual dice que $F$ es una extensión de $f$.

Veremos ahora que $F$ es uniformemente continua. Dado $\epsilon > 0$ escojamos $\delta > 0$ satisfaciendo (4.3), definamos $\eta = \delta/3$ y fijemos $x, z \in \bar{A}$ tales que $|x - z| < \eta$. Tomemos ahora sucesiones $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ en $A$ convergiendo a $x$ y $z$ respectivamente y recordemos que por definición de $F$, $f(x_n) \to F(x)$ y $f(z_n) \to F(x)$. Así,

$$|f(x_n) - f(z_n)| \to |F(x) - F(z)|. \tag{4.6}$$

Por otra parte, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \eta$ y $|z_n - z| < \eta$ si $n > N$. En particular,

$$|x_n - z_n| \leq |x_n - x| + |x - z| + |z - z_n| < 3\eta = \delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y por (4.3), $|f(x_n) - f(z_n)| < \epsilon$, si $n > N$. De aquí y (4.6), $|F(x) - F(z)| \leq \epsilon$ si $|x - z| < \eta$. Esto prueba que $F$ es uniformemente continua. La unicidad de $F$ se sigue del ejercicio 12 de la sección 6.2. ■

**Corolario 6.4.4.** *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y $A$ es acotado, entonces $f(A)$ es acotado.*

**Demostración.** Por el teorema anterior, $f$ posee una extensión continua $F : \bar{A} \to \mathbb{R}$ y por el teorema 5.5.4, $\bar{A}$ es compacto. De aquí y la proposición 6.3.1, $F(A)$ es compacto y en consecuencia acotado. Esto termina la prueba, porque $f(A) \subset F(A)$. ■

**Ejercicios.**

1. Sean $a < b$ en $\mathbb{R}$. Pruebe que $f : (a, b) \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$; es uniformemente continua.

2. Pruebe que $f : (0, 1) \to \mathbb{R};\ f(x) = 1/x$; no es uniformemente continua.

3. Pruebe que las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $h(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ y $g(x) = xf(x)$ son uniformemente continuas.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que si $f(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, entonces $f$ es uniformemente continua.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y suponga además que $f$ restringida a $(0, +\infty)$ y a $(-\infty, 0)$ es uniformemente continua. Muestre que $f$ es uniformemente continua.

6. Muestre que la suma de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua, pero el producto no lo es necesariamente. Deduzca que $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ es uniformemente continua en $[a, +\infty)$ donde $a > 0$. *Ayuda*: Note que $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

7. Pruebe que si $F : \bar{A} \to \mathbb{R}$ es una extensión continua, de una función uniformemente continua $f : A \to \mathbb{R}$, entonces $F$ es uniformemente continua.

## 6.5. Funciones Monótonas

Igual que en las secciones precedentes, $f : A \to \mathbb{R}$ denota una función definida en un subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$. Diremos que $f$ **es creciente** (resp. **estrictamente creciente**) si $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$) cuando $x < y$. Se dice que $f$ es **decreciente** (resp. **estrictamente decreciente**) si $f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$) cuando $x < y$. Cualquier función que satisfaga alguna de las cuatro definiciones anteriores, se dice **monótona**. En esta sección mostraremos que las funciones monótonas definidas en intervalos son casi continuas. Con esto queremos decir que su conjunto de discontinuidades es numerable. También mostraremos que las funciones biyectivas y continuas definidas sobre intervalos tienen inversa continua.

Recordemos que $f(x_0+)$ denota el límite de $f$ cuando $x$ tiende a $x_0$ por la derecha, $f(x_0-)$ denota el límite por la izquierda y $f(+\infty)$ y $f(-\infty)$ denotan, respectivamente, el límite cuando $x$ tiende a $+\infty$ y $-\infty$. Cuando $f(x_0+)$ y $f(x_0-)$ existen, entonces definimos $s(x_0) := f(x_0+) - f(x_0-)$. Este número se conoce con el nombre de **salto de $f$ en** $x_0$. Note que $s(x_0) \geq 0$. Es claro que si $f$ es continua en $x_0$, entonces $s(x_0) = 0$. El recíproco no es en general cierto, sin embargo mostraremos a continuación que sí es válido para las funciones monótonas y de hecho es la clave para estudiar el comportamiento de estas funciones.

**Proposición 6.5.1.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ creciente.*

*a) Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación a derecha (resp. a izquierda) de $A$, entonces $f(x_0+) = \inf\{f(x) : x > x_0\}$ (resp. $f(x_0-) = \sup\{f(x) : x < x_0\}$).*

*b) Si $x_0 \in A$ es a la vez punto de acumulación a derecha e izquierda de $A$, entonces $f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+)$.*

*c) Si $x_0$ (resp. $y_0$) es un punto de acumulación a derecha (resp. a izquierda) de $A$ y $x_0 < y_0$, entonces $f(x_0+) \leq f(y_0-)$.*

*d) Si $A$ no está acotado superiormente (resp. inferiormente), entonces $f(+\infty) = \sup f(A)$ (resp. $f(-\infty) = \inf f(A)$.*

**Demostración.**

a) Probaremos sólo el caso en que $x_0$ es punto de acumulación a derecha de $A$. En este caso, $(x_0, \infty) \cap A \neq \emptyset$, lo que permite definir $\lambda = \inf\{f(x) : x > x_0\}$. Note que $-\infty \leq \lambda < +\infty$. Consideremos ahora los dos casos siguientes:

**Caso** $-\infty < \lambda$. Dado $\epsilon > 0$ existe $a \in A;\ a > x_0$; tal que $f(a) < \lambda + \epsilon$ (porque el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores).

Definamos $\delta = a - x_0$. Entonces, para cada $x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta)$ se tiene $x < a$, de donde $f(x) \leq f(a)$. Así, $\lambda - \epsilon < \lambda \leq f(x) \leq f(a) < \lambda + \epsilon$, lo cual equivale a decir que , $|f(x) - \lambda| < \epsilon$ si $x_0 < x < x_0 + \delta$. Esto prueba el primer caso.

**Caso** $\lambda = -\infty$. Dado $M > 0$ existe $a \in A; a > x_0$; tal que $f(a) < -M$. Si ponemos $\delta = a - x_0$ y razonamos como antes, vemos que $f(x) < -M$ si $0 < x - x_0 < \delta$. Esto termina la prueba de a).

b) Dado $x > x_0$ en $A$, tenemos $f(x) \geq f(x_0)$, de modo que $f(x_0)$ es cota inferior del conjunto $\{f(x) : x > x_0\}$. De aquí y la parte a), $f(x_0) \leq f(x_0+)$. De manera análoga, $f(x_0-) \leq f(x_0)$, lo cual prueba la parte b).

c) Fijemos $x \in (x_0, y_0) \cap A \neq \emptyset$. De la parte a) se tiene, $f(x_0+) \leq f(x) \leq f(y_0-)$, lo cual prueba c).

d) Probaremos sólo el caso en que $A$ no está acotado superiormente. Para ello pongamos $\lambda = \sup f(A)$ y consideremos los dos casos siguientes:

**Caso** $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$ fijemos $a \in A$ tal que $\lambda - \epsilon < f(a)$. Para $x \geq a$ tenemos $\lambda - \epsilon < f(a) \leq f(x) \leq \lambda < \lambda + \epsilon$, lo cual prueba que $f(x) \to \lambda$ cuando $x \to +\infty$.

**Caso** $\lambda = +\infty$. Dado $M > 0$, existe $a \in A$ tal que, $f(a) > M$ y el resultado se sigue como antes.

$\blacksquare$

Una proposición análoga a la anterior es válida para funciones decrecientes, dejaremos al lector la tarea de enunciarla (ver ejercicio 3).

**Teorema 6.5.2.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente, donde $a < b$ están en $\mathbb{R}$ y $D$ el conjunto de aquellos puntos $x \in (a, b)$ donde $f$ no es continua. Entonces $D$ es numerable.*

**Demostración.** Fijemos $x_0 \in (a,b)$. De las partes a)-b) de la proposición 6.5.1, $f(x_0-)$ y $f(x_0+)$ son números reales. Consideremos el salto de $f$ en $x_0$ que vimos se define como $s(x_0) := f(x_0+) - f(x_0-)$. Se sigue inmediatamente de 6.5.1(b) que $f$ es continua en $x_0$ si y sólo si $s(x_0) = 0$. Es decir, $x \in D$ si y sólo si $s(x) > 0$.

Para cada $x \in D$, sea $I(x)$ el intervalo abierto no trivial de extremidades $f(x-)$ y $f(x+)$. De la parte c) de la proposición anterior tenemos que, $I(x) \cap I(y) = \emptyset$, si $x, y \in D$ y $x \neq y$. Tenemos entonces que $\{I(x) : \ x \in D\}$ es un colección de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, en consecuencia es numerable (ver ejercicio 3 de la sección 5.1). Es claro también que la función que envía $x \in D$ a $I(x)$ es inyectiva, luego $D$ es numerable. ■

Ya hemos visto que la imagen bajo una función continua de un intervalo es un intervalo y también que la imagen continua de un conjunto compacto es compacto. De esto se deduce que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces el rango de $f$ es un intervalo compacto de la forma $[c,d]$.

Terminaremos esta sección estudiando algunas propiedades de las funciones continuas y estrictamente monótonas. En particular, mostraremos que las funciones biyectivas y continuas definidas sobre intervalos tienen inversa continua. Recordemos que por el corolario 6.3.6 la imagen continua de un intervalo es un intervalo. Y ya mencionamos, justo después de 6.3.6, que en general no existen una relación entre el tipo de intervalo en el dominio y en el rango. Sin embargo para funciones monótonas si existe una relación como veremos a continuación.

**Proposición 6.5.3.** *Sea $A$ un intervalo y sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente.*

*a) Si $A = (a,b)$, entonces $f(A) = (f(a+), f(b-))$.*

*b) Si $A = [a,b)$, entonces $f(A) = [f(a), f(b-))$.*

*c) Si $A = (a,b]$, entonces $f(A) = (f(a+), f(b)]$.*

*d) Si $A = [a,b]$, entonces $f(A) = [f(a), f(b)]$.*

*Aquí, $f(a+) = f(-\infty)$, si $a = -\infty$ y $f(b-) = f(+\infty)$, si $b = +\infty$.*

**Demostración.** a) Supongamos primero que $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $x \in (a,b)$. De la proposición 6.5.1, $f(a+) \leq f(x) \leq f(b-)$ y como $f$ es estrictamente creciente entonces, $f(a+) < f(x) < f(b-)$ (justificar). De aquí, $f(A) \subset (f(a+), f(b-))$.

Fijemos ahora $y \in (f(a+), f(b-))$. De la proposición 6.5.1, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) < y < f(x_2)$ y por el corolario 6.3.6, $y \in f(A)$.

Consideremos ahora el caso en que $a = -\infty$ y $b \in \mathbb{R}$. De la proposición 6.5.1, $f(-\infty) \leq f(x) \leq f(b-)$ y la prueba prosigue como antes.

Los dos restantes casos de la parte a); a saber $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$ y $A = \mathbb{R}$; serán dejados a cargo del lector, quien también probará las partes b), c) y d). ■

Ahora mostraremos que la inversa de una función continua y biyectiva definida sobre un intervalo es continua. Pero primero mostraremos un ejemplo que ilustra que no es en general cierto que la inversa de una función continua es continua.

**Ejemplo:** Considere la función $f : \{0\} \cup [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 1$ y $f(x) = x/(x+1)$ si $x \geq 1$. El lector verificará que $f$ es inyectiva y que su rango es $[1/2, 1]$. Luego restringiendo el contradominio de $f$ obtenemos una función $f : \{0\} \cup [1, +\infty) \to [1/2, 1]$ biyectiva y continua. Pero su inversa no es continua en 1. ¿Puede el lector mostrar usando 6.3.1 que la inversa de $f$ no puede ser continua?(sin necesidad de mostrar en que punto $f^{-1}$ no es continua).

**Teorema 6.5.4.** *Sea $A$ un intervalo y sea $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ una biyección continua. Entonces $f^{-1} : B \to A$ es continua.*

**Demostración.** Mostraremos primero que $f$ es estrictamente monónota. En efecto, si no lo fuera, entonces existirían $x_0 < x_1, y_0 < y_1$ en $A$ tales que $f(x_0) < f(x_1)$ y $f(y_0) > f(y_1)$. Considere la la función $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(s) = f((1-s)x_0 + sy_0) - f((1-s)x_1 + sy_1)$. Note que $g$ es continua y además está bien definida pues $(1-s)x_0 + sy_0$ y $(1-s)x_1 + sy_1$ pertenecen a $A$ cualquiera sea $s \in [0, 1]$. Es fácil verificar que $g(0)$ y $g(1)$ tienen signos opuesto. Luego, por el Teorema de Bolzano 6.3.4, se tiene que $g$ se anula en algún punto $r$ de $[0, 1]$. Por ser $f$ inyectiva, obtenemos que $(1-r)x_0 + ry_0 = (1-r)x_1 + ry_1$ y de aquí se tiene que $(1-r)(x_0 - x_1) = r(y_1 - y_0)$ lo cual es imposible (justificar).

Supondremos que $f$ es estrictamente creciente. El caso cuando $f$ sea estrictamente decreciente lo dejaremos al lector (ver el ejercicio 3).

Ahora mostraremos que $f^{-1}$ es continua. Primero que todo note que, por la proposición 6.5.3, $B$ es un intervalo. Por otra parte $f^{-1}$ es estrictamente creciente, por serlo $f$ (justificar). Por la proposicióon 6.5.1 sabemos que si $f^{-1}$ tuviera algún punto de discontinuidad $y_0$, entonces necesariamente es de "tipo salto", esto es $s(y_0) > 0$. Pero esto implicaría que $A$, el rango de $f^{-1}$, no es un intervalo (justificar), lo cual contradice una de las hipótesis. ■

**Observación:** El lector debería comparar el argumento dado en la demostración del teorema 6.5.4 con lo indicado en el ejercicio 6 de la sección 6.3.

El teorema 6.5.4 es sumamente útil para dar pruebas cortas de la continuidad de una función. Por ejemplo, considere la función $f(x) = x^n$ para $x \in (0, +\infty)$. El lector podrá constatar que $f$ es continua, estrictamente creciente y su rango es $(0, +\infty)$. Luego por el teorema anterior la inversa de $f$ es continua, es decir la función $x^{1/n}$ es continua en $(0, +\infty)$ (ver el ejercicio 5).

**Ejercicios.**

1. Sean $f : A \to B;\ g : B \to \mathbb{R}$ funciones crecientes (resp. decrecientes), donde $A, B \subset \mathbb{R}$. Pruebe que $g \circ f$ es creciente. ¿Qué puede Ud. decir en el caso monótono estricto?.

2. Sea $f : A \to B$ una biyección creciente entre subconjuntos de $\mathbb{R}$. Pruebe que $f^{-1}$ es creciente.

3. *a*) Pruebe que $f$ es creciente si y sólo si $-f$ es decreciente.

   *b*) Use la parte a) para enunciar y probar un resultado análogo a la proposición 6.5.1 para funciones decrecientes.

4. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Pruebe que bajo las condiciones indicadas $f(A)$ es abierto y que $f^{-1} : f(A) \to A$ es continua.

   *a*) $A$ es la unión de dos intervalos abiertos.

   *b*) $A$ es un conjunto abierto.

5. Pruebe que la aplicación $P_n : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dada por $P_n(x) = x^n$ es una biyección continua y estrictamente creciente, para cada $n \in \mathbb{N}$. Deduzca que la aplicación $R_n : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dada por $R(x) = x^{1/n}$ es una biyección continua estrictamente creciente.

6. Pruebe que para cada racional positivo $r$, la aplicación $P_r : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dada por $P_r(x) = x^r$ es una biyección continua estrictamente creciente. Deduzca que $x^r > 1$ si $x > 1$. *Ayuda:* Use el ejercicio 5 para expresar $P_r$ como composición de funciones continuas y estrictamente crecientes.

7. De un ejemplo de una función $f : A \to B$ continua y biyectiva tal que $f^{-1}$ no es continua y además que $A$ y $B$ son ambos conjuntos acotados (compare con el ejemplo que sigue al teorema 6.5.4).

## 6.6. Funciones exponenciales y logarítmicas

En la sección 3.2 vimos como se define $a^r$ para todo real positivo $a$ y todo racional $r$. Haremos uso de los resultados de la sección anterior para extender la exponenciación a toda la recta real, es decir, mostraremos cómo se define $a^r$ para cualquier real $r$. Estas son las *funciones exponenciales* que veremos son continuas y estrictamente crecientes. Sus inversas son las *funciones logarítmicas.*

**Teorema 6.6.1.** *Dado $a \in \mathbb{R}$ positivo, existe una única aplicación continua $E_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ tal que $E_a(1) = a$ y $E_a(x + y) = E_a(x)E_a(y)$. Es más, $E_a$ es una biyección continua estrictamente creciente (resp. decreciente) si $a > 1$ (resp. $a < 1$).*

**Demostración.** Nos ocuparemos inicialmente de la existencia de una tal función $E_a$, para lo cual consideramos tres casos.

**Caso** $a > 1$ . Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos

$$B_x = \{r \in \mathbb{Q} : \ r < x\}; \ A_x = \{a^r : r \in B_x\}.$$

Observemos primero que si $s, r \in \mathbb{Q}$ y $r < s$, entonces $a^r < a^s$ (ver ejercicio 1). De esto se sigue que $a^s$ es cota superior de $A_x$ si $s \in \mathbb{Q}$ y $s \geq x$; lo cual permite definir

$$E_a(x) = \sup(A_x).$$

Note que, para cualquier $r \in B_x$, $E_a(x) \geq a^r > 0$, de modo que $E_a$ toma sus valores en $(0, \infty)$. Así tenemos una función, $E_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ definida por $E_a(x) = \sup(A_x)$.

**Afirmación 1.** $E_a(x) = a^x$, si $x \in \mathbb{Q}$. En efecto, si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $a^r < a^x$, para todo $r \in B_x$, lo cual dice que $a^x$ es cota superior de $A_x$. Así, $E_a(x) \leq a^x$. Supongamos ahora que $d := a^x - E_a(x) > 0$ y recordemos que la sucesión $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ converge a 1 (Véase ejercicio 6 de la sección 4.3). De aquí,

$$a^{x-\frac{1}{n}} = \frac{a^x}{a^{\frac{1}{n}}} \to a^x$$

y en consecuencia, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a^{x-\frac{1}{N}} - a^x| < d$. Luego, $a^{x-\frac{1}{N}} > a^x - d = E_a(x)$. Por otra parte, $x - \frac{1}{N} \in B_x$, de manera que $E_a(x) \geq a^{x-\frac{1}{N}}$ y esta contradicción da fin a la prueba de la afirmación 1.

**Afirmación 2.** $B_{x+y} = B_x + B_y$. En efecto, el lector verificará sin dificultad que $B_x + B_y \subset B_{x+y}$. Fijemos ahora $t \in B_{x+y}$. Ya que $t - x < y$, entonces por la densidad de los racionales (Teorema 2.5.3), existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $t - x < r < y$. Si definimos $s = t - r$, tenemos que: $s \in B_x$, $r \in B_y$ y $t = s + r$; luego $t \in B_x + B_y$, lo cual termina la prueba de la afirmación 2.

Con lo mostrado hasta ahora podemos probar que $E_a$ es estrictamente creciente. En efecto, de la afirmación 1 se tiene $E_a(1) = a$, mientras que de la afirmación 2 y la proposición 2.6.3 tenemos

$$\begin{aligned}
E_a(x)E_a(y) &= \sup(A_x)\sup(A_y) \\
&= \sup(A_x \cdot A_y) \\
&= \sup\{a^r a^s : \ r \in B_x, \ s \in B_y\} \\
&= \sup\{a^{r+s} : \ r \in B_x, \ s \in B_y\} \\
&= \sup\{a^t : \ t \in B_{x+y}\} \\
&= E_a(x+y).
\end{aligned}$$

Sea $z > 0$ y por la densidad de los racionales (Teorema 2.5.3) existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0, z)$. Entonces $E_a(z) \geq a^r > 1$. De aquí, si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$ entonces, poniendo $z = y - x$ obtenemos, $E_a(y) = E_a(x+z) = E_a(z)E_a(x) > E_a(x)$, lo cual muestra que $E_a$ es estrictamente creciente.

Ahora mostraremos que $E_a$ es continua. Comenzaremos mostrando que es continua en 0.

**Afirmación 3:** $E_a(x) \to 1$, cuando $x \to 0$. En efecto, por la afirmación 1 tenemos $E_a(1/n) = a^{1/n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que $E_a(1/n) \to 1$. Análogamente, $E_a(-1/n) \to 1$.

Fijemos ahora $\epsilon > 0$ y un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^{1/N} < 1 + \epsilon$ y $a^{-1/N} > 1 - \epsilon$ (justificar la existencia de este $N$). Si $x \in [0, 1/N]$ entonces, $1 = E_a(0) \leq E_a(x) \leq E_a(1/N) < 1 + \epsilon$.

De manera semejante, si $x \in [-1/N, 0]$ entonces $1 \geq E_a(x) \geq 1 - \epsilon$. Hemos probado así que, $|E_a(x) - 1| < \epsilon$, si $x \in [-1/N, 1/N]$, y esto prueba la afirmación 3.

Fijemos ahora $x_0 \in \mathbb{R}$. Ya que $E_a(x) = E_a(x - x_0)E_a(x_0)$, entonces $E_a(x) - E_a(x_0) = E_a(x_0)[E_a(x - x_0) - 1]$ y la continuidad de $E_a$ en $x_0$ se sigue fácilmente de la afirmación 3 (Justifique).

Probaremos ahora que $E_a$ es sobreyectiva. Para ello definamos $b = a - 1 > 0$ y notemos que $E_a(n) = (1 + b)^n \geq 1 + na$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí, $E_a(n) \to +\infty$. El lector usará ahora la monotonía de $E_a$ para probar que $E_a(x) \to +\infty$, cuando $x \to +\infty$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $E_a(-n) = a^{-n} = 1/a^n \to 0$ y usando la monotonía de $E_a$ una vez más, concluímos que $E_a(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$. De aquí y la proposición 6.5.3; parte a); $E_a$ es sobreyectiva y en consecuencia biyectiva.

**Caso $a = 1$.** En este caso definimos $E_a(x) = 1;\ x \in \mathbb{R}$.

**Caso $a < 1$.** En este caso, $1/a > 1$, lo que permite definir $E_a(x) = E_{1/a}(a)^{-1}$. El lector verificará que $E_a$ es una biyección continua y estrictamente decreciente que satisface los otros dos requerimientos del Teorema.

La unicidad de la función $E_a$ será obtenida inmediatamente después del siguiente resultado.

**Lemma 6.6.2.** *Sea $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $E(x + y) = E(x)E(y)$. Entonces, $E(1) \geq 0$ y $E(r) = E(1)^r;\ r \in \mathbb{Q}$.*

**Demostración.** Si $E(z) = 0$, para algún $z$, entonces $E(x) = E(x - z)E(z) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y el resultado es trivial. Supongamos ahora que $E(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Ya que $E(x) = E(x/2)E(x/2) = E(x/2)^2$, tenemos $E(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Más aún, como $E(0) = E(0 + 0) = E(0)E(0)$, concluímos que $E(0) = 1$. Por otra parte, de la relación $1 = E(0) = E(x - x) = E(x)E(-x)$, tenemos que

$$E(-x) = E(x)^{-1};\ x \in \mathbb{R}.$$

Usando inducción tenemos $E(nx) = E(x)^n$ si $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$; y usando la relación anterior probamos que $E(nx) = E(x)^n$, cualquiera sea $n \in \mathbb{Z}$.

Dado $r \in \mathbb{Q}$, podemos escribir $r = m/n$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Así, $E(1)^m = E(m) = E(nr) = E(r)^n$, lo cual prueba que $E(r) = E(1)^{m/n}$. ■

**Prueba de la Parte de Unicidad del Teorema 6.6.1**. Supongamos que $E, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $E(x + y) = E(x)E(y);\ F(x + y) = F(x)F(y);\ E(1) = F(1)$. Del lema anterior tenemos que $E(r) = F(r);\ r \in \mathbb{Q}$. Ahora, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$, fijemos una sucesión $\{r_n\}$ en $\mathbb{Q}$ que converge a $x$. De la continuidad de $E, F$ tenemos que $E(r_n) \to E(x)$ y $F(r_n) \to F(x)$. Así, $E(x) = F(x)$. ■

Sea $a \in \mathbb{R}$ positivo. La función $E_a$, dada por el teorema 6.6.1, se denota por $E_a(x) = a^x$ y se le llama **la función exponencial de base** $a$ . Cuando $a \neq 1$, entonces $E_a$ es biyectiva, su inversa se denota por $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ y se llama **la función logarítmica de base** $a$. Por la proposición 6.5.4, $\log_a$ es continua y por el teorema 6.6.1, esta función tiene las dos propiedades fundamentales siguientes:

$$\log_a(a) = 1; \ \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Recordemos que el número $e$ se define como el siguiente límite (ver proposición 4.4.2)

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

La función logarítmica de base $e$ se denota por ln y se llama también **logaritmo neperiano**.

**Ejercicios.**

1. Sea $a > 1$. Pruebe que $a^r < a^s$ si $r, s \in \mathbb{Q}$ y $r < s$.

2. Pruebe que si $a > 1$, entonces $E_a(x)/x^p \to +\infty$, cuando $x \to +\infty$, cualquiera sea $p \in \mathbb{N}$. *Ayuda:* Note que $E_a(x)/x^p \geq a^{[x]}/(1 + [x])^p$, donde $[x]$ es la parte entera de $x$. Aplique ahora el ejercicio 4 de la sección 4.3.

3. Pruebe que si $a > 1$, entonces $\log_a(x)/x \to$, cuando $x \to +\infty$. *Ayuda:* Use el "cambio de variable" $y = \log_a(x)$.

# Capítulo 7

# Diferenciación

**Introducción.** La teoría de diferenciación o derivación, tiene sus orígenes en dos problemas distintos. En el primero de ellos, se trataba de encontrar *rectas tangentes* a una curva plana. Para curvas simples, como circunferencias, parábolas, etc., el problema era fácil, pero en general, era muy complicado. Una primera aproximación fue obtenida por Fermat, cuando queriendo calcular máximos y mínimos de funciones reales, se dió cuenta que las tangentes a las gráficas de tales funciones, eran paralelas al eje $x$, en los puntos de máximo y mínimo. Sin embargo, fué Leibnitz quien realmente desarrolló la teoría de diferenciación a partir de este punto de vista. (El de encontrar rectas tangentes a una curva plana).

La otra motivación de este concepto nos viene de la física y fué desarrollado por Newton, quien estaba interesado en describir la *velocidad* de un cuerpo en movimiento rectilíneo no uniforme. Desde este punto de vista, el concepto de derivada se interpreta como velocidad. Aunque Leibnitz y Newton eran contemporáneos (Siglo XVII), sus trabajos fueron realizados de manera independiente.

Nuestra exposición no está guiada por motivaciones físicas ni geométricas. Simplemente queremos exponer la teoría de diferenciación de manera rigurosa, en la creencia de que el lector ha sido suficientemente motivado en los cursos de cálculo.

Los temas tratados en este capítulo son los usuales: Regla de la Cadena, Teoremas de Valor Medio, Derivadas de Orden Superior y Fórmula de Taylor, Funciones Convexas y Aplicaciones al Estudio de Máximos y Mínimos.

## 7.1. Definición de la derivada

En esta sección, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ denota una función definida en un intervalo abierto $(a, b)$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ y $x_0$ denota un punto de $(a, b)$. Diremos que **f es derivable en $\mathbf{x_0}$**, si existe $m \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)| \leq \epsilon |x - x_0| \quad \text{si} \quad |x - x_0| \leq \delta. \tag{1.1}$$

Equivalentemente,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta. \tag{1.2}$$

Como veremos enseguida, este número $m$ está unívocamente determinado por la propiedad anterior y se llama **la derivada de f** en $x_0$. Una notación bastante usual es $m = f'(x_0)$.

Observaciones 7.1.1. a) Definamos $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $r(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$. De (1.1) tenemos que f es derivable en $x_0$ si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$|f(x) - r(x)| \leq \epsilon |x - x_0|, \quad \text{cuando} \quad |x - x_0| \leq \delta.$$

Este hecho se expresa diciendo que $f$ y $r$ **son tangentes** en $x_0$. O que las gráficas de $r$ y $f$ son **tangentes en** $(x_0, f(x_0))$. Note que "*la gráfica de* $r$ *es la recta de pendiente* $m$ *que pasa por* $(x_0, f(x_0))$".

Incluir gráfica

b) Definamos $\Delta : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ por,

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.3}$$

y notemos que $x_0$ es un punto de acumulación de $(a, b) \setminus \{x_0\}$. De (1.2) tenemos que $f$ es derivable en $x_0$, si y sólo si, $\Delta(x)$ tiene límite, cuando $x$ tiende a $x_0$. Es más,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \Delta(x).$$

De aquí se tiene que si $f$ es derivable en $x_0$, entonces existe un **único** $m \in \mathbb{R}$ verificando la definición de derivada.

Si queremos (o necesitamos) ser mas precisos con la notación debemos escribir $\Delta_{x_0}(x)$ para indicar el punto donde se calcula la derivada.

**Ejemplos.**

1. Si $f$ es constante, entonces $f$ es derivable en todo punto $x_0 \in (a, b)$ y $f'(x_0) = 0$. Esta afirmación se obtiene fácilmente, observando que $f(x) - f(x_0) = 0$, cualesquiera sean $x, x_0 \in (a, b)$.

2. La función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ es derivable en todo punto $x_0$ de $(a, b)$ y $f'(x_0) = 1$, para cada $x_0 \in (a, b)$. En efecto, si $\Delta$ se define como en (1.3), entonces $\Delta(x) = 1$, para cada $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ y el resultado se sigue fácilmente.

Ahora mostraremos que toda función derivable es continua.

**Proposición 7.1.2.** *Si $f$ es derivable en $x_0$, entonces existen $M, \delta \in \mathbb{R}$ positivos tales que,*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|, \ \textit{si} \ |x - x_0| \leq \delta. \tag{1.4}$$

*En particular, $f$ es continua en $x_0$.*

**Demostración.** Pongamos $m = f'(x_0)$. Aplicando la definición de derivada con $\epsilon = 1$, obtenemos $\delta > 0$ tal que,

$$|f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)| \leq |x - x_0|, \quad \text{si} \quad |x - x_0| \leq \delta.$$

De aquí, $|f(x) - f(x_0)| \leq |m(x - x_0)| + |x - x_0|$ si $|x - x_0| \leq \delta$, y el resultado se obtiene tomando $M = 1 + |m|$. ■

No es cierto que toda función continua en un punto $x_0$ es derivable en $x_0$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ y sea $x_0 = 0$. Entonces, la función $\Delta : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por (1.3) satisface que $\Delta(x) = 1$ si $x > 0$ y $\Delta(x) = -1$ si $x < 0$. En consecuencia, $\Delta(x)$ no tiene límite cuando $x \to 0$ y así, $f$ no es derivable en $x_0 = 0$. Nótese que la gráfica de $f$ presenta un "pico " o "punto anguloso" en $x = 0$, lo que nos lleva a decir que una función cuya gráfica presenta un "pico" o "punto anguloso" en el punto $x = x_0$, no es derivable en $x_0$. Por esta razón, las aplicaciones derivables se conocen también con el nombre de *"lisas o suaves"*.

**Ejercicios.**

1. Suponga que $f$ es creciente. Pruebe que si $f$ es derivable en $x_0$, entonces $f'(x_0) \geq 0$.

2. Supongamos que $f$ es diferenciable en $x_0$ y que $f'(x_0) > 0$. Pruebe que existe $\delta > 0$ tal que, $f(x) < f(x_0)$ si $-\delta < x - x_0 < 0$ y $f(x) > f(x_0)$ si $0 < x - x_0 < \delta$. Enuncie y demuestre un resultado análogo cuando $f'(x_0) < 0$.

3. Supongamos que existen constantes $M > 0$ y $\alpha > 1$ tales que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$; para todo $x, y \in (a, b)$. Pruebe que $f'(x) = 0$, para cada $x \in (a, b)$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en 0. Suponga que $f$ satisface que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que $f'(0) = 0$.

5. Una aplicación $f$ que verifique la conclusión de la proposición 7.1.2 se dice **Lipschitziana en** $x_0$. Sean $f : (a, b) \to (c, d)$, $g : (c, d) \to (a, b)$ funciones tales que $(f \circ g)(y) = y$ para todo $y \in (c, d)$; y sea $x_0 \in (a, b)$ y $y_0 := f(x_0)$. Pruebe que si $f$ es Lipschitziana en $x_0$ y $g$ es derivable en $y_0$, entonces $g'(y_0) \neq 0$.

6. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable en un punto $c \in (a,b)$. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones en $(a,b)$ convergiendo ambas a $c$ y tales que $x_n < c < y_n$. Muestre que

$$f'(c) = \lim_n \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

*Ayuda:* Sea $t_n = \frac{y_n - c}{y_n - x_n}$. Observe que $0 < t_n < 1$. Muestre que

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(c) = [\Delta(y_n) - f'(c)]\, t_n + [\Delta(x_n) - f'(c)](1 - t_n)$$

## 7.2. Algebra de derivadas y la regla de la cadena

**Proposición 7.2.1.** *Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables en un punto $x_0 \in (a,b)$. Entonces $f + g$ y $f \cdot g$ son derivables en un punto $x_0$ y se cumple que:*

*a)* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

*b)* $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

*c) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $1/g$ es derivable en $x_0$ y*

$$(1/g)'(x_0) = -g'(x_0)/g(x_0)^2.$$

**Demostración.** La parte correspondiente a la adición será dejada como ejercicio. Notemos ahora que

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\ &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\ &= [f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)],\end{aligned}$$

de donde,

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

De la proposición 7.1.2 sabemos que $g$ es continua en $x_0$, así $g(x) \to g(x_0)$ cuando $x \to x_0$. Luego por el álgebra de límites (proposición 6.1.3), $f \cdot g$ es diferenciable en $x_0$ y vale b).

Para terminar la prueba, pongamos $h = 1/g$ y notemos que,

$$h(x) - h(x_0) = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x_0)g(x)},$$

de modo que,

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = -h(x_0)h(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

y el resultado se sigue de las proposiciones 7.1.2 y 6.1.3. ∎

**Teorema 7.2.2.** *(Regla de la Cadena). Sean $f : (a,b) \to (c,d)$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $x_0$ e $y_0 := f(x_0)$ respectivamente. Entonces la composición $g \circ f$ es derivable en $x_0$ y*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = (g'f(x_0))f'(x_0)).$$

**Demostración.** Por la proposición 7.1.2, existen $M_0, \delta_0 > 0$ tales que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M_0|x - x_0|, \quad \text{si} \quad |x - x_0| \leq \delta_0. \tag{2.5}$$

Fijemos ahora $\epsilon > 0$ y pongamos $M = \text{máx}\{M_0, |g'(y_0)|\}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/2M$. Ya que $f$ y $g$ son diferenciables en $x_0$ e $y_0$ respectivamente, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que,

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \leq \epsilon_1|x - x_0|, \quad \text{si} \quad |x - x_0| \leq \delta_1. \tag{2.6}$$

$$|g(y) - g(y_0) - g'(y_0)(y - y_0)| \leq \epsilon_2|y - y_0|, \quad \text{si} \quad |y - y_0| \leq \delta_2. \tag{2.7}$$

Definamos $\delta = \text{mín}\{\delta_0, \delta_1, \delta_2/M\}$. Si $|x - x_0| \leq \delta$, se tiene de (2.5) que $|f(x) - f(x_0)| \leq \delta_2$, de modo que por (2.7), (2.5) y la definición de $M$,

$$\begin{aligned} |g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))[f(x) - f(x_0)]| &\leq \epsilon_2|f(x) - f(x_0)| \\ &\leq M\epsilon_2|x - x_0|, \quad \text{si} \quad |x - x_0| \leq \delta. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))[f(x) - f(x_0)] \\ &\quad + g'(f(x_0))[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)], \end{aligned}$$

y usando (2.8), (2.6) y la definición de $\delta$ y $M$ obtenemos,

$$\begin{aligned} |g \circ f(x) - g \circ f(x_0) - g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0)| &\leq M\epsilon_2|x - x_0| + |g'(f(x_0))|\epsilon_1|x - x_0| \\ &\leq \epsilon|x - x_0|, \end{aligned}$$

si $|x - x_0| \leq \delta$. Esto termina la prueba. ■

Definiremos ahora el concepto de derivada lateral en un punto. Sea $\Delta$ la función definida por (1.3); diremos que $f$ tiene **derivada lateral derecha**, denotada $f'_+(x_0)$, en $x_0$ si $\Delta(x)$ tiene límite cuando $x \to x_0^+$, es decir,

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Análogamente definimos la derivada lateral izquierda, denotada $f'_-(x_0)$, en $x_0$ si el siguiente límite existe

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

El concepto de derivada lateral también tiene sentido para funciones cuyo dominio no es necesariamente un intervalo abierto. Por ejemplo, dada una función $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, se define la derivada lateral derecha de $f$ en $a$, denotada también $f'_+(a)$, de la misma manera que antes, como $\lim_{x \to a^+} \Delta(x)$.

**Ejercicios:**

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, es derivable en cada punto $x \in \mathbb{R}$ y que $f'(x) = nx^{n-1}$. *Ayuda.* Use inducción y la proposición 7.2.1.

2. Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en un punto $x_0$ de $(a, b)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\lambda f$ y $f - g$ son derivables en $x_0$ y que $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ y $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

3. Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ una biyección entre dos intervalos abiertos y $x_0 \in (a, b)$.

   *a*) Si $f$ y $f^{-1}$ son diferenciables en $x_0$ y $f(x_0)$ respectivamente, pruebe que $f'(x_0) \neq 0$. *Ayuda:* Use la regla de la cadena.

   *b*) Pruebe que si $f$ es diferenciable es $x_0$, $f^{-1}$ continua en $f(x_0)$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces $f^{-1}$ es diferenciable en $f(x_0)$. *Ayuda:* Sea $y_n \to f(x_0)$ exprese $\frac{f^{-1}(y_m) - x_0}{y_m - f(x_0)}$ en término de $f$.

4. Pruebe que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$; es una biyección con $f'(0) = 0$. ¿Contradice esto lo dicho en el ejercicio 3?

5. Pruebe que $f$ es derivable en $x_0$ si y sólo si $f$ tiene derivadas laterales en $x_0$ y $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

6. Pruebe que si $f$ admite derivada lateral derecha (res. izquierda) en $x_0$, entonces $f$ es continua a derecha (resp. izquierda) en $x_0$. Concluya que si $f$ posee derivadas laterales en $x_0$, entonces $f$ es continua en $x_0$.

## 7.3. Teoremas de Valor Medio

Esta sección está dedicada a probar los resultados más resaltantes del cálculo diferencial para funciones reales de una variable real.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$. Diremos que $x_0 \in A$ es un **máximo** (resp. **mínimo**) **relativo** de $f$ si existe un abierto $U$ de $\mathbb{R}$ tal que $x_0 \in U$ y $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$) para cada $x \in U \cap A$. Es fácil ver que $x_0 \in A$ es un máximo (resp. mínimo) relativo de $f$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$), cuando $|x - x_0| < r$. Un máximo o mínimo relativo será llamado un **extremo relativo**.

**Proposición 7.3.1.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $A$ y supongamos que $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ es un extremo relativo de $f$. Si $f$ es derivable en $x_0$, entonces $f'(x_0) = 0$.*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x_0$ es un máximo relativo de $f$. Luego existe $r > 0$ tal que

$$f(x) - f(x_0) \leq 0, \quad \text{si} \quad |x - x_0| < r. \tag{3.1}$$

Como $\mathrm{int}(A)$ es abierto, podemos suponer (disminuyendo el tamaño de $r$ si fuera necesario) que $I := (x_0 - r, x_0 + r) \subset A$. Definamos ahora $\Delta : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ por $\Delta(x) = [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$.

Ya hemos observado que $\Delta(x) \to f'(x_0)$ cuando $x \to x_0$. Por otra parte, de (3.1), $\Delta(x) \leq 0$ si $0 < x - x_0 < r$ y $\Delta(x) \geq 0$ si $-r < x - x_0 < 0$. De esto se deduce que

$$\lim_{x \to x_0^+} \Delta(x) \leq 0 \ \text{ y } \ \lim_{x \to x_0^-} \Delta(x) \geq 0$$

(véase prueba de la proposición 6.1.4). El resultado se sigue ahora notando que ambos límites son iguales a $f'(x_0)$. ∎

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I$ y sea $A \subset int(I)$. Diremos que $f$ es **derivable** o **diferenciable en** $A$ si $f$ es diferenciable en cada punto de $A$. Cuando $I$ es abierto y $f$ es diferenciable en $I$ diremos simplemente que $f$ es diferenciable. En este caso se tiene una aplicación $f' : I \to \mathbb{R}$ (que envía $x$ en la derivada de $f$ en $x$) que llamaremos **la diferencial o primera derivada** de $f$.

El próximo resultado nos dice que si una función derivable toma el mismo valor en los extremos de un intervalo, entonces "el gráfico de $f$ posee una recta tangente horizontal" en algún punto del intervalo.

Incluir gráfica

**Teorema 7.3.2.** *(Rolle). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), derivable en $(a, b)$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

**Demostración.** Por el corolario 6.3.2, $f$ alcanza máximo y mínimo en $[a, b]$, que denotamos por $M$ y $m$ respectivamente. Si $m = M$, entonces $f$ es constante, de modo que $f'(x) = 0$, para cada $x$ de $(a, b)$. Supongamos ahora que $m < M$ y fijemos $c, d$ en $[a, b]$ tales que $m = f(c)$ y $M = f(d)$. Ya que $f(a) = f(b)$, entonces uno de los puntos $c, d$ esta en $(a, b)$ y en consecuencia, $f$ tiene un extremo relativo en int$([a, b])$. El resultado se sigue ahora de la proposición 7.3.1. ∎

Incluir gráfica

**Teorema 7.3.3.** *(Valor Medio). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $f$ es derivable en $(a, b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que, $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.*

**Demostración.** Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = mx + p$, donde $m, p \in \mathbb{R}$ son determinados unívocamente por las relaciones $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. De hecho, $m = [f(b) - f(a)]/(b - a)$.

Es decir, $m$ es la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Ahora considere la función $h(x) = f(x) - mx - p$. Es claro que $h$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en $(a, b)$. Además, $h(a) = h(b) = 0$ y $h'(x) = f'(x) - m$. Luego por el teorema de Rolle 7.3.2, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Esto es, $f'(c) = m$ y de aquí se tiene el resultado. ■

**Corolario 7.3.4.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en $(a, b)$. Si $f'(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces $f$ es constante.*

**Demostración.** Probaremos que $f(x) = f(a)$, para cualquier $x \in (a, b]$. Para ello notemos que la restricción de $f$ a $[a, x]$, que seguimos denotando por $f$, es continua en $[a, x]$ y diferenciable en $(a, x)$. De aquí y el teorema 7.3.3, existe $c \in (a, x)$ tal que $f(x) = f(a) + (x - a)f'(c)$. Así, $f(x) = f(a)$. ■

**Corolario 7.3.5.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida y continua en un intervalo $I$ y diferenciable en $\operatorname{int}(I)$. Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$), para cada $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces $f$ es creciente (resp. estrictamente creciente).*

**Demostración.** Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Ya que $(a, b) \subset \operatorname{int}(I)$ entonces, por el teorema del Valor Medio, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. De aquí, $f(b) \geq f(a)$ (resp. $f(b) > f(a)$) lo cual termina la prueba. ■

Ya vimos (teorema 6.5.4) que toda función $f : (a, b) \to (c, d)$ continua y biyectiva tiene inversa continua. Ahora mostraremos que si $f$ es diferenciable en $(a, b)$, entonces su inversa también lo es.

**Teorema 7.3.6.** *(Función Inversa). Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(a, b)$ tal que $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$. Entonces $I := f((a, b))$ es un intervalo abierto, $f : (a, b) \to I$ es biyectiva y $f^{-1} : I \to (a, b)$ es diferenciable en $I$. Es más,*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Demostración.** Se sigue del teorema de Rolle 7.3.2 que $f$ debe ser inyectiva (justificar) y, mas aún, es estrictamente monónota (vea la demostración del teorema 6.5.4). Por la proposición 6.5.3 sabemos que $I$, el rango de $f$, es un intervalo abierto y por el teorema 6.5.4 $f^{-1} : I \to (a, b)$ es continua.

Fijemos $y_0 \in I$ y veamos que $f^{-1}$ es derivable en $y_0$. Con ese fin, definamos $x_0 = f^{-1}(y_0)$ y $\Delta : (a, b) \to \mathbb{R}$ por $\Delta(x_0) = f'(x_0)$ y

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si $x \neq x_0$. Ya que $\Delta$ es continua en $x_0$ y $f^{-1}$ es continua en $y_0$, tenemos que $\Delta \circ f^{-1}$ es continua en $y_0$ (proposición 6.2.3), es decir

$$\lim_{y \to y_0} \Delta(f^{-1}(y)) = \Delta(f^{-1}(y_0)) = \Delta(x_0) = f'(x_0).$$

Pero

$$\Delta(f^{-1}(y)) = \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)},$$

si $y \neq y_0$, y en consecuencia,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Es decir, $f^{-1}$ es derivable en $y_0$ y $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(f^{-1}(y_0))$. Así, $f^{-1}$ es diferenciable en $I$ y $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$.

■

**Teorema 7.3.7.** *(Valor Medio de Cauchy). Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f, g$ son diferenciables en $(a, b)$ y $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Demostración.** Note primero que $g(a) \neq g(b)$, pues de lo contrario el Teorema de Rolle (7.3.2) garantizaría que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$ lo cual es imposible por hipótesis. Esto permite definir $m = [f(b) - f(a)]/[g(b) - g(a)]$. Por otra parte, es fácil ver que la aplicación $h : [a, b] \to \mathbb{R}$; $h(x) = f(x) - mg(x)$; satisface las hipótesis del teorema de Rolle y en consecuencia, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Pero $h'(x) = f'(x) - mg'(x)$, de donde $m = f'(c)/g'(c)$. ■

El teorema del Valor Medio se obtiene del resultado anterior mediante la función $g(x) = x$, pero su utilidad más grande se obtiene en el cálculo de límites indeterminados, por ejemplo para mostrar la regla de L'Hopital (ver ejercicio 12).

**Ejercicios:**

1. Compare el contenido de este ejercicio con el teorema de Rolle (7.3.2).

   *a*) Sea $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en $(a, b)$. Suponga que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Es cierto que $f(a) = f(b)$?

   *b*) Sea $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $(a, b)$ (por lo tanto continua en $(a, b)$). Suponga que $f(a) = f(b)$. ¿Es cierto que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$?.

2. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Pruebe que si $f, g$ son diferenciables en $(a, b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = g'(c)$. Deduzca de este ejercicio el teorema 7.3.3 considerando la recta del plano que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

3. (Teorema de Darboux) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un intervalo abierto $I$. Pruebe que si $a, b \in I$ y $f'(a) < d < f'(b)$, entonces existe $c$ entre $a$ y $b$ tal que $f'(c) = d$. (Este teorema

de valores intermedios fué descubierto por Darboux y no necesita que la función $f' : I \to \mathbb{R}$ sea continua). *Ayuda.* Defina $F(x) = f(x) - dx$ y observe que $F'(a) < 0 < F'(b)$. Suponga primero que $a < b$ y use el ejercicio 2 de la sección 7.1 para ver que existen puntos $p, q \in (a, b)$ tales que $F(p) < F(a)$ y $F(q) < F(b)$. Concluya que el mínimo de $F$ en el compacto $[a, b]$ es alcanzado en un punto $c \in (a, b)$.

4. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice *Lipschitziana* en $A$ si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$; para todo $x, y \in A$. Suponga que $A$ es un intervalo, que $f$ es continua en $A$ y diferenciable en $int(A)$. Pruebe que $f$ es Lipschitziana si y sólo si $f'$ es acotada.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Pruebe que $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}$. *Ayuda.* Suponga que $A \neq \emptyset$. Por el ejercicio 12 de la sección 5.3 basta mostrar que $A$ es abierto y cerrado. Sean $x_0 \in A$ y $x \in \mathbb{R}$. Pruebe inductivamente que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $c_n$ entre $x$ y $x_0$ tal que $|f(x)| \leq |x - x_0|^n |f(c_n)|$. Deduzca que $(x_0 - 1, x_0 + 1) \subset A$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) = f(x)$; $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $f(0) = 1$, entonces $f$ es una exponencial, es decir, satisface que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. *Ayuda.* Fije $y$ en $\mathbb{R}$ y defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x + y) - f(y)f(x)$. Use el ejercicio 5 para mostrar que $g$ es constante igual a cero (observe que $g'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $g(0) = 0$).

7. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua en $(a, b)$ y diferenciable en $(a, b) \setminus \{c\}$, donde $c \in (a, b)$. Pruebe que si $f'(x) \to \lambda$, cuando $x \to c$, entonces $f$ es derivable en $c$ y $f'(c) = \lambda$.

8. Enuncie y demuestre un resultado análogo al corolario 7.3.5 referente a las funciones decrecientes.

9. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo $I$ y diferenciable en $\text{int}(I)$. Pruebe que si $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in \text{int}(I)$, entonces $f$ es inyectiva. Concluya que $f$ es monótona estricta.

10. Pruebe que el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 6x + b$ posee una única raíz, cualquiera sea $b \in \mathbb{R}$.

11. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = b$. Pruebe que si $b > 0$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. *Ayuda.* Muestre que para cada sucesión $x_n$ de reales positivos, tal que $x_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$, se cumple que $f(x_n) \to +\infty$ (use el Teorema del Valor Medio).

12. (Regla de L'Hopital). Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $(a, b)$ tales que:

    i) $f(x) \to 0$, si $x \to a^+$,

    ii) $g(x) \to 0$, si $x \to a^+$,

iii) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ y

iv) $f'(x)/g'(x) \to \lambda \in \mathbb{R}$, si $x \to a^+$.

Use ii), iii) y el teorema de Rolle para probar que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Use el teorema 7.3.7 para ver que $f(x)/g(x) \to \lambda$ si $x \to a^+$.

## 7.4. Derivadas de Orden Superior

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $f'$ es continua decimos que $f$ **es de clase $C^1$ en** $(a,b)$ o más simplemente $f \in C^1$, cuando no haya peligro de confusión. En este caso también se dice que $f$ es **continuamente diferenciable**.

Un ejemplo de una función que es diferenciable pero no está en $C^1$ es $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(0) = 0$ y $h(x) = x^2 cos\frac{1}{x}$. En la sección 7.7 daremos las indicaciones de como construir otro ejemplo de una función diferenciable que no es de clase $C^1$ pero que no hace uso de la función $cos(x)$ (la cual no la hemos definido formalmente hasta ahora).

De la proposición 7.2.1 se tiene que, si $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ son diferenciables en $(a,b)$ entonces, $f+g$, $f \cdot g$ también lo son y $(f+g)' = f' + g'$, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. De aquí y el ejercicio 4 de la sección 6.2, $f+g, f \cdot g \in C^1$ si $f, g \in C^1$.

Si $g$ es diferenciable y $g(x) \neq 0$; $x \in (a,b)$; entonces $1/g$ es diferenciable y $(1/g)' = -g'/g^2$. En particular, $1/g \in C^1$, si $g \in C^1$. Del teorema 7.2.2 también se obtiene lo siguiente:

**Proposición 7.4.1.** *Sean $f : (a,b) \to (c,d)$, $\quad g : (c,d) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Entonces $g \circ f$ es diferenciable y $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$. En particular, $g \circ f \in \mathcal{C}^1$ si $f, g \in \mathcal{C}^1$.*

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferenciable en $(a,b)$. Si a su vez, $f'$ es diferenciable en $(a,b)$, diremos que $f$ es **diferenciable de orden dos** en $(a,b)$ y pondremos $f'' = (f')'$. Más generalmente, supongamos definido inductivamente, el concepto de **función $n$ veces diferenciable en** $(a,b)$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Diremos que $f$ es $n+1$ **veces diferenciable** en $(a,b)$, si $f$ es diferenciable en $(a,b)$ y $f'$ es $n$ veces diferenciable en $(a,b)$.

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función $n$ veces diferenciable. La **$n$-ésima derivada de** $f$ se define inductivamente como la función $f^{(n)} : (a,b) \to \mathbb{R}$; $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$; donde, por conveniencia, ponemos $f^{(0)} = f$, para cada función $f$. Note que, $f^{(1)} = f'$ y $f^{(2)} = f''$. En muchas ocasiones se utiliza la notación $f''', f^{iv}$ en vez de $f^{(3)}, f^{(4)}$ respectivamente.

Si $f$ es $n$ veces diferenciable en $(a,b)$ y $f^{(n)}$ es continua en $(a,b)$, decimos que $f$ **es de clase $C^n$ en** $(a,b)$ y ponemos $f \in C^n(a,b)$ ó $f \in C^n$, si no hay peligro de confusión.

Diremos que $f$ **es de clase $C^\infty$** o **infinitamente diferenciable en** $(a,b)$, si $f \in C^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En fin, pondremos $f \in C^0$ para indicar que $f$ es continua.

**Proposición 7.4.2.** *Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es de clase $C^n$ para algún $n\in\mathbb{N}$; entonces $f\in C^{n-1}$. Además, $f^{(n-1)}$ es diferenciable y $(f^{(n-1)})'=f^{(n)}$.*

**Demostración.** (Inducción) De la proposición 7.1.2 se tiene que el resultado es válido para $n=1$. Supongamos ahora que nuestra proposición vale para algún $n\in\mathbb{N}$ y sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una aplicación de clase $C^{n+1}$. Ya que $g:=f'$ es de clase $C^n$, entonces por la hipótesis inductiva $g\in C^{n-1}$ y $(g^{(n-1)})'=g^{(n)}$. En particular, $f\in C^n$ porque $f'\in C^{n-1}$.

Por definición, $f^{(n+1)}=(f')^{(n)}$ y $f^{(n)}=(f')^{(n-1)}=g^{(n-1)}$, de modo que, $f^{(n+1)}=g^{(n)}=(g^{(n-1)})'=(f^{(n)})'$. Esto dice que el resultado es cierto para $n+1$ y termina la prueba. ■

**Proposición 7.4.3.** *Sean $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ funciones de clase $C^n$, para algún entero $n\geq 0$. Entonces,*

*a)* $f+g\in C^n$ *y* $(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$.

*b)* $f\cdot g\in C^n$.

*c)* $1/g\in C^n$ *si* $g(x)\neq 0$ *para cada* $x\in(a,b)$.

**Demostración.** (Inducción) a) se deja como ejercicio. b) Para $n=0$, ya sabemos que el producto de funciones continuas es continua (ver ejercicio 5 de la sección 6.2). Supongamos que b) vale para funciones de clase $C^n$, para algún $n\geq 0$ y sean $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ funciones de clase $C^{n+1}$. Por la proposición anterior, $f,g\in C^n$ y por definición, $f',g'\in C^n$. Por hipótesis inductiva, $f'\cdot g+f\cdot g'\in C^n$. De aquí y la proposición 7.2.1, $(f\cdot g)'\in C^n$, lo cual muestra que $f\cdot g\in C^{n+1}$. Esto termina la prueba de b).

c) Para el caso $n=0$ ver el ejercicio 5 de la sección 6.2. Supongamos que c) vale para funciones de clase $C^n$ (algún $n\geq 0$) y sea $g\in C^{n+1}$. Por la proposición anterior y la parte b), $g^2=g\cdot g\in C^n$ y por hipótesis inductiva, $1/g^2\in C^n$. Por definición, $g'\in C^n$ y de aquí es fácil ver que $-g'\in C^n$ (ver ejercicio 1). De la parte b) $-g'/g^2\in C^n$. Así, $(1/g)'\in C^n$, lo cual termina la prueba. ■

**Proposición 7.4.4.** *Si $f:(a,b)\to(c,d)$ y $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ son funciones de clase $C^n$ entonces, $g\circ f\in C^n$.*

**Demostración.** Para $n=0$ el resultado se sigue de la proposición 6.2.3. Supongamos que la proposición es cierta para funciones de clase $C^n$ (algún entero $n\geq 0$) y sean $f,g$ de clase $C^{n+1}$. Por la proposición 7.4.2, $f\in C^n$ y por definición, $f',g'\in C^n$. Por hipótesis inductiva, $g'\circ f\in C^n$ y por la proposición anterior, $(g\circ f)\cdot f'\in C^n$. Por la proposición 7.4.1, $(g\circ f)'\in C^n$. lo cual termina la prueba. ■

**Nota 7.4.5.** Las proposiciones 7.4.2-7.4.4 permanecen válidas si reemplazamos la frase “función de clase $C^n$” por la frase “función $n$ veces diferenciable” (resp. “función de clase $C^\infty$”).

Ya vimos (teorema 7.3.6) que toda función $f:(a,b)\to(c,d)$ biyectiva y diferenciable tiene inversa diferenciable. Ahora veremos que la inversa es de clase $C^n$, si $f$ lo es.

**Proposición 7.4.6.** *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(a, b)$ tal que $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$. Si $f$ es de clase $C^n$, para algún $n \geq 1$, entonces $f^{-1}$ también lo es.*

**Demostración.** Recordemos que por el teorema 7.3.6, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Para ver que $f^{-1} \in C^n$, procedemos por inducción. Si $n = 1$, entonces $f'$ es continua y como $f^{-1}$ también es continua, lo mismo vale para $(f^{-1})'$. Así, $f^{-1} \in C^1$. Supongamos ahora que nuestro resultado es válido para algún $n \geq 1$ y sea $f$ una función de clase $C^{n+1}$. Por la Proposición 7.4.2, $f \in C^n$ y por la hipótesis inductiva, $f^{-1} \in C^n$. Por definición, $f' \in C^n$ y el resultado se sigue fácilmente de las proposiciones 7.4.4 y 7.4.3. ■

**Ejercicios**.

1. Pruebe que $f \in C^n$ si y sólo si $-f \in C^n$. Pruebe además que $(-f)^{(n)} = -f^{(n)}$.

2. Pruebe que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es de clase $C^\infty$ si y sólo si $f$ es diferenciable en $(a, b)$ y $f' \in C^\infty$.

3. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciable. Pruebe que si $f' = f$ entonces $f \in C^\infty$. Concluya que la **función idénticamente nula** ($f(x) = 0$; $x \in (a, b)$) es de clase $C^\infty$ y deduzca que toda función constante es $C^\infty$. En fin, pruebe que toda aplicación polinomial es $C^\infty$.

4. Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^k$. Use inducción para mostrar que $f'(x) = kx^{k-1}$. Pruebe que $f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$, si $n-1 < k$ y deduzca que $f^{(k)}(x) = k!$ y $f^{(n)}(x) = 0$, si $n > k$.

5. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$. Pruebe que $f \in C^\infty$ y use inducción para ver que $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!/x^{n+1}$.

6. Sea $k \in \mathbb{N}$ y definamos $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ por $f(x) = x^{1/k}$. Use el teorema 7.3.6 para ver que $f \in C^\infty$ y que $f'(x) = \frac{1}{k}x^{\frac{1-k}{k}}$.

7. Sea $r \in \mathbb{Q}$ y defina $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ por $f(x) = x^r$. Pruebe que $f \in C^\infty$ y que $f'(x) = rx^{r-1}$.

## 7.5. La Fórmula de Taylor

En esta sección $f : I \to \mathbb{R}$ denota una aplicación definida en un intervalo abierto $I$ de $\mathbb{R}$ y $x_0$ denota un punto de $I$. Si $f$ es $n$ veces diferenciable, definimos **el polinomio de Taylor de orden** $n$ **de** $f$ **alrededor de** $x_0$ mediante:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i. \tag{5.1}$$

El objetivo de ésta sección es probar que "*$P_n(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$, cuando $x$ está cerca de $x_0$*". Mas precisamente, mostraremos lo siguiente

**Teorema 7.5.1.** *(Fórmula de Taylor). Supongamos que $f$ es $n+1$ veces diferenciable en $I$ y $x_0 \in I$. Dado $x \in I$ existe $c$ entre $x_0$ y $x$ tal que*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1},$$

*donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden $n$ de $f$ alrededor de $x_0$ (definido en (5.1)).*

En el ejercicio 3 veremos con mas precisión que tan buena es la aproximación de una función a través de su polinomio de Taylor. Para la demostración de 7.5.1 necesitamos algunos resultados auxiliares. Es claro que $P_n(x)$ y $f(x)$ tiene las mismas primeras $n$ derivadas en $x_0$, esto lo enunciamos a continuación y dejamos la tarea al lector de verificarlo.

**Proposición 7.5.2.** *Sean $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ y definamos $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i$. Entonces $Q \in C^n$ y $Q^{(i)}(x_0) = i! a_i$ si $0 \leq i \leq n$ y $Q^{(n+1)}(x) = 0$ para todo $x$.*

**Proposición 7.5.3.** *Sea $n \in \mathbb{N}$, $I$ un intervalo abierto y $x_0 \in I$. Si $R : I \to \mathbb{R}$ es una función $n$ veces diferenciable tal que $R(x_0) = R'(x_0) = \cdots = R^{(n-1)}(x_0) = 0$, entonces para cada $x \in I$ existe $c$ entre $x_0$ y $x$ (esto es, $|c - x_0| < |x - x_0|$) tal que*

$$R(x) = \frac{1}{n!}(x-x_0)^n R^{(n)}(c).$$

**Demostración.** Como el resultado es trivial para $x = x_0$, podemos asumir que $x \neq x_0$. Más aún, para fijar las ideas, supondremos que $x > x_0$. Procederemos ahora por inducción en $n \in \mathbb{N}$.

Por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (x_0, x)$ tal que $R(x) - R(x_0) = (x - x_0)R'(c)$, de modo que el resultado vale para $n = 1$. Asumamos que el resultado vale para todas las funciones $n$ veces diferenciables y sea $R : I \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces diferenciable tal que $R^{(i)}(x_0) = 0$ para $0 \leq i \leq n$. Por el Teorema del Valor Medio de Cauchy aplicado a las funciones $f(t) = R(t)$ y $g(t) = (t - x_0)^{n+1}$ (definidas en el intervalo $[x_0, x]$), obtenemos $z \in (x_0, x)$ tal que

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R'(z)}{(n+1)(z-x_0)^n}. \tag{5.2}$$

Por otra parte, la función $R'$ es de clase $C^n$ y aplicando la hipótesis inductiva, tenemos

$$R'(z) = \frac{1}{n!}(z-x_0)^n (R')^{(n)}(c)$$

para algún $c \in (0, z)$. El resultado se sigue ahora de la relación (5.2), recordando que $(R')^{(n)} = R^{(n+1)}$.
■

Ahora tenemos todo lo que hace falta para probar la fórmula de Taylor.

**Demostración de 7.5.1.** Definamos $Q, R : I \to \mathbb{R}$ mediante $Q(h) = P_n(h)$ y $R(h) = f(h) - Q(h)$. De la proposición 7.5.2, $Q^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ para $0 \leq i \leq n$, de modo que $R^{(i)}(x_0) = 0$ si $0 \leq i \leq n$. Por la proposición 7.5.3 tenemos que dado $x \in I$ existe $c$ entre $x_0$ y $x$ tal que

$$R(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} R^{(n+1)}(c) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(c).$$

pues $Q^{(n+1)}(t) = 0$ para todo $t$. Para finalizar, recuerde que $f(x) = P_n(x) + R(x)$. ■

Para finalizar esta sección daremos una aplicación importante de la fórmula de Taylor conocida como el método de Newton. Este método es muy útil para aproximar raíces de polinomios.

Incluir gráfica

**Teorema 7.5.4.** *(Método de Newton). Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es 2 veces diferenciable en $I = [a, b]$ y además que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Suponga que existen constantes $m$ y $M$ tales que $f'(x) \geq m > 0$ y $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in I$. Entonces existe un intervalo $J \subset I$ y $r \in J$ con $f(r) = 0$ tal que para cualquier $x_0 \in J$ la sucesión $x_n$ definida recursivamente por*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \textit{con } n \geq 0 \tag{5.3}$$

*converge a $r$.*

**Demostración.** Como $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces por el teorema de Bolzano (6.3.4) sabemos que existe $r \in I$ tal que $f(r) = 0$. Como $f'$ no se anula en $I$, entonces por el teorema de Rolle (7.3.2) sabemos que tal $r$ es único.

Sea $x \in I$ cualquiera. Por la fórmula de Taylor 7.5.1 aplicada a $f$ alrededor de $x$, sabemos que existe $c$ entre $x$ y $r$ tal que

$$0 = f(r) = f(x) + f'(x)(r - x) + \frac{f''(c)}{2}(r - x)^2$$

Luego

$$-f(x) = f'(x)(r - x) + \frac{f''(c)}{2}(r - x)^2$$

Definimos

$$x' = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Notemos que

$$x' = x + (r - x) + \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x)}(r - x)^2$$

Luego

$$x' - r = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x)}(r - x)^2$$

Por lo tanto, denotando $M/2m$ por $K$ y recordando que por hipótesis $|f''(c)| \leq M$ y que $f'(x) > m$ tenemos que

$$|x' - r| \leq K|r - x|^2 \tag{5.4}$$

Fijemos $\delta > 0$ tal que $K\delta < 1$ y además que $(r-\delta, r+\delta) \subset I$. Fijemos $x_0 \in (r-\delta, r+\delta)$. Definimos, para $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

De (5.4) se tiene que $|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2$. Por inducción se comprueba que $|x_n - r| < \delta$ para todo $n \geq 0$. De esto se tiene que $x_n \in I$ y además que $|x_{n+1} - r| < K\delta|x_n - r|$ para todo $n \geq 0$. Luego por inducción se obtiene que $|x_n - r| < (K\delta)^n|x_0 - r|$ para todo $n \geq 1$. Como $K\delta < 1$, se sigue fácilmente que $\{x_n\}$ converge a $r$. ■

**Ejemplo:** (Cálculo aproximado de $\sqrt{2}$ por el método de Newton). Considere la función $f(x) = x^2 - 2$ para $x \in \mathbb{R}$. En el intervalo $[1, 2]$ se tiene que $f(1) = -1$ y $f(2) = 2$. En este caso tenemos que $|f'(x)| = 2|x| \geq 2$ y $f''(x) = 2$ para todo $x \in [1, 2]$. La formula de iteración (5.3) se convierte en este caso en la siguiente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

Tomando $x_1 = 1$, obtenemos $x_2 = 3/2$, $x_3 = 17/12$, $x_4 = 577/408 = 1,414215$ y $x_5 = 665857/470832 = 1,414113562374$. Por el teorema 7.5.4 sabemos que $x_n$ converge a $\sqrt{2}$.

**Ejercicios.**

1. Sea $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función polinomial de grado $\leq n$. Pruebe que si $\lim_{h\to 0} Q(h)/h^n = 0$ entonces $Q = 0$. Es decir, $Q(h) = 0$ para todo $h \in \mathbb{R}$.

2. Sea $n \geq 1$ y $R : J \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces diferenciable en un intervalo abierto $J$ que contiene a 0. Suponga que $R(0) = 0$ y que $R^{(i)}(0) = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Pruebe que $\lim_{h\to 0} R(h)/h^n = 0$. *Ayuda.* Use inducción y la Regla de L'Hopital.

3. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces diferenciable en un intervalo abierto $I$ y fijemos $x_0 \in I$. Pruebe que
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$
donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden $n$ de $f$ alrededor de $x_0$. Use el ejercicio 1 para probar que $P_n(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$ que verifica la relación anterior.

4. Suponga que $f$ es de clase $C^{n+1}$ en $I$ y que $f^{(i)}(x_0) = 0$ para $0 < i \leq n$. Pruebe que si $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ y $n$ es impar, entonces $x_0$ es un mínimo relativo. Enuncie y demuestre un criterio análogo para máximos relativos.

5. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable con $f' = f$. Pruebe que $f \in C^\infty$ y que $f^{(n)} = f$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que, si además $f(0) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Este ejercicio ya fué resuelto en la sección 7.3 (ver ejercicio 5). Es interesante comparar

las dos maneras de resolverlo, pues ahora lo podemos hacer usando la fórmula de Taylor. Fije $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ y use la fórmula de Taylor para encontrar una sucesión $\{c_n\}$ entre cero y $x$ tal que $f(x) = f(c_n)x^n/n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dos veces diferenciable tal que $f'' + f \equiv 0$. Pruebe que si $0 = f(0) = f'(0)$, entonces $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. *Ayuda.* Note que $f$ es necesariamente $C^\infty$ y además que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n$. Y concluya usando un razonamiento similar al del ejercicio anterior.

## 7.6. Extremos Relativos y Convexidad

El propósito de esta sección es poner en evidencia la utilidad de la segunda derivada. Igual que en las secciones precedentes, $f : I \to \mathbb{R}$ denota una función definida en un intervalo $I$.

Supongamos que $f$ es diferenciable. Diremos que $x_0 \in I$ es un **punto crítico** de $f$ si $f'(x_0) = 0$. La proposición 7.3.1 dice que todo extremo relativo de $f$ en $\operatorname{int}(I)$ es un punto crítico de $f$. El recíproco es falso, como lo muestra la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^3$; la cual tiene a 0 como un punto crítico que no es extremo relativo.

**Proposición 7.6.1.** *Supongamos que $f$ es derivable y que $x_0 \in \operatorname{int}(I)$ es un punto crítico de $f$. Si $f''(x_0)$ existe y es positiva (resp. negativa), entonces $x_0$ es un mínimo (resp. máximo) relativo.*

**Demostración.** Consideramos sólo el caso en que $f''(x_0) > 0$, dejando el otro caso a cargo del lector. Por el ejercicio 2 de la sección 7.1 aplicado a la función $f'$, existe $\delta > 0$ tal que $f' > 0$ en $(x_0, x_0 + \delta)$ y $f' < 0$ en $(x_0 - \delta, x_0)$. De aquí, del corolario 7.3.5 y del ejercicio 8 de la sección 7.3, se tiene que $f(x) > f(x_0)$, si $0 < |x - x_0| < \delta$. ■

En términos geométricos, una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I$, se dice **convexa**, si dados $a < b$ en $I$ se tiene que el gráfico de $f$ en $[a, b]$ está por debajo de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Incluir gráfica

Recordamos que la ecuación de dicha recta viene dada por $y = m(x - a) + f(a)$ donde $m := [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Así, podemos dar la siguiente definición (analítica) de convexidad. Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$, definida en un intervalo $I$, es *convexa* si dados $a < b$ en $I$ se tiene que,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{si} \quad a < x < b.$$

El lector comprobará que la desigualdad anterior es equivalente a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}, \quad \text{si} \quad a<x<b,$$

puesto que ambas son equivalentes a la desigualdad

$$(b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b), \quad \text{si} \quad a<x<b.$$

**Proposición 7.6.2.** *Si $f$ es convexa, entonces $f$ posee derivadas laterales en todo punto de* $\operatorname{int}(I)$*. En particular, $f$ es continua en* $\operatorname{int}(I)$*.*

**Demostración.** Fijemos $a \in \operatorname{int}(I)$ y fijemos $c, b \in I$ tales que $c < a < b$. De la convexidad de $f$ se sigue que la función $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$, definida por $\phi(x) = [f(x) - f(a)]/(x-a)$, es creciente. Por otra parte, $[f(a)-f(c)]/(a-c) \leq \phi(x)$ y por la proposición 6.5.1; parte a); $\phi(x)$ tiene límite lateral derecho en $a$. Es decir, $f$ tiene derivada lateral derecha en $a$. La existencia de la derivada lateral izquierda será dejada a cargo del lector. Finalmente, la continuidad de $f$ en todo punto de $\operatorname{int}(I)$ se sigue de la existencia de las derivadas laterales (ver el ejercicio 6 de la sección 7.2). ■

**Proposición 7.6.3.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = f(b) = 0$. Si $f$ es derivable en $(a,b)$ y $f'$ es creciente en ese intervalo, entonces $f(x) \leq 0$ para cada $x \in [a,b]$.*

**Demostración.** Supongamos que el resultado es falso. Entonces el máximo de $f$ es positivo y en consecuencia se alcanza en un punto $x_0$ de $(a,b)$. Por la proposición 7.3.1, $f'(x_0) = 0$ y como $f'$ es creciente, entonces $f' \geq 0$ en $(x_0, b)$. Luego $f$ es creciente en ese intervalo y de aquí, $f(b) \geq f(x_0) > 0$. Esta contradicción termina la prueba. ■

**Proposición 7.6.4.** *Supongamos que $f$ es continua en $I$ y diferenciable en* $\operatorname{int}(I)$*. Entonces $f$ es convexa si y sólo si $f'$ es creciente en* $\operatorname{int}(I)$*.*

**Demostración.** Supongamos que $f'$ es creciente en $\operatorname{int}(I)$, fijemos $a < b$ en $I$ y definamos $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(a) + m(x-a)$ donde $m := [f(b) - f(a)]/(b-a)$. Es fácil probar que la función $f - g$ satisface las hipótesis de la proposición precedente y en consecuencia, $f \leq g$ en $[a,b]$. Luego, $f$ es convexa.

Recíprocamente, supongamos que $f$ es convexa y fijemos $a < b$ en $\operatorname{int}(I)$. De la definición de convexidad se tiene $[f(x) - f(a)]/(x-a) \leq m$ para todo $x \in (a,b)$ donde $m$ es como antes. De aquí, $f'(a) \leq m$.

Por otra parte, también sabemos que $[f(b) - f(x)]/(b-x) \geq m$ para $a < x < b$; de modo que $f'(b) \geq m$. Así, $f'(b) \geq f'(a)$. ■

**Corolario 7.6.5.** *Supongamos que $f$ es continua en $I$ y dos veces diferenciable en* $\operatorname{int}(I)$*. Entonces $f$ es convexa si y sólo si $f'' \geq 0$.*

**Ejercicios.**

1. Supongamos que $f$ es 3 veces diferenciable en $I$ y que $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, para algún $x_0 \in \text{int}(I)$. Pruebe que si $f^{(iv)}(x_0)$ existe y es positiva, entonces $x_0$ es un mínimo relativo.

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en $(a, b)$. Sea $M$ el máximo de $f$ y sea $P$ el conjunto de puntos críticos de $f$ en $(a, b)$. Pruebe que $M = \text{máx}\{f(a), f(b)\}$ si $P$ es vacío. Si $P$ no es vacío, pruebe que el número $M_0 := \text{máx}\{f(x) : x \in P\}$ está bien definido y que $M = \text{máx}\{f(a), f(b), M_0\}$.

3. Pruebe que $f$ es convexa si y sólo si $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$, cualesquiera sean $a, b \in I$ y $t \in [0, 1]$.

4. Pruebe que una función continua $f$ es convexa, si y sólo si, $f((x + y)/2) \leq [f(x) + f(y)]/2$, para todo $x, y \in I$. *Ayuda.* Pruebe que la desigualdad del ejercicio anterior vale cuando $t = m/2^n, m, n \in \mathbb{N}$ y $m \leq 2^n$.

5. Pruebe que $f$ es convexa, si y sólo si, $f(\sum_{i=1}^n t_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$, cualesquiera sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \cdots, x_n \in I$ y $t_1, \cdots, t_n \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^n t_1 = 1$. *Ayuda.* Use inducción y el ejercicio 3.

6. Pruebe que toda exponencial continua $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es convexa.

7. Sean $b_1, \cdots b_n$ números reales positivos. La *media aritmética* de estos números se define como

$$(b_1 + \cdots + b_n)/n$$

y la *media geométrica* como

$$(b_1 \cdots b_n)^{1/n}$$

Muestre que la media geométrica es menor o igual a la media aritmética. *Ayuda.* Fije $a > 1$ y sea $E_a = a^x$ la exponencial de base $a$. Sea $x_i \in \mathbb{R}$ tal que $E_a(x_i) = b_i$ y aplique el ejercicio anterior con $t_1 = \cdots = t_n = 1/n$.

8. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ una función convexa tal que $f(x) \to 0$, cuando $x \to 0^+$. Pruebe que la función $g : (0, 1) \to \mathbb{R};\ g(x) = f(x)/x$; es creciente. *Ayuda.* Pruebe que la extensión continua $F : [0, 1) \to \mathbb{R}$ de $f$ es convexa y recuerde que $F(0) = 0$.

9. Pruebe que la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 1$ y $f(x) = 0$ para $0 < x \leq 1$, es convexa. Note que $f$ no es continua en $x = 0$.

## 7.7. Construcción de una función diferenciable que no es $C^1$

En esta sección daremos las indicaciones para construir un ejemplo elemental de una función diferenciable que no es continuamente diferenciable.

1. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función tal que $g(0) = g(1)$. Pruebe que $g$ posee una única extensión 1-*periódica*. Es decir, existe una única extensión $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de $g$, tal que $f(x+1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. *Ayuda.* $f(x) = g(x - [x])$, donde $[x]$ denota la parte entera de $x$. Pruebe además que si $g$ es continua, entonces $f$ también lo es.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 1-periódica. Pruebe que si existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, entonces $f$ es constante.

3. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $(0,1)$ y supongamos que las derivadas laterales $g'_+(0), g'_-(1)$ existen y son iguales. Pruebe que si $g(0) = g(1)$, entonces la única extensión 1-periódica, $f$ de $g$, es diferenciable y $f'$ es la única extensión 1 periódica de la función $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por: $h(0) = g'_+(0), \quad h(1) = g'_-(1)$ y $h(x) = g'(x)$ si $0 < x < 1$.

4. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2(1-x)^2$ y $f$ la extensión 1-periódica de $g$. Pruebe que $f$ es continuamente diferenciable. Pruebe también que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por: $h(0) = 0$ y $h(x) = x^2 f(\frac{1}{x})$, para $x \neq 0$, es diferenciable pero no continuamente diferenciable.

Incluir gráfica

# Capítulo 8

# Integración

**Introducción.** Los orígenes de la teoría de integración hay que buscarlos más de dos mil años atrás, cuando los griegos trataron de calcular el área de ciertas figuras planas. La técnica usada por ellos, conocida como *método exhaustivo*, consistía en introducir en la figura dada, otra figura, cuyo borde fuera poligonal y de área fácil de calcular. Enseguida, se introducían nuevas curvas poligonales, con más lados que las anteriores, de manera que las figuras limitadas por estas poligonales fueran "aproximándose" a la figura inicial. Usando este método, Arquímedes logró calcular el área de unas pocas figuras elementales, no pudiendo hacer más, debido a las limitaciones de naturaleza algebraica de los métodos desarrollados en esa época por los matemáticos griegos.

Fué en el siglo XVII cuando el método exhaustivo recibió su mayor impulso, debido principalmente a los trabajos de Newton y Leibnitz. Sin embargo, hubo que esperar hasta el siglo pasado para que, con los trabajos de Riemann, la teoría de integración reposara sobre bases firmes.

Un hecho fundamental a destacar es que el proceso de encontrar rectas tangentes y el proceso de calcular áreas; temas aparentemente distintos; están intimamente relacionados a través de un resultado conocido como el Teorema Fundamental del Cáculo (Sección 8.3). De manera informal, este teorema dice que los procesos de derivación e integración son el uno inverso del otro.

Los temas tratadoa aquí, son los usuales: Propiedades Básicas de la Integral de Riemann, Teorema Fundamental del Cálculo, Carecterización de las Funciones Integrables Riemann a través de su conjunto de discontinuidades e Integración Impropia. Este último tema fué tratado de manera unificada, usando teoría de redes.

En lo que sigue, $\mathcal{B}([a,b])$ denotará el conjunto de todas las funciones acotadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Recordamos que $f \in \mathcal{B}([a,b])$ si y sólo si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para cada $x \in [a,b]$. De la proposición 6.3.1, toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ está en $\mathcal{B}([a,b])$. Note también que toda función monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada. En todo este capítulo, $f$ denota un elemento de $\mathcal{B}([a,b])$.

## 8.1. Particiones de un intervalo

En lo que sigue, $[a,b]$ denota un intervalo compacto con $a<b$. El número $b-a$ se llama la **longitud** de $[a,b]$ y se denota por $l([a,b])$. Una **partición** del intervalo $[a,b]$ es un subconjunto finito de puntos $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ tales que el menor de ellos es $a$ y el mayor es $b$. Usaremos la siguiente notación $\{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ para de indicar de una vez el orden de los puntos de la partición.

**Ejemplo:**

Considere para cada natural $n$ la siguiente colección de puntos en $[0,1]$:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ \cdots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ x_n = 1$$

Es claro que ellos forman una partición de $[0,1]$. Mas generalmente

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$$

para $k = 0, \cdots n$ forman una partición de $[a,b]$. Esta partición tiene la propiedad que los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ (llamados los intervalos de la partición) todos tienen longitud igual a $(b-a)/n$.

El conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ será denotado por $\mathcal{P}[a,b]$. Dadas $P, Q \in \mathcal{P}[a,b]$ diremos que $Q$ **es más fina que** $P$ o que $Q$ **es un refinamiento de** $P$, si $P \subset Q$. En este caso escribimos $P \leq Q$.

Los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ para $0 \leq i \leq n-1$ se llaman los intervalos de la partición. El concepto de partición también puede ser expresado en términos de esta colección de intervalos, como lo muestra la proposición que sigue. Esta versión mas abstracta de las particiones es útil y funciona muy bien en la teoría de integración de funciones de varias variables. Dejaremos la demostración a cargo del lector.

**Proposición 8.1.1.** *Sea $P$ una familia finita de intervalos compactos no degenerados tales que:*

1. *$[a,b]$ es la unión de los elementos de $P$.*

2. *$I \cap J$ es vacío o contiene un sólo elemento, si $I, J \in P$ e $I \neq J$.*

*Entonces la colección $\{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ formada por los extremos de los intervalos en $P$ es una partición de $[a,b]$ tal que $P$ es igual a $\{[x_i, x_{i+1}] :\ 0 \leq i \leq n-1\}$.*

*Si $Q$ es otra familia finita de intervalos compactos no degenerados que satisface estas dos propiedades, entonces $Q$ es mas fina que $P$ si para cada $I \in Q$ existe $J \in P$ tal que $I \subset J$.*

De ahora en adelante usaremos indistintamente estas dos formas de presentar las particiones: como colección finita de puntos o como familias de intervalos con las dos propiedades enunciadas en la proposición anterior.

**Proposición 8.1.2.** *Si $P$ es una partición de $[a,b]$ entonces*

$$\sum_{I\in P} l(I) = b-a.$$

**Demostración.** Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Entonces

$$\sum_{I\in P} l(I) = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i = x_n - x_0 = b-a$$

■

**Ejercicios.**

1. Pruebe la proposición 8.1.1.

2. Sea $P, Q \in \mathcal{P}[a,b]$ con $P \leq Q$. Dado $J \in P$, pruebe que $Q_J := \{I \in Q : I \subset J\}$ es una partición de $J$. Pruebe además que $Q$ es la reunión disjunta de los $Q_J$. Es decir, $Q = \cup\{Q_J : J \in P\}$ y $Q_J \cap Q_K = \emptyset$ si $J \neq K$. Describa $Q_J$ en términos de los extremos de los intervalos en $Q$.

3. Sean $P, Q \in \mathcal{P}[a,b]$. Pruebe que $R := P \cup Q \in \mathcal{P}[a,b]$ es más fina que $P$ y $Q$ simultáneamente. Muestre que los intervalos de $R$ son precisamente $\{I \cap J : I \in P, J \in Q \text{ e } I \cap J \text{ no es degenerado}\}$.

4. Sea $c \in (a,b)$ y sea $R \in \mathcal{P}[a,b]$. Pruebe que existen $P \in \mathcal{P}[a,c]$ y $Q \in \mathcal{P}[c,b]$ tales que $R \leq P \cup Q$. Note que $P \cup Q$ es una partición de $[a,b]$.

5. Sea $P_n$ la partición de $[a,b]$ dada por

   $$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

   para $i = 0, \cdots n$. Muestre que para cada par de naturales $n, m$ existe otro natural $k$ tal que $P_k$ es mas fina que $P_n$ y $P_m$.

## 8.2. La Definición de la Integral de Riemann

Dado $A \subset [a,b]$, definimos

$$\begin{aligned} M(f,A) &= \sup\{f(x) : x \in A\} \\ m(f,A) &= \inf\{f(x) : x \in A\} \end{aligned}$$

Usualmente escribiremos $M(f,A) = \sup(f(A))$ y $m(f,A) = \inf(f(A))$. Dada $P \in \mathcal{P}[a,b]$ definimos:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{I\in P} M(f,\ I) l(I) \\ L(f,P) &= \sum_{I\in P} m(f,\ I) l(I) \end{aligned}$$

Incluir gráfica

El primero de estos números es llamado **una suma superior de** $f$, mientras que el segundo es llamado **una suma inferior de** $f$. Si $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$, las sumas superior e inferior se expresan, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} M(f,\ [x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i) \\ L(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} m(f,\ [x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

Note que la relación $m(f,I) \leq M(f,I)$ implica $L(f,P) \leq U(f,P)$.

**Proposición 8.2.1.** *Sean* $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$ *con* $P \leq Q$*. Entonces* $U(f,Q) \leq U(f,P)$ *y* $L(f,P) \leq L(f,Q)$*.*

**Demostración.** Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Supondremos primero que $Q = P \cup \{r\}$. Entonces existe $j \in \{0, n-1\}$ tal que $x_j < r < x_{j+1}$. Denotaremos $M(f,\ [x_i, x_{i+1}])$ por $M_i$. Note que $M(f, [x_j, r]) \leq M_j$, $M(f, [r, x_{j+1}]) \leq M_j$ y que $x_{j+1} - x_j = (x_{j+1} - r) + (r - x_j)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=0, i\neq j}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i) + M_j(x_{j+1} - x_j) \\ &\geq \sum_{i=0, i\neq j}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i) + M(f,\ [x_j, r])(r - x_j) + M(f,\ [r, x_{j+1}])(x_{j+1} - r) \\ &= U(f,Q) \end{aligned}$$

Para el caso general, si $Q \setminus P$ contiene $k$ puntos, repetimos el argumento anterior $k$ veces (o para ser mas precisos, hacemos una prueba por inducción en $k$). El resto de la prueba será dejado al lector. ■

La proposición anterior dice que "*las sumas superiores (resp. inferiores) decrecen (resp. crecen) cuando se afinan las particiones*", y será un resultado clave en la definición de integral.

**Proposición 8.2.2.** $L(f,P) \leq U(f,Q)$ *para todo* $P, Q \in \mathcal{P}[a,b]$*.*

**Demostración.** Sea $R \in \mathcal{P}[a,b]$ más fina que $P$ y $Q$ (por ejemplo $R = Q \cup P$). Por la proposición anterior, $U(f,R) \leq U(f,Q)$ y $L(f,P) \leq L(f,R)$. El resultado se obtiene ahora recordando que $L(f,R) \leq U(f,R)$. ■

Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. De la proposición 8.1.2 tenemos

$$|U(f,P)| \leq M(b-a) \quad \text{y} \quad |L(f,P)| \leq M(b-a).$$

Esto permite definir **la integral superior** de $f$ en $[a,b]$ y **la integral inferior** de $f$ en $[a,b]$ respectivamente, por las siguientes fórmulas:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P) : \; P \in \mathcal{P}[a,b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) : \; P \in \mathcal{P}[a,b]\}.$$

**Proposición 8.2.3.** *Para cada $f \in \mathcal{B}([a,b])$ se tiene que*

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

**Demostración.** Fijemos $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Por la proposición anterior, $U(f,P)$ es cota superior del conjunto $\{L(f,Q) : \; Q \in \mathcal{P}([a,b])\}$ y en consecuencia, $U(f,P) \geq \underline{\int_a^b} f$. De aquí, $\underline{\int_a^b} f$ es cota inferior del conjunto $\{U(f,P) : \; P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ y el resultado se sigue fácilmente. ■

Diremos que $f \in \mathcal{B}([a,b])$ **es R-integrable** (o integrable en el sentido de Riemann) en $[a,b]$, denotado $f \in \mathcal{R}([a,b])$, si

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

En este caso, ambas integrales serán denotadas por $\int_a^b f$, que llamaremos **la integral (de Riemann)** de $f$ en $[a,b]$. Por razones históricas, se utiliza más a menudo el símbolo $\int_a^b f(x)dx$ y lo haremos así cuando sea necesario escribir la fórmula explícita de $f$.

**Ejemplos.**

1. Sea $f$ la función constante $f(x) = 1$. Es fácil ver que $U(f,P) = L(f,P) = b-a$, para cualquier $P \in \mathcal{P}[a,b]$, de modo que $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y $\int_a^b f = b-a$. En la notación histórica esto se expresa mediante el símbolo $\int_a^b dx = b-a$.

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función acotada definida por $f(x) = 0$ si $x$ es racional y $f(x) = 1$ si $x$ es irracional. Fijemos $P \in \mathcal{P}[a,b]$ e $I \in P$. De la densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (teoremas 2.5.3 y 2.5.4) se tiene que $M(f,I) = 1, \; m(f,I) = 0$. De modo que $U(f,P) = 1$ y $L(f,P) = 0$. De aquí, $1 = \overline{\int_0^1} f > 0 = \underline{\int_0^1} f$. Es decir, $f$ no es R-integrable en $[0,1]$.

La siguiente proposición provee un criterio para la R-integrabilidad de una función que usaremos con frecuencia.

**Proposición 8.2.4.** *$f \in \mathcal{R}([a,b])$ si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.*

**Demostración.** Supongamos que $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y fijemos $\epsilon > 0$. De las deficiones de integral superior e inferior, existen $Q, R \in \mathcal{P}[a,b]$ tales que

$$U(f,Q) - \epsilon/2 \leq \overline{\int_a^b} f; \quad L(f,R) + \epsilon/2 \geq \underline{\int_a^b} f.$$

Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ más fina que $Q$ y $R$. De la proposición 8.2.1 y de la definición de integral tenemos,

$$U(f,P) - \epsilon/2 \leq \int_a^b f \ \text{ y } \ L(f,P) + \epsilon/2 \geq \int_a^b f,$$

de modo que $U(f,P) - L(f,P) \leq \epsilon$.

Para mostrar el recíproco observemos que dada un partición $P$, por la proposición 8.2.3, se cumple que

$$U(f,P) \geq \overline{\int_a^b} f \geq \underline{\int_a^b} f \geq L(f,P)$$

y en consecuencia, para todo $P \in \mathcal{P}[a,b]$

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq U(f,P) - L(f,P).$$

De aquí y nuestra hipótesis, para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \epsilon,$$

y por consiguiente $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ (por la proposición 2.2.1). ■

Daremos dos aplicaciones interesantes de la proposición anterior. Ahora definimos **la oscilación de $f$ en $A$**

$$\Omega(f,A) = M(f,A) - m(f,A).$$

De acuerdo a la proposición 2.8.5, tenemos la siguiente identidad que será usada repetidas veces:

$$\Omega(f,A) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in A\}.$$

Notemos de una vez por todas que para toda partición $P \in \mathcal{P}([a,b])$ se cumple que

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{I \in P} \Omega(f,I) l(I). \tag{2.1}$$

**Proposición 8.2.5.** *Si $f$ es monótona, entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

**Demostración:** Dado $\epsilon > 0$ elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\epsilon > (b-a)|f(b) - f(a)|$ y sea $P$ la partición de $[a,b]$ que lo divide en $n$ partes iguales. Esto es, sea $P = \{I_1, \cdots, I_n\}$, donde $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ y $x_k := a + (k/n)(b-a)$ para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Supongamos ahora que $f$ es creciente (el otro caso es similar y será dejado a cargo del lector). Entonces $\Omega(f, I_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$, y recordando que $l(I_k) = (b-a)/n$; $1 \leq k \leq n$; de (2.1) obtenemos,

$$U(f,P) - L(f,P) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})] = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)] < \epsilon.$$

El resultado se sigue ahora de la proposición precedente. ■

**Proposición 8.2.6.** *Toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es R-integrable en $[a,b]$.*

**Demostración:** Fijemos $\epsilon > 0$ y pongamos $\epsilon' = \epsilon/(b-a)$. Como $[a,b]$ es compacto (por teorema 5.5.1), entonces $f$ es uniformemente continua (por teorema 6.4.1), y por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon' \text{ si } |x - y| \leq \delta.$$

Elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta > (b-a)$ y sea $P$ como en la demostración de la proposición anterior. Si $I \in P$ entonces $l(I) = (b-a)/n \leq \delta$ y en consecuencia,

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon' \quad \text{si} \quad x, y \in I.$$

Es decir, $\Omega(f, I) \leq \epsilon'$, y por lo tanto,

$$U(f,P) - L(f,P) \leq \epsilon' \sum_{I \in P} l(I) = \epsilon'(b-a) = \epsilon.$$

■

**Ejercicios.**

1. Complete la demostración de la proposición 8.2.1.

2. *a*) Pruebe que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}; f(x) = x$; es R-integrable en $[0,1]$ y que $\int_0^1 f = 1/2$. Es decir, $\int_0^1 x dx = 1/2$. *Ayuda.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere la partición $P_n$ de $[0,1]$ que divide ese intervalo en subintervalos de longitud $1/n$ y pruebe que $U(f, P_n) = (n+1)/2n$ y $L(f, P) = (n-1)/2n$.

   *b*) Hago lo mismo para las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$ con $0 \leq x \leq 1$.

3. Sea $f(x) = x^2 - x$ y $P_n$ la partición de $[1,2]$ en $n$ intervalos de longitud $1/n$. Calcule $U(f, P_n)$ y $L(f, P_n)$ para cada $n$.

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $P_n$ la partición de $[a, b]$ en $n$ intervalos de longitud $(b - a)/n$. Suponga que $\lim_n U(f, P_n) = \lim_n L(f, P_n)$. Muestre que $f$ es $R$-integrable.

5. Pruebe que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ si y sólo si $-f \in \mathcal{R}([a, b])$. En este caso, muestre que $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$.

6. Pruebe que si $f \geq 0$, entonces $\underline{\int_a^b} f \geq 0$. Concluya que si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g$. ¿Qué puede decir sobre la integral superior?

7. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$) R-integrable. Muestre que $\int_{-1}^1 f = 0$. ¿Qué puede decir en el caso que $f$ sea par (es decir, $f(x) = f(-x)$)?

8. *a*) Sea $c \in [a, b]$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ si $x \neq c$. Pruebe que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y que $\int_a^b f = 0$.

   *b*) Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Suponga que $f$ es $R$-integrable y que $\{x \in [a, b] : \ f(x) \neq g(x)\}$ es finito. Muestre que $g$ es $R$-integrable y que $\int_a^b f = \int_a^b g$.

   *c*) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = 1$ para todo $x \in (a, b)$. Pruebe que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y que $\int_a^b f = b - a$.

9. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua no negativa ($f \geq 0$) tal que $f(c) > 0$ para algún $c$. Pruebe que $\int_a^b f > 0$.

10. Sea $f$ la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por partes de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{, si } x = p/q \text{ donde } p < q \text{ son enteros no negativos y sin divisores comunes.} \\ 0 & \text{, si } x \text{ es irracional y } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Pruebe que $f$ es continua en todos los irracionales y no lo es en los racionales. Además $f$ es R-integrable y $\int_0^1 f = 0$.

## 8.3. Propiedades Básicas de la Integral de Riemann.

Recordemos que $\mathcal{B}([a, b])$ denota el conjunto de todas las funciones acotadas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. El lector probará que si $f, g \in \mathcal{B}([a, b])$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $f + g, \lambda f, f \cdot g \in \mathcal{B}([a, b])$. Este resultado suele enunciarse diciendo que $\mathcal{B}([a, b])$ es **un álgebra real**. El objeto de esta sección es probar que $\mathcal{R}([a, b])$ es un álgebra real y que $\int_a^b$ "es un funcional lineal continuo y monótono". Probaremos también que si $c \in (a, b)$, entonces "$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$". Los significados precisos de estas frases serán dados en la seis proposiciones siguientes

**Proposición 8.3.1.** *(Linealidad) Sean $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $f + g, \lambda f \in \mathcal{R}([a, b])$ y*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g;$$

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

**Demostración.** Sea $A \subset [a,b]$ no vacío y notemos que

$$(f+g)(A) = \{f(x)+g(x) : x \in A\} \subset \{f(x)+g(y) : x, y \in A\} = f(A)+g(A).$$

De aquí y la proposición 2.6.3, $M(f+g,A) \leq M(f,A)+M(g,A)$ y en consecuencia,

$$U(f+g,P) \leq U(f,P)+U(g,P) \tag{3.1}$$

para todo $P \in \mathcal{P}([a,b])$. Dado $\epsilon > 0$ elijamos particiones $Q, R$ de $[a,b]$ tales que

$$U(f,Q) \leq \epsilon/2 + \overline{\int_a^b} f \quad \text{y} \quad U(g,R) \leq \epsilon/2 + \overline{\int_a^b} g,$$

y tomemos una partición $P$ de $[a,b]$, más fina que $Q$ y $R$ simultáneamente. De la proposición 8.2.1 y de la integrabilidad de $f$ y $g$ se tiene

$$U(f,P) \leq \epsilon/2 + \int_a^b f \quad \text{y} \quad U(g,P) \leq \epsilon/2 + \int_a^b g.$$

De aquí y (3.1), $U(f+g,P) \leq \epsilon + \int_a^b f + \int_a^b g$ y como esta desigualdad vale para cada $\epsilon > 0$, se sigue de la proposición 2.2.1 que, $U(f+g,P) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$. En consecuencia,

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{3.2}$$

Por un argumento similar, el lector probará que

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g,$$

lo que junto con la desigualdad (3.2) dice que $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$ y que $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Supongamos $\lambda \geq 0$. Entonces, $M(\lambda f, A) = \lambda M(f,A)$, de donde resulta que $\overline{\int_a^b}(\lambda f) = \lambda \overline{\int_a^b} f$. De manera semejante, $\underline{\int_a^b}(\lambda f) = \lambda \underline{\int_a^b} f$, lo cual prueba el resultado en el caso en que $\lambda \geq 0$.

En fin, si $\lambda \leq 0$, escribimos $\lambda f = (-\lambda)(-f)$ y el resultado se sigue del caso anterior y del ejercicio 5 de la sección 8.2. ■

**Proposición 8.3.2.** *Si $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$.*

**Demostración.** Probaremos primero que $f^2 := f \cdot f \in \mathcal{R}([a,b])$, para cualquier $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Para ello fijemos $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ y notemos que

$$|f(x)^2 - f(y)^2| = |f(x)+f(y)||f(x)-f(y)| \leq 2M|f(x)-f(y)|.$$

De aquí, $\Omega(f^2, A) \leq 2M\Omega(f,A)$ si $\emptyset \neq A \subset [a,b]$ y en consecuencia,

$$U(f^2,P) - L(f^2,P) \leq 2M[U(f,P) - L(f,P)]$$

para todo $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Fijemos $\epsilon > 0$ y pongamos $\epsilon' = \epsilon/(2M)$. Por la proposición 8.2.4, existe una partición $P$ de $[a,b]$ tal que $U(f,P)-L(f,P) \leq \epsilon'$ y de la desigualdad precedente, $U(f^2,P)-L(f^2,P) \leq \epsilon$. De aquí y la proposición 8.2.4, $f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$.

Por otra parte, $f \cdot g = [(f+g)^2 - f^2 - g^2]/2$ y el resultado se sigue de la proposición 8.3.1 (lo detalles quedan a cargo del lector). ∎

Las dos proposiciones anteriores nos dicen que $\mathcal{R}([a,b])$ es un álgebra real y que la operación de integración $\int_a^b : \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R}$ dada por $f \to \int_a^b f$; es lineal. Ahora nos encaminamos a mostrar que esta operación es monótona y continua.

**Proposición 8.3.3.** *(Monotonía) Sean $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ tales que $f \leq g$. Entonces,*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

**Demostración.** Por la proposición 8.3.1, $g - f \in \mathcal{R}([a,b])$ y por el ejercicio 6 de la sección 8.2, $\int_a^b (g-f) \geq 0$. Aplicando nuevamente la proposición 8.3.1 obtenemos $\int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f$ y el resultado se sigue fácilmente. ∎

**Proposición 8.3.4.** *(Continuidad) Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y denotemos por $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ a la función que envía $x$ en $|f(x)|$. Entonces $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ y*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

*En particular, si $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in [a,b]$, entonces*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a).$$

**Demostración.** Obviamente, $|f|$ es acotada. Por otra parte, de la desigualdad $||x| - |y|| \leq |x - y|$ se sigue fácilmente que $\Omega(|f|, A) \leq \Omega(f, A)$, para cada subconjunto no vacío $A$ de $[a,b]$. De aquí y usando (2.1) se tiene que

$$U(|f|,P) - L(|f|,P) \leq U(f,P) - L(f,P)$$

para todo $P \in \mathcal{P}([a,b])$. Por la proposición 8.2.4, $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$.

Por otra parte, $-|f| \leq f \leq |f|$ y por la proposición anterior, $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. La segunda afirmación es una consecuencia inmediata de la monotonía (8.3.3) y del hecho que $\int_a^b M = M(b-a)$. Los detalles quedan a cargo del lector. ∎

**Corolario 8.3.5.** *(Teorema del Valor Medio para Integrales) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f = (b-a)f(c).$$

**Demostración.** Por el teorema 6.3.2, $f$ alcanza máximo y mínimo en $[a,b]$, que denotaremos por $M$ y $m$ respectivamente. Ya que $m \leq f \leq M$, se sigue de la proposición 8.3.3 que $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$ y en consecuencia, $m \leq (\int_a^b f)/(b-a) \leq M$. Como $f$ es continua, entonces por el teorema del valor intermedio 6.3.6 sabemos que todo el intervalo $[m, M]$ está contenido en el rango de $f$ y con esto termina la prueba. ■

Fijemos $c \in (a,b)$ y sea $f \in \mathcal{B}([a,b])$. Las restricciones $f|_{[a,c]}$ y $f|_{[c,b]}$ las seguiremos denotando por $f$. Por ejemplo, si $P \in \mathcal{P}([a,c])$, la suma superior $U(f|_{[a,c]}, P)$ la denotaremos más simplemente por $U(f,P)$. Esperamos que este abuso de notación no será causa de confusión.

**Proposición 8.3.6.** *Sea $c \in (a,b)$ y $f \in \mathcal{B}([a,b])$. Entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$ si y sólo si $f \in \mathcal{R}([a,c]) \cap \mathcal{R}([c,b])$. En ambos casos,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**Demostración.** Sean $P, Q$ particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente. El lector verificará que

$$U(f,P) + U(f,Q) = U(f, P \cup Q). \tag{3.3}$$

Sea $R \in \mathcal{P}([a,b])$. Es fácil ver que existen $P \in \mathcal{P}([a,c])$ y $Q \in \mathcal{P}([c,b])$ tales que $R \leq P \cup Q$, de modo que $U(f,R) \geq U(f, P \cup Q)$. De aquí y (3.3),

$$\overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \leq U(f,R)$$

para todo $R \in \mathcal{P}[a,b]$. De esto y de la definición de integral superior se tiene que

$$\overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \leq \overline{\int_a^b} f. \tag{3.4}$$

Dado $\epsilon > 0$ escojamos $P \in \mathcal{P}([a,c])$ y $Q \in \mathcal{P}([c,b])$ tales que,

$$U(f,P) \leq \epsilon/2 + \overline{\int_a^c} f, \quad U(f,Q) \leq \epsilon/2 + \overline{\int_c^b} f.$$

Note que $P \cup Q$ es una partición de $[a,b]$. De (3.3) y (3.4) se tiene

$$\overline{\int_a^b} f \leq U(f, P \cup Q) \leq \epsilon + \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \leq \epsilon + \overline{\int_a^b} f,$$

lo que prueba que

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

El lector probará que una identidad semejante es válida para las correspondientes integrales inferiores. Es decir,

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f.$$

Por lo tanto

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f.$$

De esto se deduce que $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$ si y sólo si $\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f = 0$ y $\overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f = 0$. Lo cual muestra lo afirmado. ■

Terminaremos esta sección con unas notaciones sumamente útiles para todo lo que sigue. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $A$ y sean $a, b \in A$ con $a < b$. Si la restricción $f|_{[a,b]}$ es R-integrable en $[a, b]$, escribiremos $\int_a^b f$ en lugar de $\int_a^b f|_{[a,b]}$. También definimos

$$\int_a^a f := 0 \quad \text{si} \quad a \in A$$

y

$$\int_a^b f := -\int_b^a f \quad \text{si} \quad a, b \in A \quad \text{y} \quad b < a.$$

Observe que con estas notaciones se tiene

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

para todo $a, b \in A$. Con esta notación podemos generalizar las propiedades de la integral que hemos probado en esta sección (especificamente 8.3.1, 8.3.4 y 8.3.6). Lo importante es notar que la integral $\int_a^b f$ tiene sentido sin suponer que $a < b$.

**Proposición 8.3.7.** *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ definidas en un intervalo $A$; sean $a, b, c \in A$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si las integrales de abajo están definidas, entonces*

*i)* $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

*ii)* $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$.

*iii)* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

*iv)* $\int_a^b \lambda = \lambda(b - a)$.

*v)* $\left|\int_a^b f\right| \leq | \int_a^b |f||$.

**Ejercicios.**

1. Sea $P \in \mathcal{P}([a, b])$. Pruebe que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ si y sólo si $f \in \mathcal{R}(I)$, para cada $I \in P$. En este caso pruebe que $\int_a^b f = \sum_{I \in P} \int_I f$, donde $\int_I f$ denota la integral de Riemann de $f$ en $I$.

2. Demuestre la proposición 8.3.7

3. Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Pruebe que la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f$; es Lipschitziana en $[a,b]$. En particular, $F$ es continua en $[a,b]$.

   Ahora sólo suponga que $f$ es acotada en $[a,b]$ y defina $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $H(x) = \overline{\int}_a^x f$. Muestre que $H$ es Lipschitziana en $[a,b]$. En particular, $H$ es continua en $[a,b]$. ¿Qué puede decir si en lugar de la integral superior usamos la inferior?

## 8.4. El Teorema Fundamental del Cálculo

El objeto de esta sección es poner en evidencia las relaciones existentes entre los conceptos de derivación e integración. El resultado principal dice, grosso modo, que estos procesos son inversos el uno del otro.

**Teorema 8.4.1.** *Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Si $f$ es continua en un punto $c \in (a,b)$, entonces la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f$$

*es derivable en $c$ y $F'(c) = f(c)$*

**Demostración.** Pongamos $m = f(c)$ y sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función constante de valor $m$. De la proposición 8.3.7(iv) se sigue que $\int_c^x g = m(x-c)$ y de la parte (iii) de la misma proposición se obtiene que

$$F(x) - F(c) - m(x-c) = \int_c^x (f-g) \tag{4.1}$$

para todo $x \in [a,b]$. Fijemos $\epsilon > 0$. Ya que $f$ es continua en $c$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(c)| < \epsilon$, si $|z - c| < \delta$. De aquí,

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon, \text{ si } |z-c| < \delta. \tag{4.2}$$

De la proposición 8.3.7(v) se tiene que $|\int_c^x (f-g)| \leq |\int_c^x |(f-g)||$. De aquí, de (4.2) y de la proposición 8.3.4 se tiene que $|\int_c^x (f-g)| \leq \epsilon|x-c|$, si $|x-c| < \delta$. Por (4.1),

$$|F(x) - F(c) - m(x-c)| \leq \epsilon|x-c|, \quad \text{si} \quad |x-c| < \delta,$$

lo cual dice que $F$ es diferenciable en $c$ y que $F'(c) = m$. ■

**Corolario 8.4.2.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y supongamos que existe $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$ tal que $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces,*

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

**Demostración.** Como $f$ es continua, entonces $f$ es integrable (por la proposición 8.2.6). Sea $F$ como en el teorema anterior, es decir, $F(x) = \int_a^x f$ para $x \in [a,b]$. Como $f$ es continua en $[a,b]$, en particular es acotada, digamos que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Luego de la proposiciones 8.3.4 y

8.3.7 se sigue $|F(x)-F(y)| = |\int_x^y f| \leq M|x-y|$ para todo $x, y \in [a,b]$. En particular, $F$ es continua en $[a,b]$. Por otra parte, el teorema 8.4.1 nos asegura que $F$ es diferenciable en $(a,b)$ y que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$. De modo que la función $F - G$ satisface las hipótesis del corolario 7.3.4. Luego, $F - G$ es constante y así, $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$. Es decir, $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ y el resultado se sigue de la definición de $F$. ■

Una función $G$ que cumpla que $G' = f$ es llamada **una primitiva de** $f$. El corolario anterior es el que permite, en la práctica, el cálculo de la integral de Riemann. Por ejemplo, sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Ya que la función $G(x) = x^{n+1}/(n+1)$ es una primitiva de $f$, se sigue del corolario anterior que $\int_a^b f = [b^{n+1} - a^{n+1}]/(n+1)$, relación que no es nada obvia a partir de la definición de integral.

Terminaremos esta sección dando soporte teórico a dos métodos de integración conocidos con los nombres de: **cambio de variables** e **integración por partes**. Comenzaremos extendiendo el concepto de función $C^1$ que vimos en la sección 7.4 referido solamente a funciones definidas en intervalos abiertos. Diremos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de **es de clase** $C^1$ si la restricción de $f$ a $(a,b)$ es de clase $C^1$ y la derivada lateral derecha en $a$ y lateral izquierda en $b$ existen. Por esta última condición podemos hablar de $f'$ como función definida en $[a,b]$. Dejamos como ejercicio mostrar que en este caso tanto $f$ como $f'$ son continuas en $[a,b]$

**Corolario 8.4.3.** *(Cambio de Variable) Sea $g : [a,b] \to [c,d]$ de clase $C^1$ y sea $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $(f \circ g) \cdot g'$ es continua y además*

$$\int_a^b (f \circ g) \cdot g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

**Demostración.** Ya mencionamos que bajo las condiciones que definen la clase $C^1$ se tiene que $g$ y $g'$ son continuas (ver ejercicio 1), luego por la proposición 6.2.3, $(f \circ g) \cdot g'$ es continua. Definamos ahora $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ por $F(y) = \int_c^y f$ y sea $G := F \circ g$. Por la Regla de la Cadena y el teorema 8.4.1, $G' = (f \circ g) \cdot g'$ en $(a,b)$. Además, $G$ es continua en $[a,b]$, y por el corolario 8.4.2,

$$\int_a^b (f \circ g) \cdot g' = G(b) - G(a) = \int_c^{g(b)} f - \int_c^{g(a)} f = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

La última igualdad se sigue de la proposición 8.3.7(iii). ■

**Corolario 8.4.4.** *(Integración por Partes) Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1$. Entonces,*

$$\int_a^b f' \cdot g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f \cdot g'.$$

**Demostración.** Es fácil verificar que $f \cdot g$ es de clase $C^1$ (ver ejercicio 4), y que $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. Además, por el corolario 8.4.2,

$$\int_a^b (f \cdot g)' = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a)$$

y de esto se sigue inmediatamente el resultado. ■

**Proposición 8.4.5.** *(Fórmula de Taylor con Resto Integral) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^n$ en un intervalo abierto $I$, donde $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $a \in I$ y sea $P_{n-1}$ el polinomio de Taylor de orden $n-1$ de $f$ alrededor de $a$ (definido por la ecuación (5.1) de la sección 7.5). Entonces, para cada $z \in I$ se tiene*

$$f(z) = P_{n-1}(z) + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^z (z-x)^{n-1} f^{(n)}(x)dx. \tag{4.3}$$

**Demostración.** (Por inducción) Para $n = 1$, $P_0$ es constante igual a $f(a)$ y así, la fórmula anterior es equivalente a decir que $f(z) = f(a) + \int_a^z f'$. Luego, para $n = 1$, el resultado es equivalente al corolario 8.4.2.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para todas las funciones de clase $C^n$, (algún $n \in \mathbb{N}$), y asumamos que $f \in C^{n+1}$. Por la proposición 7.4.2, $f \in C^n$ y por lo tanto, vale la fórmula (4.3). Por otra parte, aplicando Integración por Partes a las funciones $F(x) := -(z-x)^n/n$ y $G(x) := f^{(n)}(x)$; $x \in [a, z]$; obtenemos,

$$\begin{aligned}\int_a^z (z-x)^{n-1} f^{(n)}(x)dx &= \int_a^z F'(x)G(x)dx = F(z)G(z) - F(a)G(a) - \int_a^z F(x)G'(x)dx \\ &= \frac{(z-a)^n}{n} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n}\int_a^z (z-x)^n f^{(n+1)}(x)dx,\end{aligned}$$

porque $F(z) = 0$. Reemplazando esta igualdad en (4.3) vemos que nuestra fórmula vale para $n+1$ en lugar de $n$. ■

**Proposición 8.4.6.** *La aplicación $L : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{z}dz,$$

*es una función biyectiva de clase $C^\infty$ tal que $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$. Es decir, $L$ es una función logarítmica. De hecho, la función $L$ se suele denotar por* ln *y se llama* **logaritmo neperiano**.

**Demostración**. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ positivos, entonces

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{z}dz = \int_1^x \frac{1}{z}dz + \int_x^{xy} \frac{1}{z}dz,$$

y usando el Teorema del Cambio de Variables con $z = g(u) = xu$ obtenemos

$$\int_x^{xy} \frac{1}{z}dz = \int_1^y \frac{1}{u}du = L(y).$$

Por otra parte, del Teorema Fundamental del Cálculo (teorema 8.4.1), $L'(x) = 1/x$, de modo que $L' \in C^\infty$ y por ende, $L \in C^\infty$. Note también que $L$ es estrictamente creciente, ya que $L' > 0$. En particular, $L$ es inyectiva.

En fin, por inducción, $L(2^n) = nL(2)$; $L(2^{-n}) = -nL(2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$; y como $L(2) > L(1) = 0$ concluímos que $L(2^n) \to +\infty$ y $L(2^{-n}) \to -\infty$. Como $L$ es continua y su dominio es un intervalo, concluimos que el rango de $L$ es un intervalo (proposición 6.3.6). Por lo anterior, necesariamente el rango de $L$ es $\mathbb{R}$ y por ende $L$ es sobreyectiva. ■

**Ejercicios.**

1. Pruebe que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1$, entonces $f$ y $f'$ son continuas en $[a, b]$.

2. Muestre que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1$ si y sólo si ella posee una extensión $F : I \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ definida en un intervalo abierto $I$ (que contiene a $[a, b]$).

3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ y sean $F : I \to \mathbb{R}$, $G : J \to \mathbb{R}$ extensiones de $f$ de clase $C^1$, definidas en intervalos abiertos $I, J$. Pruebe que $F' = G'$ en $[a, b]$. Esto permite definir $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ como la restricción de $F'$. En particular, $f'$ es continua.

4. Pruebe que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son de clase $C^1$, entonces $f \cdot g$ también lo es y $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

5. Sea $L$ dada por la proposición 8.4.6 y sea $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ su inversa. Pruebe que $E$ es una exponencial, de clase $C^\infty$, tal que $E' = E$. Concluya que toda exponencial continua es $C^\infty$.

6. Use el ejercicio 3 de la sección 8.3 para construir una función Lipschitziana en $[a, b]$ que no sea diferenciable en todo punto de $[a, b]$.

7. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$
Muestre que

   *a*) $G$ está bien definida y que es una función impar (es decir, $G(-x) = -G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

   *b*) $G$ es estrictamente creciente.

   *c*) Para todo entero positivo $k$, se cumple que
   $$\frac{1}{1+k^2} \leq G(k) - G(k-1) \leq \frac{1}{1+(k-1)^2}.$$
   Concluya de lo anterior que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} \leq G(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k-1)^2}.$$
   para todo entero positivo $n$.

   *d*) Muestre que el rango de $G$ es un intervalo abierto $(-a, a)$ para algún real $a > 0$. *Ayuda:* Note que $1/k^2 < 1/k(k-1)$ para $k \geq 2$ y úselo para mostrar que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$ para todo entero positivo $n$.

## 8.5. Integrabilidad y Continuidad.

El objeto de esta sección es caracterizar las funciones Riemann integrables, en términos de su subconjunto de discontinuidades. El resultado principal de esta sección dice que $f \in \mathcal{B}([a,b])$ es R-integrable en $[a,b]$ si y sólo si, el conjunto $D$ de discontinuidades de $f$ es "pequeño", en el sentido que: para cualquier $\epsilon > 0$ existe un cubrimiento de $D$, por una familia de intervalos abiertos, cuya suma de longitudes no excede $\epsilon$. La longitud de un intervalo $I$ de extremidades finitas $c < d$, es el número $l(I) := d - c$.

Fijemos $f \in \mathcal{B}([a,b])$ y $c \in [a,b]$. La **oscilación de $f$ en $c$** es el número no negativo $\omega(f,c)$ definido por:

$$\omega(f,c) = \inf\{\Omega(f,[a,b] \cap (c-\delta, c+\delta)) : \delta > 0\}.$$

**Proposición 8.5.1.** *Sea $f \in \mathcal{B}([a,b])$ y $c \in [a,b]$. $f$ es continua en $c$ si y sólo si $\omega(f,c) = 0$.*

**Demostración.** Supongamos que $f$ es continua en $c$ y fijemos $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| \leq \epsilon/2$ si $|x - c| \leq \delta$. De aquí,

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon, \quad \text{si} \quad x, y \in (c-\delta, c+\delta).$$

Es decir, $\Omega(f,[a,b] \cap (c-\delta, c+\delta)) \leq \epsilon$ y por lo tanto, $\omega(f,c) \leq \epsilon$. De la proposición 2.2.1, $\omega(f,c) = 0$.

Supongamos ahora que $\omega(f,c) = 0$ y fijemos $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\Omega(f,[a,b] \cap (c-\delta, c+\delta)) < \epsilon$. De aquí se sigue que $|f(x) - f(c)| < \epsilon$, si $|x - c| < \delta$ y $x \in [a,b]$. ■

**Proposición 8.5.2.** *Sea $f \in \mathcal{B}([a,b])$. Para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $D_\epsilon := \{x \in [a,b] : \omega(f,x) \geq \epsilon\}$ es cerrado (y en consecuencia, compacto).*

**Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión de $D_\epsilon$ que converge a $x \in \mathbb{R}$ y note que $x \in [a,b]$, porque ese intervalo es cerrado. Supongamos por el absurdo que $x \notin D_\epsilon$, entonces $\omega(f,x) < \epsilon$ y por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $\Omega(f,[a,b] \cap (x-\delta, x+\delta)) < \epsilon$. Por otra parte, como $x_n \to x$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in (x-\delta, x+\delta)$ y en consecuencia, existe $r > 0$ tal que $(x_i - r, x_i + r) \subset (x-\delta, x+\delta)$. En particular,

$$\omega(f,x_i) \leq \Omega(f,[a,b] \cap (x_i - r, x_i + r)) \leq \Omega(f,[a,b] \cap (x-\delta, x+\delta)) < \epsilon,$$

lo cual dice que $x_i \notin D_\epsilon$. Esta contradicción termina la prueba. ■

Se dice que un subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$ **tiene medida cero**; denotado $m(A) = 0$; si para cada $\epsilon > 0$ existe un cubrimiento $\mathcal{U}$ de $A$, por intervalos abiertos, tal que la suma de sus longitudes no excede $\epsilon$, es decir, $\sum_{I \in \mathcal{U}} l(I) < \epsilon$. Es evidente que todo subconjunto de uno de medida cero, tiene medida cero.

**Ejemplos:**

1. Sea $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ un conjunto finito de reales. Mostraremos que $F$ tiene medida cero. En efecto, dado $\epsilon > 0$ considere los intervalos abiertos $U_i = (x_i - \epsilon/2n, x_i + \epsilon/2n)$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$. Note que los $U_i$ claramente forman un cubrimiento de $F$. Por otra parte, $l(U_i) = \epsilon/n$ para cada $i$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^n l(U_i) < \epsilon$.

2. Mostraremos que $\mathbb{N}$ tiene medida cero. En efecto, fijemos $\epsilon > 0$ y tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el siguiente intervalo abierto
$$U_n = (n - \epsilon/2^{n+2}, n + \epsilon/2^{n+2})$$
Note que $l(U_n) = \epsilon/2^{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por último observe que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon/2^{n+1} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{n+1} = \epsilon/2$$

3. Veremos en seguida que $\mathbb{Q}$ también tiene medida cero, por ser un conjunto numerable.

**Proposición 8.5.3.** *Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos de medida cero, entonces lo mismo ocurre con su unión.*

**Demostración.** Sea $A := \cup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Fijemos $\epsilon > 0$. Sabemos que cada $A_n$ posee un cubrimiento $\mathcal{U}_n$, formada por una colección numerable de intervalos abiertos, tal que la suma de sus longitudes es menor que $2^{-n}\epsilon$. Como la unión de una familia numerable de colecciones numerables es numerable (ver proposición 3.4.5), se tiene que la unión $\mathcal{U}$ de estos $\mathcal{U}_n$ es un cubrimiento numerable de $A$, por intervalos abiertos. Notemos que
$$\sum_{I \in \mathcal{U}} l(I) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{I \in \mathcal{U}_n} l(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n}\epsilon = \epsilon.$$
(en el ejercicio 8 de la sección 4.12 el lector interesado encontrará una justificación precisa de la última afirmación). ∎

**Proposición 8.5.4.** *Sea $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Entonces para cada $r > 0$, el conjunto $D_r := \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq r\}$ tiene medida cero.*

**Demostración.** Fijemos $\epsilon > 0$ y recordemos que, por la proposición 8.2.4, existe $P \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que
$$U(f, P) - L(f, P) < r\epsilon. \tag{5.1}$$
Considere el conjunto finito $F$ formado por los extremos de los intervalos en $P$. Vimos en el ejemplo arriba que $F$ tiene medida cero. Como $D_r \subseteq (D_r \setminus F) \cup F$, entonces, por la proposición 8.5.3, bastará ver que $D_r \setminus F$ tiene medida cero. Sea $E := D_r \setminus F$.

Pongamos $Q = \{I \in P : \ \mathrm{int}(I) \cap E \neq \emptyset\}$. Dado $x \in E$, existe $I \in P$ tal que $x \in I$, y como $x \notin F$, entonces $x \in \mathrm{int}(I)$. De aquí, el conjunto $\mathcal{U} := \{\mathrm{int}(I) : I \in Q\}$ es un cubrimiento de $E$ por intervalos abiertos. Sea $I \in Q$ y fijemos $c \in \mathrm{int}(I) \cap E$. Fijemos también $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c+\delta) \subset I$ y notemos que,

$$\Omega(f, I) \geq \Omega(f, [a,b] \cap (c-\delta, c+\delta)) \geq \omega(f, c) \geq r.$$

Así,

$$r \sum_{I \in Q} l(I) \leq \sum_{I \in Q} \Omega(f, I) l(I) \leq \sum_{I \in P} \Omega(f, I) l(I) = U(f, P) - L(f, P),$$

y por (5.1), $\sum_{I \in Q} l(I) \leq \epsilon$. Tenemos entonces que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de $E$ por intervalos abiertos, cuya suma de longitudes es menor que $\epsilon$. ■

**Teorema 8.5.5.** *Sea $f \in \mathcal{B}([a,b])$. Entonces, $f \in \mathcal{R}([a,b])$ si y sólo si, el conjunto $D$, de discontinuidades de $f$, tiene medida cero.*

**Demostración.** Supongamos primero que $m(D) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, existen intervalos abiertos $I_1, \cdots, I_k, \cdots$ tales que

$$D \subset \bigcup_k I_k \ \text{ y } \ \sum_k l(I_k) < \frac{\epsilon}{2K}, \tag{5.2}$$

donde $K$ es la oscilación de $f$ en $[a,b]$. Para cada $x \in [a,b] \setminus D$ existe un intervalo abierto $J_x$ de centro $x$ tal que $\Omega(f, [a,b] \cap J_x) \leq \epsilon/2(b-a)$. Como la colección de intervalos $I_k$ y $J_x$ para $k \geq 1$ y $x \in [a,b] \setminus D$ forman un cubrimiento por abiertos del compacto $[a,b]$, entonces existe $m \geq 1$ y $x_1, \cdots, x_n$ en $[a,b] \setminus D$ tales que $[a,b] \subset I_1 \cup \cdots \cup I_m \cup J_{x_1} \cup \cdots \cup J_{x_n}$. Sea $P$ la partición de $[a,b]$ formada por los extremos de esos intervalos (que pertenezcan a $[a,b]$). Denotaremos con $[t_{i-1}, t_i]$ los intervalos que están contenidos en algún $I_k$ y con $[s_{j-1}, s_j]$ el resto de los intervalos de $P$. De (5.2) se tiene que $\sum_i l([t_{i-1}, t_i]) < \epsilon/2K$. Denotemos con $\Omega_i$ a $\Omega(f, [a,b] \cap [t_{i-1}, t_i])$. Por la elección de los $J_x$ se tiene también que $\Omega_j := \Omega(f, [a,b] \cap [s_{j-1}, s_j]) \leq \epsilon/2(b-a)$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
U(f,P) - L(f,P) &= \sum_i \Omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) + \sum_j \Omega_j \cdot (s_j - s_{j-1}) \\
&< \sum_i K \cdot (t_i - t_{i-1}) + \sum_j \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (s_j - s_{j-1}) \\
&< \frac{K\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon(b-a)}{2(b-a)} = \epsilon
\end{aligned}$$

y por la proposición 8.2.4, $f$ es R-integrable en $[a,b]$.

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y definamos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $E_k = \{x \in [a,b] : \omega(f,x) \geq 1/k\}$. De la proposición 8.5.1, $D$ es la unión de los $E_k$, y de las proposiciones 8.5.4-8.5.3, $m(D) = 0$. ■

**Ejercicios:**.

1. Pruebe que todo conjunto numerable tiene medida cero.

2. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $[a,b]$. Muestre que existe $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que cada $I \in P$ está contenido en algún $U \in \mathcal{U}$. *Sugerencia:* Dado $x \in [a,b]$ escoja $W_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in W_x$. Como $W_x$ es abierto, existe $\delta(x) > 0$ tal que $(x - 2\delta(x), x + 2\delta(x)) \subset W_x$. Por otra parte, $\{(x - \delta(x), x + \delta(x)) : x \in [a,b]\}$ es un cubrimiento abierto de $[a,b]$ y en consecuencia existen $x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ tales que $\{(x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)) : 1 \leq i \leq n\}$ es un cubrimiento de $[a,b]$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$; elija $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > \alpha := (b-a)/N$ y defina $P = \{[a + (k-1)\alpha, a + k\alpha] : 1 \leq k \leq N\}$. Es claro que $P$ es una partición de $[a,b]$ y que todo $I \in P$ tiene longitud $\alpha$. En particular, $|x - c| \leq \alpha$ si $x, c \in I$ e $I \in P$. Muestre que $P$ satisface la conclusión.

3. Suponga que existe $k > 0$ tal que $\omega(f,x) < k$ para todo $x \in [a,b]$. Muestre que existe una partición $P$ de $[a,b]$ tal que $\Omega(f,I) < k$ para todo $I \in P$. En particular, $U(f,P) - L(f,P) \leq k(b-a)$. *Ayuda.* Para cada $x \in [a,b]$ existe $\delta_x > 0$ tal que $\Omega(f, [a,b] \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)) < k$. Entonces $\{(x - \delta_x, x + \delta_x) : x \in [a,b]\}$ es un cubrimiento de $[a,b]$. Use el ejercicio 2.

## 8.6. Integrales Impropias.

Por integral impropia se entiende aquella donde el intervalo donde se integra no es acotado, o no es cerrado o la función que se integra no es acotada.

En esta sección, $f : I \to \mathbb{R}$ denota una función definida en un intervalo no degenerado $I$ y $\mathcal{J}$ denota la familia de todos los intervalos compactos $J$ contenidos en $I$. A fin de enunciar nuestros resultados con mayor comodidad, diremos que $f$ **es de tipo R** si $f \in \mathcal{R}(J)$, para cualquier $J \in \mathcal{J}$. En este caso, dado $J = [a,b] \in \mathcal{J}$, pondremos $\int_J f = \int_a^b f$.

Las redes (ver sección 4.12) serán la herramienta fundamental para lo que sigue. En particular, el lector probará que $\mathcal{J}$ es un conjunto dirigido. Por lo tanto, si $f$ es de tipo R, entonces $\{\int_J f\}_{J \in \mathcal{J}}$ es una red y en el caso que sea convergente, diremos que $f$ **es Cauchy-Riemann integrable en** $I$ y pondremos $f \in \mathcal{CR}(I)$. En este caso, el límite de la red $\{\int_J f\}$ será denotado por $\int_I f$ y lo llamaremos **la integral de Cauchy-Riemann de** $f$ **en** $I$.

Si $I = [a,b]$ es compacto, entonces $I \in \mathcal{J}$ y por el ejercicio 1 de la sección 4.12, la red $\{\int_J f\}$ converge a $\int_I f = \int_a^b f$. Esto dice que si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces $f \in \mathcal{CR}([a,b])$ y que la integral de Cauchy-Riemann de $f$ coincide con la integral de Riemann de $f$. Esto justifica la notación escogida para denotar la integral de Cauchy-Riemann. El uso de redes permite un tratamiento general de las integrales impropias sin importar el tipo del intervalo $I$. El siguiente resultado, que se demostrará la final, contiene las propiedades mas importantes de la integral impropia de Riemann.

**Teorema 8.6.1.** *Supongamos que $f$ es de tipo R y sea* *a)* $I = [a, b)$ *con* $b \leq +\infty$. *Entonces,* $f \in \mathcal{CR}(I)$ *si y sólo si, la función* $F : [a, b) \to \mathbb{R}; \quad F(x) = \int_a^x f$; *tiene límite, cuando* $x$ *tiende a* $b$.

*b)* $I = (a, b]$, *con* $-\infty \leq a$. *Entonces,* $f \in \mathcal{CR}(I)$ *si y sólo si, el siguiente límite existe:* $\lim_{x \to a} \int_x^b f$.

*c)* $I = (a, b)$. *Entonces,* $f \in \mathcal{CR}(I)$ *si y sólo si* $f \in \mathcal{CR}((a, c)) \cap \mathcal{CR}((c, b))$, *para algún* $c \in I$. *En ambos casos,* $\int_I f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Antes de presentar las herramientas para probar este teorema ilustraremos su uso mediante algunos ejemplos.

**Ejemplos:** Sean $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ las extremidades de $I$. Si $f$ es de tipo R y $f \in \mathcal{CR}(I)$, pondremos $\int_I f = \int_a^b f$. Consideremos ahora los siguientes ejemplos:

1. La función $f : (0, 1] \to \mathbb{R}; \quad f(x) = x^{-1/2}$; es de tipo R, por ser continua. Por otra parte, para $0 < x \leq 1$ tenemos, $\int_x^1 f = 2[1 - x^{1/2}]$, porque $G(x) := 2x^{1/2}$ es una primitiva de $f$. De aquí y la parte b) de la proposición 8.6.1, $f \in \mathcal{CR}((0, 1])$ y $\int_0^1 f = 2$.

2. Igual que en el ejemplo anterior, la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}; \quad f(x) = x^{-2}$; es de tipo R. Además, $\int_1^x f = 1 - x^{-1}$, para cada $x > 1$, y por la parte a) de la proposición 8.6.1, $f \in \mathcal{CR}([1, +\infty))$ y $\int_1^{+\infty} f = 1$.

**Proposición 8.6.2.** *Sea* $f$ *de tipo R. Entonces,* $f \in \mathcal{CR}(I)$ *si y sólo si, para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $J_0 \in \mathcal{J}$ *tal que* $|\int_H f| < \epsilon$, *si* $H \in \mathcal{J}$ *y* $H \cap J_0$ *es degenerado.*

**Demostración.** Supongamos que $f \in \mathcal{CR}(I)$ y fijemos $\epsilon > 0$. Ya que la red $\{\int_J f\}$ es de Cauchy (por ser convergente), existe $J_0 \in \mathcal{J}$ tal que

$$|\int_J f - \int_K f| < \epsilon \quad \text{si} \quad J_0 \subset J, K \in \mathcal{J}. \tag{6.1}$$

Fijemos $H \in \mathcal{J}$ tal que $H \cap J_0$ es degenerado. Es fácil ver (justificar) que existe $K \in \mathcal{J}$ conteniendo a $J_0$ tal que $K \cap H$ es un conjunto singular. En particular, $J := K \cup H$ es un intervalo compacto e $\int_J f - \int_K f = \int_H f$. De aquí y (6.1), $|\int_H f| < \epsilon$.

Recíprocamente, dado $\epsilon > 0$ fijemos $J_0 \in \mathcal{J}$ tal que $|\int_H f| < \epsilon/4$ si $H \in \mathcal{J}$ y $H \cap J_0$ es degenerado. Si $J_0 \subset J \in \mathcal{J}$, podemos escribir $J = A \cup J_0 \cup B$, donde $A, B \in \mathcal{J}$ y $A \cap B$ $A \cap J_0$ $B \cap J_0$ son degenerados. De aquí,

$$\int_J f = \int_A f + \int_{J_0} f + \int_B f.$$

Análogamente, si $J_0 \subset K \in \mathcal{J}$, entonces $\int_K f = \int_C f + \int_{J_0} f + \int_D f$, para ciertos intervalos $C, D \in \mathcal{J}$ tales que $C \cap J_0$ y $D \cap J_0$ son degenerados. Así,

$$|\int_J f - \int_K f| \leq |\int_A f| + |\int_B f| + |\int_C f| + |\int_D f| < 4(\epsilon/4) = \epsilon,$$

lo cual muestra que $\{\int_J f\}$ es de Cauchy. El resultado se sigue ahora de la proposición **??**. ∎

**Proposición 8.6.3.** *Supongamos que $f$ es de tipo $R$ y que la red $\{\int_J f\}$ es acotada. Entonces, $f, |f| \in \mathcal{C}R(I)$ y*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

**Demostración.** Por el ejercicio 4, $\{\int_J |f|\}$ es convergente y en consecuencia, de Cauchy. Así, dado $\epsilon > 0$, existe $H \in \mathcal{J}$ tal que, $\int_J |f| \leq \epsilon$, si $J \in \mathcal{J}$ y $J \cap H$ es degenerado. Se sigue de la proposición 8.2.1 que, para tales $J$ se tiene, $|\int_J f| \leq \epsilon$, de modo que, por la proposición anterior, $f \in \mathcal{C}R(I)$. La prueba se sigue ahora de las proposiciones 8.2.1 y 4.12.3. ■

**Proposición 8.6.4.** *Supongamos que $f$ es de tipo $R$ y sea $c \in \mathrm{int}(I)$. Pongamos $A = (-\infty, c] \cap I$, $\quad B = [c, +\infty) \cap I$, y supongamos que $f \in \mathcal{C}R(A) \cap \mathcal{C}R(B)$. Entonces, $f \in \mathcal{C}R(I)$ y*

$$\int_I f = \int_A f + \int_B f.$$

**Demostración.** Sea $\mathcal{J}_A$ (resp. $\mathcal{J}_B$) el conjunto de todos los intervalos compactos contenidos en $A$ (resp. $B$) y fijemos $\epsilon > 0$. Por hipótesis, existen $J^A \in \mathcal{J}_A,\ J^B \in \mathcal{J}_B$ tales que,

$$|\int_A f - \int_C f| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si} \quad C \in \mathcal{J}_A \quad \text{y} \quad C \supset J^A, \tag{6.2}$$

$$|\int_B f - \int_D f| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si} \quad D \in \mathcal{J}_B \quad \text{y} \quad D \supset J^B. \tag{6.3}$$

Fijemos $J_0 \in \mathcal{J}$ conteniendo a $J^A \cup J^B$ y sea $J \in \mathcal{J}$ conteniendo a $J_0$. Si escribimos $C = J \cap A, \quad B = J \cap B$, entonces, de la proposición 8.3.6 se tiene, $\int_J f = \int_C f + \int_D f$, y de aquí,

$$|\int_J f - \int_A f - \int_B f| \leq |\int_C f - \int_A f| + |\int_D f - \int_B f|.$$

El resultado se sigue ahora de (6.2)-(6.3), puesto que, $C \supset J^A$ y $D \supset J^B$. ■

**Demostración del teorema 8.6.1.** Es claro que la parte c), se sigue de las partes a)-b) y la proposición 8.6.4. Por otra parte, las pruebas de a) y b) son similares entre sí, por lo cual, nos ocuparemos sólo de la prueba de a).

Supongamos que $f \in \mathcal{C}R(I)$ y fijemos $\epsilon > 0$. Entonces, existe $J_0 \in \mathcal{J}$ tal que, $|\int_I f - \int_J f| \leq \epsilon$, si $J \in \mathcal{J}$ y $J \supset J_0$. Escribamos $J_0 = [d, c]$ y sea $x \in [c, b)$; entonces, $[a, x] \supset J_0$ y de aquí,

$$|\int_I f - \int_a^x f| \leq \epsilon.$$

Esto prueba que $\lim_{x \to b} \int_a^x f$ existe y es igual a $\int_I f$.

Recíprocamente, supongamos que el límite anterior existe y denotemoslo por $l$. Entonces, fijado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|l - \int_a^x| \leq \epsilon$, si $b - \delta < x < b$. Tomemos $J_0 = [a, b - \delta]$ y sea $J \in \mathcal{J}$ conteniendo a $J_0$. Si escribimos $J = [a, x]$, tendremos $x \geq b - \delta$ y de aquí, $|l - \int_a^x f| \leq \epsilon$. Esto prueba que la red $\{\int_J f\}$ converge a $l$. ■

**Ejercicios.**

1. Pruebe que $f$ es de tipo R si y sólo si $f$ es acotada en cada subconjunto compacto de $I$ y las discontinuidades de $f$ forman un conjunto de medida cero.

2. Pruebe que la función $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(1/n) = n \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x \neq \tfrac{1}{n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

es de tipo R, pero no acotada.

3. Pruebe que si $f, g : I \to \mathbb{R}$ son de tipo R, entonces $f + g$ y $\lambda f$ también lo son, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Es más, si $f, g \in \mathcal{C}R(I)$, pruebe que $f + g, \lambda f \in \mathcal{C}R(I)$ y que

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g, \qquad \int_I \lambda f = \lambda \int_I f.$$

4. Suponga que $f$ es de tipo R y que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Pruebe que si la red $\{\int_J f\}$ está acotada superiormente, entonces $f \in \mathcal{C}R(I)$ e $\int_I f = \sup\{\int_J f : J \in \mathcal{J}\}$. *Ayuda.* Use la proposición 4.12.4.

5. Pruebe que si $f$ es constante de valor $c$, entonces $f \in \mathcal{C}R(I)$ e $\int_I f = cl(I)$.

6. Suponga que $f$ es acotada de tipo R. Pruebe que si $I$ es acotado, entonces $f \in \mathcal{C}R(I)$. *Ayuda.* Note que $f + M \geq 0$, para alguna constante $M$ y aplique los dos ejercicios precedentes.

7. Sea $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ decreciente. Pruebe que la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ converge si y sólo si $f \in \mathcal{C}R([1, +\infty))$. Concluya que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$.

## 8.7. Una definición alternativa de la Integral de Riemann

Los problemas que plantearemos a continuación, tienen por objeto presentar una definición alternativa de la Integral de Riemann. Comenzaremos con una definición. Diremos que una función $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es en **escalera**, si existe una partición $P$ de $[a,b]$ tal que $\phi$ es constante en el interior de cada miembro de $P$. Es decir, $\phi$ es en escalera, si existe una partición $P$ de $[a,b]$ y una familia de números $\{c_I : I \in P\}$ tal que,

$$\phi(x) = c_I, \quad \text{si} \quad x \in \text{int}(I); \quad I \in P.$$

En este caso también se dice que $\phi$ **es en escalera respecto a** $P$. Note que si $\phi$ es en escalera respecto a $P$, entonces también lo es con respecto a cualquier partición más fina que $P$. Obviamente, toda función constante es una función en escalera.

1. Pruebe que si $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ son en escalera, entonces $\phi \pm \psi$, $\text{máx}\{\phi, \psi\}$, $\text{mín}\{\phi, \psi\}$ y $\lambda\phi$ también lo son, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Aquí, $\text{máx}\{\phi, \psi\}$ denota la función que envía $x$ en $\text{máx}\{\phi(x), \psi(x)\}$. *Ayuda.* Pruebe que $\phi$ y $\psi$ son en escalera respecto de una misma partición.

   Sea $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalera con respecto a $P$. Definimos **la integral de** $\phi$ **en** $[a,b]$, denotada $\int_a^b \phi$, mediante:

$$\int_a^b \phi = \sum_{I \in P} c_I l(I),$$

   donde $c_I$ es el valor de $\phi$ en $int(A)$.

2. Muestre que la definición anterior no depende de la partición $P$. *Ayuda.* Suponga que $\phi$ es en escalera con respecto a particiones $P, Q$ y analice primero el caso en que $Q$ es más fina que $P$. Enseguida considere una partición más fina que ambas.

3. Sean $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalera y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Muestre que:

   i) $\int_a^b (\phi + \psi) = \int_a^b \phi + \int_a^b \psi$, $\qquad \int_a^b \lambda\phi = \lambda \int_a^b \phi$.

   ii) $\int_a^b \phi \leq \int_a^b \psi$, si $\phi \leq \psi$.

   Además, si $c \in (a,b)$, entonces

   iii) $\int_a^b \phi = \int_a^c \phi + \int_c^b \phi$.

   Note que si $\phi$ es en escalera, lo mismo ocurre con la restricción de $\phi$ a cualquier intervalo $[x,y]$ contenido en $[a,b]$.

   Dada una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definimos $E^f$ (resp. $E_f$) como el conjunto de aquellas funciones en escalera que son mayores (resp. menores) que $f$. Note que $E^f$ y $E_f$ no son vacíos, porque contienen las funciones constantes de valor $M$ y $-M$, respectivamente, donde $M$ satisface: $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.

   Definimos **la integral inferior** (resp. **superior**) **de** $f$ **en** $[a,b]$, denotada $\underline{\int_a^b} f$ (resp. $\overline{\int_a^b} f$) mediante:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\int_a^b \phi : \phi \in E_f\},$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\int_a^b f : \phi \in E^f\}.$$

4. Pruebe que si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son acotadas, entonces $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$ y $\underline{\int_a^b}(f+g) \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$. *Ayuda* Pruebe que $E^{f+g} \supset \{\phi + \psi : \phi \in E^f, \psi \in E^g\}$.

   Se dice que una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **es R-integrable en** $[a,b]$, si $\underline{\int_a^b} = \overline{\int_a^b} f$. En este caso, ése valor común se denota por $\int_a^b f$ y se le llama **la integral de** $f$ **en** $[a,b]$.

5. Pruebe que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son R-integrables en $[a, b]$, entonces lo mismo ocurre con $f + g$ y $\lambda f$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ y $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

   Pruebe también que $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, si $f \leq g$.

6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Pruebe que $f$ es R-integrable en $[a, b]$, si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existen $\phi \in E_f$ y $\psi \in E^f$ tales que $\int_a^b (\psi - \phi) \leq \epsilon$.

   Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definimos $f^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ mediante, $f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}$. El lector comprobará que $2f^+ = f + |f|$.

7. Pruebe que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es R-integrable en $[a, b]$, entonces lo mismo vale para $f^+$. *Ayuda.* Dado $\epsilon > 0$, escoja $\phi \in E_f$ y $\psi \in E^f$ tales que $\int_a^b (\psi - \phi) \leq \epsilon$. Use ahora las relaciones $2g^+ = g + |g|$ y $|\psi| - |\phi| \leq |\psi - \phi| = \psi - \phi$, para probar que $\psi^+ - \psi^+ \leq \psi - \phi$.

   Deduzca que $|f|$ es R-integrable en $[a, b]$ y que $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

# Capítulo 9

# Sucesiones de Funciones

## 9.1. Convergencia Puntual y Uniforme

En esta sección, $\{f_n\}$ denota una sucesión de funciones $f_n : I \to \mathbb{R}$, definidas en un intervalo $I$. Se dice que $\{f_n\}$ **converge punto por punto**, si la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge, para cada $x \in I$. En este caso, podemos definir una función $f : I \to \mathbb{R}$ mediante:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x),$$

y se dirá que $f$ **es el límite puntual de** $\{f_n\}$ ó que $\{f_n\}$ **converge puntualmente a** $f$.

**Ejemplos.**

1. Consideremos la sucesión $\{f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\}$, definida por $f_n(x) = x^n$. Usando el ejemplo i) de la sección 4.2 tenemos que, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$. Véase fig **??**

Incluir gráfica

2. Sea $\{f_n\}$ la sucesión definida por $f_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}; f(x) = x^{1/n}$. Del ejercicio 6 de la sección 4.3, $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función constante $f(x) = 1$ para $x > 0$.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión convergente punto por punto. Dado $x \in I$ y $\epsilon > 0$, existe un natural $n_0$ tal que, $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ si $n \geq n_0$. El ejercicio 1 pone en evidencia que éste número $n_0$ depende, en general, tanto de $\epsilon$ como de $x$. Cuando sea posible elegir $n_0$ independiente de $x \in I$, diremos que la *convergencia es uniforme*. Más precisamente, diremos que una sucesión $\{f_n\}$ **converge uniformemente a** $f : I \to \mathbb{R}$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq N, \quad \textbf{para todo} \quad x \in I.$$

Véase fig. **??**. En este caso también se dice que $f$ **es el límite uniforme de las** $\{f_n\}$.

Note que si $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$, entonces $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$, para cada $x \in I$. Es decir, $\{f_n\}$ converge punto por punto a $f$.

Incluir gráfica

El próximo teorema dice que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua.

**Teorema 9.1.1.** *Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f : I \to \mathbb{R}$ y cada $f_n$ es continua, entonces $f$ también lo es.*

**Demostración.** Fijemos $x_0 \in I$ y $\epsilon > 0$. De la defición de convergencia uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{si} \quad n \geq N \quad \text{y} \quad x \in I. \tag{1.1}$$

Por otra parte, como $f_N$ es continua en $x_0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{si} \quad |x - x_0| \leq \delta. \tag{1.2}$$

En fin, de la relación

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|,$$

y de las ecuaciones (1.1)-(1.2), se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$, si $|x - x_0| \leq \delta$. ∎

El teorema anterior nos proporciona un criterio para saber si una convergencia punto por punto (de una sucesión de funciones continuas) no es uniforme. Pués bastaría saber que el límite puntual no es una función continua. Por ejemplo, la convergencia de la sucesión del ejemplo 1 no es uniforme, porque su límite es la función discontinua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$.

**Proposición 9.1.2.** *(*Criterio de Cauchy*) Supongamos que para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \quad si \quad m, n \geq N \quad y \quad x \in I. \tag{1.3}$$

*Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f : I \to \mathbb{R}$.*

**Demostración.** De (1.3) se sigue rápidamente que $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy, para cada $x \in I$. Esto permite definir una función $f : I \to \mathbb{R}$ mediante:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Tomando límite en (1.3), cuando $m \to \infty$, queda,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq N,$$

lo cual termina la prueba. ■

**Ejercicios.**

1. Considere la sucesión del ejemplo 1 y fije $x \in (0,1)$. Dado $\epsilon \in (0,1)$, calcule el menor número natural $n_0$ tal que,
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq n_0,$$
donde $f$ denota el límite puntual de $\{f_n\}$. Observe que este número, $n_0 = n_0(\epsilon, x)$, depende de $x$ y de $\epsilon$. Note también que, para cada $\epsilon > 0$ dado, $n_0(\epsilon, x) \to \infty$, cuando $x \to 0$. Concluya que dado $\epsilon > 0$, no es posible encontrar un natural $N$ tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ si $n \geq N$ y $x \in (0,1)$.

2. Considere la situación del ejemplo 2 y fije $\epsilon > 0$. Use reducción al absurdo para mostrar que no existe un natural $N$ tal que, $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$, si $n \geq N$ y $x > 0$.

3. Pruebe que la sucesión $\{f_n\}$ donde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por:
$$f_n(x) = nx, \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}$$
$$\text{y} \quad f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \geq \frac{1}{n},$$
converge punto por punto. *Ayuda.* Grafique las $f_n$ para algunos valores de $n$.

4. Sea $f_n(x) = \frac{x}{n}$ para $x \in I$. Pruebe que $\{f_n\}$ converge uniformemente si y sólo si $I$ es acotado.

5. Pruebe que si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son sucesiones uniformemente convergentes a $f$ y $g$ respectivamente, entonces $\{f_n + g_n\}$ converge uniformemente a $f + g$. Muestre un resultado análogo para el producto, suponiendo además que $f$ y $g$ son acotadas.

6. Suponga que $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión en $I$ que converge a un punto $x_0 \in I$. Pruebe que $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

7. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$; $f(x) = 2 - nx$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$ y $f(x) = 0$ si $x \geq \frac{2}{n}$. Pruebe que $\{f_n\}$ converge punto por punto a la función constante $f(x) = 0; 0 \leq x \leq 1$ y use el ejercicio anterior para mostrar que esa convergencia no es uniforme.

8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $\epsilon > 0$. Pruebe que existe una función en escalera $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que, $|f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$, para cada $x \in [a, b]$. Concluya que existe una sucesión $\{\phi_n\}$ donde $\phi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones en escalera, que converge uniformemente a $f$.

## 9.2. Intercambio de Límites con Derivadas

En esta sección asumiremos que $I$ es un intervalo abierto y que cada $f_n$ es diferenciable. Si $\{f_n\}$ converge puntual o uniformemente a una función $f : I \to \mathbb{R}$, se abren varias interrogantes: ¿Será $\{f'_n\}$ convergente?. ¿Será $f$ diferenciable?, y en caso que estas respuestas fueran afirmativas, ¿Convergerá $\{f'_n\}$ a $f'$?. Un matemático experimentado sabe que la convergencia de $\{f_n\}$ no puede implicar nada sobre la convergencia de $\{f'_n\}$, por lo que las respuestas, a las inquietudes anteriores, deben tener una respuesta negativa. Este es el objetivo de los tres ejemplos a continuación.

**Ejemplos.**

1. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= nx, && \text{si} \quad |x| \leq \tfrac{1}{n} \\ f_n(x) &= -\frac{n^2}{2}x^2 + 2nx - \frac{1}{2}, && \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ f_n(x) &= \frac{n^2}{2}x^2 + 2nx + \frac{1}{2}, && \text{si} \quad -\tfrac{2}{n} \leq x \leq -\tfrac{1}{n}, \\ f(x) &= \frac{3x}{2|x|}, && \text{si} \quad |x| \geq \tfrac{2}{n}. \end{aligned}$$

   El lector verificará que $\{f_n\}$ converge punto por punto a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por, $f(0) = 0$ y $f(x) = \frac{3x}{2|x|}$, si $x \neq 0$. (Graficar varias de las $f_n$). Por otra parte, $f'_n(0) = n$, de modo que, $\{f'_n(0)\}$ no converge. También se tiene que $f$ no es derivable en $x = 0$.

2. Sea $f_n(x) = |x||x|^{\frac{1}{n}}$. Del ejercicio 6 de la sección 4.3, $\{f_n\}$ converge, punto por punto, a la función $f(x) = |x|$. En este caso, $f'(0)$ no existe, aunque $f'_n(0) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n^4x^5 - 4n^2x^3 + 7x, && \text{si} \quad |x| \leq \tfrac{1}{n} \quad \text{y,} \\ f_n(x) &= \tfrac{4x}{n|x|}, && \text{si} \quad |x| \geq \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

   El lector probará que $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \in \mathbb{R}$. De aquí deducirá que $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función constante $f(x) = 0$. Por otra parte, se verifica que $f_n$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y que:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= 5n^4x^4 - 12n^2x^2 + 7, && \text{si} \quad |x| \leq \tfrac{1}{n} \quad \text{y} \\ f'_n(x) &= 0, && \text{si} \quad |x| \geq \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

En particular, $f_n'(0) = 7 \to 7 \neq f'(0) = 0$. En este ejemplo, $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función diferenciable $f = 0$, pero $\{f_n'(0)\}$ no converge a $f'(0)$.

**Teorema 9.2.1.** *Supongamos que $\{f_n'\}$ converge uniformemente a una función $g : I \to \mathbb{R}$ y que, para algún $x_0 \in I$, $\{f_n(x_0)\}$ converge. Entonces, $\{f_n\}$ converge punto por punto a una función diferenciable $f : I \to \mathbb{R}$ y $f' = g$.*

**Demostración.** Fijemos $\epsilon > 0$. De la definición de convergencia uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|f_n'(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{si} \quad n \geq N \quad \text{y} \quad x \in I. \tag{2.1}$$

De aquí y la desigualdad triangular,

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \epsilon, \quad \text{si} \quad m, n \geq N \quad \text{y} \quad x \in I.$$

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, definimos $\Delta_{mn} : I \to \mathbb{R}$ por, $\Delta_{mn}(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Note enseguida que

$$|\Delta_{mn}'(x)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad m, n \geq N \quad \text{y} \quad x \in I.$$

Por otra parte, dados $x, z \in I$ existe (por el Teorema del Valor Medio) $c \in I$ tal que,

$$\Delta_{mn}(x) - \Delta_{mn}(z) = (x - z)\Delta_{mn}'(c),$$

y en consecuencia,

$$|\Delta_{mn}(x) - \Delta_{mn}(z)| \leq \epsilon |x - z|, \quad \text{si} \quad m, n \geq N. \tag{2.2}$$

Ya que $\{f_n(x_0)\}$ es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \epsilon$ si $m, n \geq n_0$. Es decir, $|\Delta_{mn}(x_0)| \leq \epsilon$ si $m, n \geq n_0$. De aquí y (2.2), con $z = x_0$, obtenemos $|\Delta_{mn}(x)| \leq [1 + |x - x_0|]\epsilon$, si $m, n \geq \text{máx}\{N, n_0\}$. Esto muestra que $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy, para cada $x \in I$, lo cual permite definir $f : I \to \mathbb{R}$, mediante:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

Definamos $\Gamma_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Ya que $\Gamma_n(x) = \lim_{m \to +\infty} \Delta_{nm}(x)$, se sigue de (2.2) que,

$$|\Gamma_n(x) - \Gamma_n(z)| \leq \epsilon |x - z|, \quad \text{si} \quad n \geq N. \tag{2.3}$$

Fijemos ahora $z \in I$ y probemos que $f$ es diferenciable en $z$ y que $f'(z) = g(z)$. Comencemos observando que,

$$f(x) - f(z) - (x - z)g(z) = [\Gamma_N(x) - \Gamma_N(z)] +$$

$$[f_N(x) - f_N(z) - (x - z)f_N'(z)] + (x - z)[f_N'(z) - g(z)],$$

de manera que por (2.3) y (2.1), queda

$$|f(x) - f(z) - (x - z)g(z)| \leq \frac{3\epsilon}{2}|x - z|$$

$$+|f_N(x) - f_N(z) - (x-z)f'_N(z)|.$$

Por otra parte, como $f_N$ es diferenciable en $z$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_N(x) - f_N(z) - (x-z)f'_N(z)| \leq \epsilon|x-z| \quad \text{si} \quad |x-z| \leq \delta,$$

de manera que

$$|f(x) - f(z) - (x-z)g(z)| \leq \frac{5}{2}\epsilon|x-z|, \quad \text{si} \quad |x-z| \leq \delta.$$

■.

**Ejercicios.**

1. Pruebe que en el teorema 9.2.1, $\{f_n\}$ **converge uniformemente a** $f$ **en compactos**. Esto significa, por definición, que para cada un subconjunto compacto $K$ de $I$, la sucesión de restricciones $\{f_n|K\}$ converge uniformemente a $f|K$.

2. En el teorema 9.2.1, suponga que las $f'_n$ son continuas y use el teorema fundamental del cálculo para mostrar, de manera sencilla, que $\{f_n\}$ converge punto por punto a la función $f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g$, donde $y_0$ es el límite de la sucesión $\{f_n(x_0)\}$.

## 9.3. Intercambio de Límites con Integración

El objetivo de esta sección, es probar el siguiente resultado.

**Teorema 9.3.1.** *Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función R-integrables en $[a,b]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces $f$ es R-integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n.$$

**Demostración.** Fijemos $\epsilon > 0$. Por la definición de convergencia uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{b-a} \quad \text{si} \quad n \geq N, x \in [a,b]. \tag{3.1}$$

En particular,

$$|U(f - f_N, P)| \leq \epsilon \quad \forall P \in \mathcal{P}([a,b]).$$

Por otra parte, de la relación $f = (f - f_N) + f_N$ y del argumento en la proposición 8.3.1 obtenemos,

$$U(f,P) \leq U(f - f_N, P) + U(f_N, P) \leq \epsilon + U(f_N, P),$$

para cualquier partición $P$ de $[a,b]$.

De manera semejante se muestra que, $L(f,P) \geq -\epsilon + L(f_N, P)$ para todo $P \in \mathcal{P}([a,b])$, lo que junto a la desigualdad anterior arroja,

$$U(f,P) - L(f,P) \leq 2\epsilon + U(f_N,P) - L(f_N,P), \quad \forall P \in \mathcal{P}([a,b]).$$

Por otra parte, de la proposición 8.2.4, existe una partición $P_N$ de $[a,b]$ tal que $U(f_N,P_N) - L(f_N,P_N) \leq \epsilon$ y por la desigualdad anterior, $U(f,P_N) - L(f,P_N) \leq 3\epsilon$. De aquí y la proposición 8.2.4, $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

En fin, de las proposiciones 8.3.1 y 8.3.4,

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b (f - f_n)\right| \leq \int_a^b |f - f_n|\,,$$

y por (3.1),

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| \leq \epsilon, \quad \text{si} \quad n \geq N.$$

■

A continuación daremos un ejemplo para mostrar que el teorema 9.3.1 falla cuando la convergencia es solamente puntual.

**Ejemplo.**

Ya que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ es numerable, existe una biyección $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Definamos ahora $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) = 0, \quad \text{si} \quad x \in \{h(1), \cdots, h(n)\},$$

$$f_n(x) = 1, \quad \text{si} \quad x \notin \{h(1), \cdots, h(n)\}.$$

Del ejercicio 6 de la sección 8.1, resulta que cada $f_n$ es R-integrable en $[0,1]$. El lector verificará también que $\{f_n\}$ converge punto por punto a la función $f$ del ejemplo 2, de la sección 8.2, la cual no es R-integrable en $[0,1]$.

## 9.4. Series de Funciones

Comenzaremos con la definición formal de serie de funciones. Al igual que en las secciones precedentes, $\{f_n\}$ denota una sucesión de funciones, definidas en un intervalo no degenerado, $I$ de $\mathbb{R}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $S_n : I \to \mathbb{R}$ mediante,

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

Esta función $S_n$ suele denotarse por $\sum_{i=1}^{n} f_i$ o por $f_1 + \cdots + f_n$, y se le llama **la suma de** $f_1, \cdots, f_n$. La sucesión de funciones $\{S_n\}$, será llamada **la serie asociada a** $\{f_n\}$ y será denotada por $\sum_n f_n$ o por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. También diremos que $S_n$ es **la n-ésima suma parcial** de esa serie.

**Observación.** Denotemos por $\mathcal{A}(I)$ al conjunto de todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$. Sabemos que la sucesión $\{f_n\}$, no es otra cosa que una función $F : \mathbb{N} \to \mathcal{A}(I)$. Por otra parte, en $\mathcal{A}(I)$ tenemos una ley de composición asociativa, dada por, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, y por el teorema 3.1.3, existe una única aplicación $\Sigma_F : \mathbb{N} \to \mathcal{A}(I)$ tal que $\Sigma_F(1) = F(1)$ y $\Sigma_F(n+1) = \Sigma_F(n) + F(n+1)$. El lector probará que $\Sigma_F(n) = S_n$, de manera que la noción de serie, dada en esta sección, coincide con la dada en le sección 3.1.

En lo que sigue, $\sum_n f_n$ denota una serie de funciones, definida en $I$. El **dominio de convergencia de** $\sum_n f_n$ se define como el conjunto $J$ de aquellos $x \in I$, para los cuales la serie numérica $\sum_n f_n(x)$ es convergente. Es decir, $x \in J$ si y sólo si, $\{S_n(x)\}$ converge. El conjunto $J$ puede ser, eventualmente, vacío. En cualquier caso, podemos definir una función

$$f : J \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{4.1}$$

Diremos que la serie $\sum_n f_n$ **converge uniformemente** en un subconjunto $K$ de $J$, si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge uniformemente en $K$.

**Proposición 9.4.1.** *(*Criterio de Cauchy*) Sea $K \subset J$ y supongamos que, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,*

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_n(x)| \leq \epsilon \quad si \quad n \geq \mathbb{N}; p \in \mathbb{N}, x \in K.$$

*Entonces, $\sum_n f_n$ converge uniformemente en $K$.*

**Demostración.** Del Teorema **??** se tiene, para cada $x \in I$, que

$$S_{n+p}(x) - S_n(x) = \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x).$$

Luego, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \epsilon, \quad \text{si} \quad n \geq N, p \in \mathbb{N}, x \in K,$$

y el resultado se sigue ahora aplicando la proposición 9.1.2, a la sucesión de restricciones $\{S_n|K\}$. ■

**Proposición 9.4.2.** *(*Criterio de Weiertrass*) Supongamos que existen constantes no negativas $M_n$ tales que, $|f_n(x)| \leq M_n$, para cada $x \in I$. Si $\sum_n M_n$ es convergente, entonces $J = I$ y $\sum_n f_n$ converge uniformemente en $I$.*

**Demostración.** De la proposición 4.10.1, $J = I$. Sabemos también que la sucesión de sumas parciales $\{s_n = M_1 + \cdots + M_n\}$ es convergente y en consecuencia, de Cauchy. De aquí, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|s_{n+p} - s_n| \leq \epsilon$ si $n \geq N$ y $p \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} M_i \leq \epsilon, \quad \text{si} \quad n \geq N, p \in \mathbb{N},$$

y en consecuencia, (ver proposición 5.2.3, parte c)),

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} M_i \leq \epsilon, \quad \text{si} \quad n \geq N, p \in \mathbb{N}, x \in I.$$

El resultado se sigue ahora de la proposición anterior. ■

**Ejercicios.**

1. Pruebe que si cada $f_n$ es continua, entonces cada $S_n$ también lo es. *Ayuda.* Pruebe que $S_{n+1} = S_n + f_{n+1}$.

2. Pruebe que si $I$ es abierto y cada $f_n$ es diferenciable en $I$, entonces cada $S_n$ también lo es y $S_n' = f_1' + \cdots + f_n'$.

3. Pruebe que si $I = [a, b]$ es compacto y $f_n \in \mathcal{R}([a, b]) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces cada $S_n$ es R-integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b S_n = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i$.

4. Suponga que $f_n$ es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $\sum_n f_n$ converge uniformemente en un subconjunto $K$ de $J$. Pruebe que la función $f$, definida en (4.1), es continua en $K$.

5. Suponga que $I$ es abierto y que las $f_n$ son diferenciables en $I$. Pruebe que si $\sum_n f_n'$ es uniformemente convergente en $I$ y $J \neq \emptyset$, entonces $J = I$, la función $f$ es diferenciable en cada $x \in I$ y $f'(x) = \sum_n f_n'(x)$.

6. Suponga que $I = [a, b]$ y que cada $f_n$ es R-integrable en $[a, b]$. Pruebe que si $\sum_n f_n$ es uniformemente convergente en $[a, b]$, entonces $f$ también lo es y $\int_a^b f = \sum_n \int_a^b f_n$.

## 9.5. Series de Potencia

En esta sección, $I = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = a_n x^n$, donde $n \geq 0$ es un entero y $a_n \in \mathbb{R}$. Abusando de la notación, la serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ será denotada por $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ y será llamada **una serie de potencias**. Los números $a_n$ serán llamados **los coeficientes de la serie** $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

A través de esta sección, $J$ denota el dominio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ y definimos $f : J \to \mathbb{R}$, mediante

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x).$$

Note que $0 \in J$.

**Proposición 9.5.1.** *Si $x_0 \in J$, entonces $(-|x_0|, |x_0|) \subset J$.*

**Demostración.** Si $x_0 = 0$, no hay nada que mostrar. Supongamos ahora que $x_0 \neq 0$ y fijemos $x \in (-|x_0|, |x_0|)$. Entonces, $|x| < |x_0|$, de modo que $0 \leq r := |x/x_0| < 1$.

Por otra parte, por la proposición 4.9.1, la sucesión $\{a_n x_0^n\}$ converge (a cero) y en consecuencia es acotada. Así, existe $M > 0$ tal que, $|a_n x_0^n| \leq M; \quad n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| r^n \leq M r^n.$$

De aquí, $\sum_{n\geq 0} x^n$ es absolutamente convergente, porque la serie geométrica $\sum_n r^n$ converge cuando $0 \leq r < 1$. El resultado se sigue de la proposición 4.10.1. ■

**Lemma 9.5.2.** *Sea $L$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in L$ y $(-|x_0|, |x_0|) \subset L$ si $x_0 \in L$. Entonces, existe $\rho \in [0, +\infty]$ tal que,* $(-\rho, \rho) \subset L \subset [-\rho, \rho]$. En particular, $L$ es un intervalo.

**Demostración.** Pongamos $\rho = \sup(L)$. Si $x \in (-\rho, \rho)$, entonces $|x| < r$ y por la proposición 2.6.1, existe $y \in L$ tal que $|x| < y$. Es decir, $x \in (-y, y)$. Pero por hipótesis, $(-y, y) \subset L$ y así, $x \in L$. Esto muestra que $(-\rho, \rho) \subset L$.

Para terminar la prueba, supongamos por el absurdo, que existe $x \in L$ tal que $|x| > \rho$ y fijemos $y \in (\rho, |x|)$. Entonces, $y \in (-|x|, |x|) \subset L$, lo cual es contradictorio porque $y > \rho = \sup(J)$. ■

Por el lema anterior, existe $\rho \in [0, +\infty]$ tal que $(-\rho, \rho) \subset L \subset [-\rho, \rho]$. Este elemento $\rho$, de la recta extendida, es llamado **el radio de convergencia de** $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. En lo que sigue, $\rho$ denota el radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

**Proposición 9.5.3.** *Supongamos que la sucesión $\{|a_n|^{1/n}\}$ tiene límite $c$ en la recta extendida. Entonces, $\rho = 1/c$.*

*Un resultado análogo vale si $a_n \neq 0; \quad n \in \mathbb{N}$; y la sucesión $\{|a_{n+1}|/|a_n|\}$ tiene límite $c$ en la recta extendida.*

**Demostración.** Ya que $|a_n x^n|^{1/n} = |a_n|^{1/n}|x|$, concluímos del Criterio de la Raíz (Ejercicio 9, sección 4.5), que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge si $c|x| < 1$ y diverge si $c|x| > 1$. Luego, $\rho = 1/c$. El resto de la proposición sigue del Criterio del Cociente (proposición 4.11.5). ■

**Nota.** Como una aplicación del resultado anterior, se tiene que el radio de convergencia de la serie $\sum_n x^{n-1}$ es igual a uno.

**Proposición 9.5.4.** *Si $[a, b] \subset (-\rho, \rho); a < b$; entonces $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge uniformemente en $[a, b]$.*

**Demostración.** El lector probará sin dificultad, que existen $c < d$ en $(0, \rho)$ tales que $[a, b] \subset [-c, c]$. Escribamos $r = c/d$ y notemos que, si $x \in [a, b]$, entonces

$$|a_n x^n| \leq |a_n| c^n = |a_n d^n| r^n.$$

Por otra parte, como $\sum_n a_n d^n$ es convergente, entonces la sucesión $\{a_n d^n\}$ converge a cero y por consiguiente, es acotada. Así, existe $M > 0$ tal que $|a_n d^n| \leq M; \quad n \in \mathbb{N}$; y por lo tanto, $|a_n x^n| \leq M r^n$ si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [a, b]$. El resultado se sigue ahora del Criterio de Weiertrass. ■

**Corolario 9.5.5.** *$f$ es continua en $(-\rho, \rho)$.*

**Demostración.** De la proposición anterior y el ejercicio 4 de la sección precedente, la restricción $f|[a, b]$ es continua, para cada intervalo $[a, b]$ contenido en $(-\rho, \rho)$, y el resultado se sigue fácilmente. ■

**Corolario 9.5.6.** *Si* $[c,d] \subset (-\rho,\rho)$*, entonces*

$$\int_c^d f = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{d^{n+1}-c^{n+1}}{n+1}.$$

**Demostración.** Se sigue rápidamnete de la proposición 9.5.4 y el ejercicio 6 de la sección anterior. ■

La serie $\sum_n na_nx^{n-1}$ (resp. $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$) será llamada **la serie derivada** (resp. **integral**) de $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$.

**Corolario 9.5.7.** *El dominio de convergencia de la serie integral de* $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$ *contiene a* $(-\rho,\rho)$*. Es más,*

$$\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = \int_0^x f, \quad \forall x \in (-\rho,\rho).$$

**Demostración.** El resultado se sigue del corolario anterior aplicado al intervalo $[0,x]$ (resp. $[x,0]$, donde $x \in (-\rho,\rho)$ y $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$). ■

**Proposición 9.5.8.** *Si* $\rho > 0$ *entonces, el dominio de convergencia, de la serie derivada de* $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$*, contiene a* $(-\rho,\rho)$*. Es más,* $f$ *es diferenciable en este intervalo y*

$$f'(x) = \sum_n na_nx^{n-1}, \quad \forall x \in (-\rho,\rho).$$

**Demostración.** Fijemos $x \in (-\rho,\rho)$. Ya que $|x| < r$, entonces, por la proposición 2.6.1, existe $y \in J$ tal que $|x| < y$. Definiendo $r = |x|/y$ y recordando que la sucesión $\{a_ny^n\}$ es acotada, obtenemos

$$|na_nx^{n-1}| = \frac{1}{y}n|a_ny^n|r^{n-1} \leq \frac{M}{y}nr^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

para alguna constante $M > 0$.

Por la Nota a la proposición 9.5.3 concluímos que $\sum_n na_nx^{n-1}$ es absolutamente convergente. Esto prueba la primera parte de la proposición.

Fijemos $z \in (-\rho,\rho)$ y escojamos $r > 0$ tal que $[z-r,z+r] \subset (-\rho,\rho)$. De la proposición 9.5.4 y de la primera parte de esta proposición se sigue que, la serie derivada converge uniformemente en $[z-r,z+r]$. Aplicando el ejercicio 5 de la sección anterior, al intervalo $(z-r,z+r)$, concluímos que $f$ es diferenciable en $z$ y que $f'(z) = \sum_n na_nz^{n-1}$. Recuerde que $\sum_{n\geq 0} a_nz^n$ es convergente. ■

**Nota.** Las últimas dos series del ejercicio 1, en realidad no caen dentro de la definición de series de potencia, que hemos adoptado. Para subsanar este inconveniente, podemos adoptar la siguiente definición más general. Diremos que **la serie** $\sum_{n\geq 0} f_n$ **es de potencia**, si $f_n(x) = a_nx^{h(n)}$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ es una función inyectiva. El lector probará que, salvo las proposiciones 9.5.3 y 9.5.8, los resultados de esta sección permanecen válidos para este nuevo concepto de series de potencia. La proposición 9.5.8, permanece válida cuando $h(n)/n^p \to 0$, para algún $p \in \mathbb{N}$. Esto ocurre, por ejemplo, cuando $h$ es polinomial: $h(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_q n^q$. En fin, el radio de convergencia de estas series de potencia, pueden ser calculados usando las ideas de la proposición 9.5.3.

**Ejercicios.**

1. Calcule el dominio de convergencia de las siguientes series de potencia:

   *a*) $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$,

   *b*) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$,

   *c*) $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$,

   *d*) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

2. Pruebe que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ y sus series derivada e integral tienen, las tres, el mismo radio de convergencia. *Ayuda*. Note que la serie derivada de $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ es $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ y que la serie integral de $\sum_n n a_n x^{n-1}$ es $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

3. Pruebe que si $\rho > 0$ entonces, la restricción de $f$ a $(-\rho, \rho)$ es de clase $C^\infty$ y
$$f^{(N)}(x) = \sum_{n\geq 0} (n+1)\cdots(n+N) a_{n+N} x^n.$$

4. Pruebe que
$$\ln(1+x) = \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$
si $-1 < x < 1$. *Ayuda*. La serie geométrica $\sum_n x^n$ converge a $1/(1-x)$ si $|x| < 1$, y cambiando $x$ por $-x$, tenemos que $\sum_n (-1)^n x^n$ converge a $1/(1+x)$ en $(-1, 1)$. Utilice ahora el corolario 9.5.6 y la proposición 8.4.6.

   **Nota.** Ya que, por el Criterio de las Series Alternadas, $\sum_n (-1)^{n-1}/n$ converge, se sigue de un teorema de Abel [**?**] que, la igualdad del ejercicio 4, vale para $x = 1$. Es decir, $\sum_n (-1)^{n-1}/n = \ln(2)$. Como es usual, ln denota la función logaritmo neperiano.

## 9.6. Las Funciones Trigonométricas

En esta sección construímos las funciones seno y coseno.

**Teorema 9.6.1.** *Existe una única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dos veces diferenciable, tal que,*
$$f'' + f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \tag{6.1}$$
*Además, $g := f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la única función, dos veces diferenciable, que satisface*
$$g'' + g = 0, \quad g(0) = 1, \quad g'(0) = 0. \tag{6.2}$$

Las funciones $f, g$ se conocen como las funciones **seno** y **coseno** y se denotan por sin and cos respectivamente.

**Demostración.** *Unicidad.* Supongamos que $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones dos veces diferenciables que verifican (6.1) y definamos $h = F - f$. Entonces, $h'' + h = 0, \quad h(0) = h'(0) = 0$, y por el ejercicio 6 de la sección 7.5, $h \equiv 0$. Luego, $F \equiv f$. De manera semejante, se prueba la unicidad de $g$.

*Existencia.* Del ejercicio 1 de la sección anterior, se tiene que $\mathbb{R}$ es el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. De aquí, tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por,

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Es más, por la proposición 9.5.8, $f$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Por la proposición 9.5.8, una vez más, tenemos que $f$ es dos veces diferenciable y que

$$f''(x) = \sum_{n} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -f(x).$$

Luego, $f$ satisface las condiciones en (6.1).

Pongamos $g = f'$. De (6.1) tenemos, $f''' + f' = 0, \quad f'(0) = 1$, y así, $g'' + g = 0, \quad g(0) = 1$. En fin, $g'(0) = f''(0) = -f(0) = 0$. ■

Obtendremos ahora algunas propiedades de las funciones seno y coseno, utilizando únicamente las propiedades enunciadas en (6.1) y (6.2). En lo que sigue, $f$ y $g$ denotan las funciones dadas por el teorema 9.6.1.

**Proposición 9.6.2.** *$f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, $f, g$ son acotadas.*

**Demostración.** Definamos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por, $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$. Entonces, $h$ es diferenciable y como $g' = f''$, obtenemos $h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)] = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$. De aquí, $h$ es constante y la prueba se sigue del hecho que, $h(0) = g(0)^2 = 1$. ■

**Proposición 9.6.3.** *Existe $t_0 > 0$ tal que $f(t_0) = 0$.*

**Demostración.** Ya que $f$ es dos veces diferenciable, tenemos que $f'$ es continua, y como $f'(0) = 1 > 0$, existe $r > 0$ tal que $f' > 0$ en $(0, r)$. De aquí y el Teorema del Valor Medio, $f > 0$ en $(0, r)$.

Asumamos ahora que la proposición es falsa. Del Teorema de Bolzano, $f > 0$ en $(0, \infty)$ y así $f'' < 0$ en ese intervalo. Es decir, $g = f'$ es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$, y por la proposición precedente, $g(x)$ tiene límite, digamos $l$, cuando $x \to +\infty$. Por otro lado, como $f$ es acotada, se sigue del ejercicio 11 de la sección 7.3, que $b = 0$. Pero $g(0) = 1 > 0$ y $g$ es estrictamente en $(0, \infty)$, lo cual implica que $f' = g > 0$ en $(0, \infty)$. En particular, $f''(x) = -f(x) \leq -f(1) < 0$, si $x \geq 1$, y en consecuencia, $g(x) \to -\infty$, cuando $x \to -\infty$. Esta contradicción termina la prueba. ■

**Proposición 9.6.4.** *Existe $T > 0$ tal que $f(T) = 0$ y $f > 0$ en $(0, T)$. Además, $f(x + T) = -f(x)$ y $g(x + T) = -g(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. En particular, $f(x + 2T) = f(x)$ y $g(x + 2T) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

**Demostración.** La proposición anterior permite definir $T = \inf\{t_0 > 0 : f(t_0) = 0\}$. Ya que $f'(0) = 1 > 0$, se tiene $T > 0$, y como $f$ es continua, $f(T) = 0$. De la definición de $T$ resulta que $f > 0$ en $(0, T)$, porque $f'$ es continua y $f'(0) > 0$. En particular, $g' = f'' = -f < 0$ en $(0, T)$ y de aquí, $g(T) < g(0) = 1$. Pero de la proposición 9.6.2, $g(T) = \pm 1$, de donde, $g(T) = -1$.

Definamos $h(x) = f(x + T) + f(x)$. Es fácil ver que $h$ es dos veces diferenciable y que $h'' + h = 0$. Por otra parte, $h(0) = f(0) + f(T) = 0$ y $h'(0) = f'(0) + f'(T) = g(0) + g(T) = 0$, lo que junto al ejercicio 6 de la sección 7.5, dice que $h = 0$. Así, $f(x + T) = -f(x)$. El resto de la prueba es dejada al lector. ■

**Nota.** El número $T$ dado por la proposición 9.6.4 se denota por $\pi$.

**Proposición 9.6.5.** *$f(x + y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ y $g(x + y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$, cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$.*

**Demostración**. Fijemos $y \in \mathbb{R}$ y definamos $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por: $h_1(x) = f(x + y)$, $\quad h_2(x) = g(y)f(x) + f(y)g(x)$. El lector verificará sin dificultad que, $h_1(0) = h_2(0)$, $\quad h_1'(0) = h_2'(0)$ y $h_i'' + h_i = 0$; $\quad i = 1, 2$. Aplicando ahora el ejercicio 6 de la sección 7.5, a la función $h = h_2 - h_1$, concluímos que $h_1 = h_2$, lo cual prueba la primera afirmación. El resto es similar y dejado al lector. ■

## 9.7. La integral de Riemann-Stieljes

El objetivo de esta sección es hacer una brevísima introducción a la integral de Riemann-Stieljes. En lo que sigue, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ denota una función definida en un intervalo compacto $[a, b]$. Dado un intervalo $I = [c, d] \subset [a, b]$, definimos $l_\alpha(I) = \alpha(d) - \alpha(c)$. Dada una partición $P$, de $[a, b]$, definimos **la variación de $\alpha$ respecto a $P$**, por $V(\alpha, P) = \sum_{I \in P} |l_\alpha(I)|$. Si el conjunto $\{V(\alpha, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ es acotado, diremos que $\alpha$ **es de variación acotada**, y el supremo de ese conjunto será denotado por $V(\alpha)$ y se le conoce como **la variación total de** $\alpha$.

1. Pruebe que si $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones de variación acotada, entonces $\alpha + \beta$ y $c\alpha$ también lo son, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

2. Pruebe que toda función monótona $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada y que $V(\alpha) = |\alpha(a) - \alpha(b)|$.

   Sea $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función en escalera respecto a una partición $P$ de $[a, b]$. Definimos **la integral de Riemann-Stieljes de $\phi$ respecto a $\alpha$** mediante,

$$\int_a^b \phi d\alpha = \sum_{I \in P} c_I l_\alpha(I),$$

donde $c_I$ es el valor de $\phi$ en $int(I)$.

En lo que sigue, $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ denotan funciones de variación acotada y $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ denotan funciones en escalera.

3. Muestre que la definición de integral, dada anteriormente, es correcta. Es decir, no depende de la partición $P$. Muestre también que valen las siguientes propiedades:

   *a*) $\int_a^b (\phi + \psi) d\alpha = \int_a^b \phi d\alpha + \int_a^b \psi d\alpha$.

   *b*) $\int_a^b (c\phi) d\alpha = c \int_a^b \phi d\alpha$, si $c \in \mathbb{R}$.

   *c*) $|\int_a^b \phi d\alpha| \leq MV(\alpha)$, si $|\phi(x)| \leq M$; para todo $x \in [a,b]$.

   *d*) $\int_a^c \phi d\alpha + \int_c^b \phi d\alpha = \int_a^b \phi d\alpha$, si $c \in (a,b)$.

   *e*) $\int_a^b \phi d(\alpha + \beta) = \int_a^b \phi d\alpha + \int_a^b \phi d\beta$.

   *f*) $\int_a^b \phi d(c\alpha) = c \int_a^b \phi d\alpha$, si $c \in \mathbb{R}$.

4. Sea $\{\phi_n\}$ una sucesión de funciones en escalera definidas en $[a,b]$, la cual converge uniformemente a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pruebe que $\{\int_a^b \phi_n d\alpha\}$ es convergente. *Ayuda.* Pruebe que esa sucesión es de Cauchy.

5. Sean $\{\phi_n\}, \{\psi_n\}$ sucesiones de funciones en escalera, definidas en $[a,b]$, las cuales convergen uniformemente a la misma función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pruebe que $\{\int_a^b \phi_n d\alpha\}$ y $\{\int_a^b \psi_n d\alpha\}$ convergen al mismo límite.

   Sean $\{\phi_n\}$ y $f$ como en el problema 4. Definimos **la integral de Riemann-Stieljes de $f$ respecto a $\alpha$** mediante,

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n d\alpha.$$

   Del problema 5 se tiene que esta definición es correcta. Es decir, no depende de la sucesión de funciones en escalera que aproxima a $f$.

6. Pruebe que esta definición de integral goza de las propiedades enunciadas en el problema 3.

7. Use el ejercicio 8 de la sección 9.1 para mostrar que la integral $\int_a^b f d\alpha$ está definida, para cualquier función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y cualquier función $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada.