NOTAS SOBRE LOS GRUPOS DE LORENTZ Y DE POINCARE

1. El grupo de Lorentz

El espacio de Minkowsky, $\mathbf{M}_4$, es un espacio real pseudo - euclídeo de signatura $(1,3)$. Las coordenadas que distintos **observadores inerciales** asignan a un mismo punto de $\mathbf{M}_4$ están relacionadas por transformaciones lineales que preservan el **intervalo**

$$s^2 = (x^0)^2 - x^i x^i = (\bar{x}^0)^2 - \bar{x}^i \bar{x}^i. \tag{1.1}$$

En términos de la **métrica** del espacio, $g = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$, el intervalo se escribe

$$\begin{gathered} s^2 = x^t g x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \\ \bar{x}^t g \bar{x} = g_{\mu\nu} \bar{x}^\mu \bar{x}^\nu. \end{gathered} \tag{1.2}$$

La relación entre las coordenadas está dada por la transformación lineal

$$\bar{x} = L x, \tag{1.3}$$

o bien, en componentes,

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{1.4}$$

donde los elementos de matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ son reales. La invarianza del intervalo implica que las matrices L preservan la métrica g,

$$L^t g L = g \Longrightarrow g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}. \tag{1.5}$$

Esto significa que el grupo de Lorentz es lo que antes hemos llamado grupo pseudo-ortogonal $O(1,3)$.

La relación (1.5) implica que el determinante de las matrices L sólo puede tomar los valores

$$\det L = \pm 1. \tag{1.6}$$

Dado que todo grupo de matrices es un grupo de Lie, sus elementos son funciones continuas de los parámetros del grupo. En consecuencia,

H. Falomir **actualizado el 21 de julio de 2004.**

el cambio de signo del determinante en (1.6) no puede ser producto de la variación de un parámetro continuo. De ello resulta que ***la variedad del grupo de Lorentz es no conexa***. Si $\det L = +1$ (-1) la transformación L se dice **propia** (**impropia**).

Además, de (1.5) surge que

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = g_{00} \Longrightarrow (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \Lambda^{i}{}_{0}\Lambda^{i}{}_{0} = 1. \tag{1.7}$$

En consecuencia, $(\Lambda^{0}{}_{0})^2 \geq 1$, y las transformaciones son llamadas **ortócronas** si $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$, o bien **no ortócronas** para $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$. Tampoco aquí es posible pasar de unas a otras mediante la variación de un parámetro continuo.

Por lo tanto, el grupo de Lorentz está constituido por cuatro componentes desconectadas entre sí, caracterizadas por los signos de $\det L$ y de $\Lambda^{0}{}_{0}$. De ellas, sólo la parte conexa que contiene a la identidad forma un subgrupo (invariante[1]), llamado **subgrupo propio ortócrono**, y denotado por $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$. Téngase en cuenta que $\det \mathbf{1}_4 = 1$ y $\mathbf{1}^{0}{}_{0} = 1$.

Las otras componentes corresponden a los ***cosets*** que se obtienen de $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$. La transformación de **paridad**,

$$P = \mathrm{diag}(1, -1, -1 - 1), \tag{1.8}$$

que cambia el signo de las coordenadas espaciales y satisface

$$\det P = -1,\ P^{0}_{0} = 1,\ P^2 = \mathbf{1}_4, \tag{1.9}$$

es una transformación ***impropia ortócrona*** con la que se construye el coset $\mathcal{L}_{-}^{\uparrow} = P\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$.

La **inversión temporal**,

$$T = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1), \tag{1.10}$$

que satisface

$$\det T = -1,\ T^{0}_{0} = -1,\ T^2 = \mathbf{1}_4, \tag{1.11}$$

es una transformación ***impropia no ortócrona*** con la que se construye el coset $\mathcal{L}_{-}^{\downarrow} = T\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$.

---

[1]En efecto, si $L_0 \in \mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$, existe una curva sobre el grupo que la conecta de manera continua con la identidad $\mathbf{1}_4$. Entonces, $\forall L \in \mathcal{L}$, LL_0L^{-1} se conecta con continuidad con $L\mathbf{1}_4L^{-1} = \mathbf{1}_4$ y, en consecuencia, $LL_0L^{-1} \in \mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$.

Finalmente, el producto $PT = TP = -\mathbf{1}_4$ es una transformación ***propia no ortócrona***, con la que se obtiene el coset $\mathcal{L}_+^\downarrow = PT\mathcal{L}_+^\uparrow$.

El subgrupo propio ortócrono contiene transformaciones que corresponden a ***rotaciones en el espacio***,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & R \\ 0 & \end{pmatrix}, \text{ con } R \in SO(3). \tag{1.12}$$

En efecto, puesto que $R^t R = \mathbf{1}_3$, es evidente que $L^t g L = g$, mientras que

$$\det L = \det R = 1,\ {L^0}_0 = 1. \tag{1.13}$$

El subgrupo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ también contiene ***boosts*** o transformaciones de Lorentz propiamente dichas. Por ejemplo, para

$$\begin{aligned} \bar{x}^0 &= x^0 \cosh\alpha + x^1 \sinh\alpha \\ \bar{x}^1 &= x^0 \sinh\alpha + x^1 \cosh\alpha \\ \bar{x}^2 &= x^2 \\ \bar{x}^3 &= x^3, \end{aligned} \tag{1.14}$$

con $\cosh\alpha = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, tenemos la matriz

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

para la cual $\det L = \cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$, y ${L^0}_0 = \cosh\alpha \geq 1$, y que también satisface $L^t g L = g$. Nótese que esta matriz no es una función periódica del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, lo que corresponde al hecho de que ***el grupo de Lorentz no es compacto***.

2. Álgebra de Lie del subgrupo propio ortócrono $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Las matrices próximas de la identidad tienen la forma

$$L = \mathbf{1}_4 + \varepsilon \implies \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu; \tag{2.1}$$

remplazando esta expresión en (1.5) se obtiene

$$g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}\varepsilon^\alpha{}_\mu + g_{\mu\beta}\varepsilon^\beta{}_\nu + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = g_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

de donde resulta que el producto $g\,\varepsilon$ es una matriz antisimétrica.

Definiendo $\varepsilon_{\mu\nu} := g_{\mu\alpha}\varepsilon^\alpha{}_\nu$, y teniendo en cuenta que $g_{\mu\nu}$ es simétrico, de la anterior ecuación tenemos[2]

$$\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} = 0. \tag{2.4}$$

En consecuencia, el álgebra de Lie está generada por $(4^2 - 4)/2 = 6$ generadores, de modo que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ***es un grupo de Lie de dimensión 6***.

Para determinar las constantes de estructura sería necesario elegir una base en ese espacio de matrices, multiplicarlas a izquierda por g y calcular los conmutadores de los generadores resultantes.

Alternativamente, daremos una realización de esos generadores en términos de operadores diferenciales en las coordenadas del espacio - tiempo. Para ello consideremos la diferencia

$$\begin{gathered}\bar{x}^\mu - x^\mu = \varepsilon^\mu{}_\beta x^\beta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \varepsilon^\alpha{}_\beta x^\beta(\partial_\alpha x^\mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(x_\beta\partial_\alpha - x_\alpha\partial_\beta)x^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \tfrac{-i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\hat{L}_{\alpha\beta}x^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{gathered} \tag{2.5}$$

donde los $\hat{L}_{\alpha\beta} = -i(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha) = -\hat{L}_{\beta\alpha}$ son operadores diferenciales hermíticos. De ese modo, la transformación que sufre el vector de coordenadas también puede ser descrita por

$$\bar{x} = \left(1 - \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\hat{L}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) x. \tag{2.6}$$

[2] Similarmente, si $\varepsilon^{\mu\nu} := g^{\mu\alpha}\varepsilon^\nu{}_\alpha$, donde $g^{\mu\alpha} := (g^{-1})_{\mu\alpha}$ (con $g^{-1} = g$), resulta que

$$\varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{\nu\mu} = 0. \tag{2.3}$$

Tomando los conmutadores de los generadores así representados se obtienen las constantes de estructura del grupo $SO(1,3)$,

$$\left[\hat{L}_{\mu\nu},\hat{L}_{\rho\sigma}\right]=-ig_{\nu\rho}\hat{L}_{\mu\sigma}+ig_{\mu\rho}\hat{L}_{\nu\sigma}+ig_{\nu\sigma}\hat{L}_{\mu\rho}-ig_{\mu\sigma}\hat{L}_{\nu\rho}. \tag{2.7}$$

En particular, considerando la subálgebra correspondiente a índices espaciales tenemos

$$\left[\hat{L}_{ij},\hat{L}_{kl}\right]=i\delta_{jk}\hat{L}_{il}-i\delta_{ik}\hat{L}_{jl}-i\delta_{jl}\hat{L}_{ik}+i\delta_{il}\hat{L}_{jk}, \tag{2.8}$$

en la que se reconoce el álgebra de $SO(3)$.

Puede darse a esta operación en el álgebra de Lie un aspecto más familiar redefiniendo los generadores como

$$\begin{gathered}\hat{L}_i=\tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_{jk}\;\left(\Longrightarrow\hat{L}_{ij}=\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k\right)\\ \hat{K}_i=\hat{L}_{0i},\end{gathered} \tag{2.9}$$

operadores que satisfacen las reglas de conmutación

$$\begin{gathered}\left[\hat{L}_i,\hat{L}_j\right]=i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k,\\ \left[\hat{L}_i,\hat{K}_j\right]=i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{K}_k,\\ \left[\hat{K}_i,\hat{K}_j\right]=-i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k,\end{gathered} \tag{2.10}$$

donde se ve claramente que los $\hat{L}_i$ son los generadores del subgrupo $SO(3)$ de $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

3. Representaciones irreducibles (del grupo de cubrimiento) de $\mathcal{L}_+^\uparrow$

La construcción de las representaciones matriciales del grupo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ pasa entonces por encontrar conjuntos de seis matrices, $\{L_k,K_k;k=1,2,3\}$, que satisfagan las reglas de conmutación de (2.10), para luego exponenciar elementos de la representación matricial del álgebra de Lie así obtenida. Esto es, exponenciar combinaciones lineales con coeficientes ***reales*** y multiplicadas por la unidad imaginaria, de la forma $i(\alpha^k L_k+\beta^k K_k)$, con $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}$.

Puede simplificarse aún más esta construcción considerando las combinaciones lineales ***complejas*** (elementos de la **complexificación** del álgebra de Lie de $\mathcal{L}_+^\uparrow$)

$$J_k^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left(L_k \pm i K_k\right), \tag{3.1}$$

cuyos conmutadores se reducen a

$$\begin{aligned} \left[J_i^{(\pm)}, J_j^{(\pm)}\right] &= i\epsilon_{ijk} J_k^{(\pm)}, \\ \left[J_i^{(\pm)}, J_j^{(\mp)}\right] &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Esto corresponde a dos subálgebras $su(2)$ que conmutan entre sí.

Ya hemos estudiado las representaciones unitarias irreducibles del álgebra de Lie de $SU(2)$, que están caracterizadas por un ***semientero*** j, y generadas por tres matrices ***autoadjuntas*** $J_k^{(j)}, k = 1, 2, 3$, de dimensión $2j + 1$. Podemos tomar entonces

$$\begin{aligned} J_k^{(+)} &:= J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathsf{j}_-)}, \\ J_k^{(-)} &:= \mathbf{1}^{(\mathsf{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

que satisfacen trivialmente (3.2).

De esa manera, ***las representaciones matriciales irreducibles del grupo (de cubrimiento de)*** $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ***están caracterizadas por un par de semienteros*** (j_+, j_-)***, y son de dimensión*** $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$.

Téngase en cuenta que, mientras que las matrices que representan a los generadores $\hat{L}_k$ de $\mathcal{L}_+^\uparrow$,

$$L_k^{(j_+,j_-)} = J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathsf{j}_-)} + \mathbf{1}^{(\mathsf{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}, \tag{3.4}$$

son ***autoadjuntas***, las correspondientes a los $\hat{K}_k$,

$$K_k^{(j_+,j_-)} = -i\left(J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathsf{j}_-)} - \mathbf{1}^{(\mathsf{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}\right), \tag{3.5}$$

son ***anti - autoadjuntas***. En consecuencia, las representaciones matriciales así obtenidas ***no son unitarias***.

Se puede demostrar que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ (que es un grupo de Lie no compacto) ***no tiene representaciones unitarias de dimensión finita***.

Los elementos de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ están identificados por el conjunto de seis parámetros reales α_k, β_k, con $k = 1, 2, 3$. En la representación irreducible[3] (j_+, j_-) tenemos

(3.10)
$$D^{(j_+,j_-)}(\alpha,\beta) := e^{i\left(\alpha^k L_k + \beta^k K_k\right)} =$$
$$= e^{i\left((\alpha^k - i\beta^k) J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathbf{j}_-)} + (\alpha^k + i\beta^k) \mathbf{1}^{(\mathbf{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}\right)} =$$
$$= e^{i\left((\alpha^k - i\beta^k) J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathbf{j}_-)}\right)} e^{i\left((\alpha^k + i\beta^k) \mathbf{1}^{(\mathbf{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}\right)} =$$
$$= e^{i(\alpha - i\beta)^k J_k^{(j_+)}} \otimes e^{i(\alpha + i\beta)^k J_k^{(j_-)}},$$

donde se han tenido en cuenta (3.4) y (3.5) para expresar las matrices de la representación como un producto directo[4] (donde cada factor actúa sobre distintos conjuntos de índices de las componentes de los

[3]Frente a la transformación de paridad se tiene que

(3.6)
$$P\hat{L}_{ij}P^{-1} = \hat{L}_{ij},$$
$$P\hat{L}_{0k}P^{-1} = -\hat{L}_{0k}.$$

Entonces, en una dada representación matricial se tiene

(3.7)
$$\mathcal{P}L_k\mathcal{P}^{-1} = L_k,$$
$$\mathcal{P}K_k\mathcal{P}^{-1} = -K_k.$$

En consecuencia,

(3.8) $$\mathcal{P}D^{(j_+,j_-)}(\alpha,\beta)\mathcal{P}^{-1} = D^{(j_+,j_-)}(\alpha,-\beta) \sim D^{(j_-,j_+)}(\alpha,\beta).$$

Por lo tanto, si $j_+ \neq j_-$ la representación no es invariante frente a paridad. Para construir representaciones invariantes frente a $\mathcal{P}$ se deben considerar las sumas directas

(3.9) $$\mathcal{D}^{(j_+,j_-)} = D^{(j_+,j_-)} \oplus D^{(j_-,j_+)},$$

de dimensión $2(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$.

[4]En el último paso se ha usado la igualdad

(3.11) $$e^{M} \otimes \mathbf{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(M \otimes \mathbf{1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,M^n \otimes \mathbf{1} = e^{M} \otimes \mathbf{1}.$$

vectores del espacio producto directo). Téngase en cuenta que no se trata de un producto directo de grupos, pues ambos factores dependen de los mismos parámetros. Además resulta claro que, mientras que los parámetros α^k corresponden a ***subgrupos abelianos unidimensionales compactos***, los β^k corresponden a ***subgrupos abelianos unidimensionales no compactos***.

En consecuencia, los vectores de la representación irreducible (j_+, j_-) tienen componentes identificadas por un par de índices, a y $\dot{b}$, que toman $(2j_+ + 1)$ y $(2j_- + 1)$ valores respectivamente. Frente a transformaciones de Lorentz ellas se transforman según

$$\psi'_{a\dot{b}} = \left(e^{i(\alpha - i\beta)^k J_k^{(j_+)}} \right)_{aa'} \left(e^{i(\alpha + i\beta)^k J_k^{(j_-)}} \right)_{\dot{b}\dot{b}'} \psi_{a'\dot{b}'} \,. \tag{3.12}$$

4. Grupo de cubrimiento de $\mathcal{L}_+^\uparrow$

El hecho de que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ contenga a $SO(3)$ es indicativo de que no se trata de un grupo simplemente conexo. Para determinar su grupo de cubrimiento, primero señalemos que es posible establecer una relación biunívoca entre los vectores del espacio de Minkowsky, $\mathbf{M}_4$, y las matrices autoadjuntas de dimensión 2×2.

Una base para ese espacio de matrices (de dimensión 4) está dada por $\{\sigma_0 = \mathbf{1}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, que tienen las propiedades

$$\mathrm{tr}\{\sigma_k\} = 0, \ \mathrm{tr}\{\mathbf{1}_2\} = 2, \ \mathrm{tr}\{\sigma_k \sigma_l\} = 2\delta_{kl}. \tag{4.1}$$

Ahora bien, dado $x \in \mathbf{M}_4$, podemos formar la matriz

$$\sigma(x) := x^0 \mathbf{1}_2 + x^k \sigma_k = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \sigma(x)^\dagger. \tag{4.2}$$

De (4.1) tenemos que

$$x^\mu = \frac{1}{2} \mathrm{tr}\{\sigma_\mu \, \sigma(x)\}, \tag{4.3}$$

mientras que el determinante de esa matriz es igual al intervalo,

$$\det \sigma(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = s^2. \tag{4.4}$$

Inversamente, dada una matriz autoadjunta A de dimensión 2×2, ella determina un vector en $\mathbf{M}_4$ cuyas componentes son

$$x^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\{\sigma_\mu A\}, \tag{4.5}$$

pudiendo ser escrita como

$$A = x^\mu \sigma_\mu. \tag{4.6}$$

Las transformaciones de Lorentz son tales que preservan el intervalo s^2, de modo que corresponden a las transformaciones lineales de la matriz $\sigma(x)$ que la mantienen autoadjunta, y dejan invariante su determinante. Consideremos el cambio

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \Lambda\,\sigma(x)\,\Lambda^\dagger = \bar{\sigma}^\dagger, \\ \Rightarrow \det\bar{\sigma} &= |\det\Lambda|^2 \det\sigma(x). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Entonces, $|\det\Lambda|^2 = 1 \Rightarrow \det\Lambda = e^{i\theta}$. Pero ese factor se debe a una fase $e^{i\theta/2}$ en Λ, sin consecuencias sobre la transformación (4.7). De ese modo, basta con considerar matrices complejas de 2×2, cuyo determinante sea $\det\Lambda = 1$.

En consecuencia, el grupo de transformaciones que debemos considerar es lo que hemos llamado $SL(2,\mathbb{C})$, y las coordenadas del vector transformado están dadas por

$$\bar{x}^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\sigma_\mu\,\Lambda\,\sigma(x)\,\Lambda^\dagger\},\ \text{con}\ \Lambda \in SL(2,\mathbb{C}). \tag{4.8}$$

Pero aún así, $-\mathbf{1}_2 \in SL(2,\mathbb{C})$, y

$$(-\mathbf{1}_2)\sigma(x)(-\mathbf{1}_2)^\dagger = \sigma(x), \tag{4.9}$$

lo que corresponde a no variar las coordenadas.

Dicho de otro modo, el par de matrices $\{+\Lambda, -\Lambda\} \subset SL(2,\mathbb{C})$ corresponden a la misma transformación de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Por lo tanto, hemos establecido un homorfismo[5] entre $SL(2,\mathbb{C})$ y $\mathcal{L}_+^\uparrow$, cuyo núcleo es el ***centro*** del primer grupo,

$$\{+\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2\} \approx \mathbb{Z}_2. \tag{4.10}$$

[5]Evidentemente, esto se corresponde con el homomorfismo existente entre $SU(2)$ y $SO(3)$, subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ y $\mathcal{L}_+^\uparrow$ respectivamente.

En consecuencia, $SL(2,\mathbb{C})$ (simplemente conexo) es el ***grupo de cubrimiento*** de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Y éste, por ser ***doblemente conexo*** $\left(\Pi_1(\mathcal{L}_+^\uparrow) \approx \mathbb{Z}_2\right)$, resulta ***globalmente isomorfo al grupo cociente***

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \approx SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2. \tag{4.11}$$

5. Algebra de Lie del grupo $SL(2,\mathbb{C})$. Representaciones

Para determinar el álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{C})$, tengamos en cuenta que para matrices próximas de la identidad, $\Lambda = \mathbf{1}_2 + A$,

$$\det\Lambda = 1 \Rightarrow \mathrm{tr}\{A\} = 0. \tag{5.1}$$

Como A es compleja, una base para ese espacio lineal (de dimensión $2\times 2^2 - 2 = 6$) está dada por

$$\left\{\frac{1}{2}\,\sigma_k, -\frac{i}{2}\,\sigma_k, \text{ con } k = 1,2,3\right\}. \tag{5.2}$$

Naturalmente, los conmutadores de estas matrices reproducen las relaciones de (2.10),

$$\begin{aligned}
&\left[\tfrac{1}{2}\,\sigma_i, \tfrac{1}{2}\,\sigma_j\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\tfrac{1}{2}\,\sigma_k,\\
&\left[\tfrac{1}{2}\,\sigma_i, -\tfrac{i}{2}\,\sigma_j\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\left(-\tfrac{i}{2}\,\sigma_k\right),\\
&\left[-\tfrac{i}{2}\,\sigma_i, -\tfrac{i}{2}\,\sigma_j\right] = -i\,\epsilon_{ijk}\,\tfrac{1}{2}\,\sigma_k,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

como corresponde a grupos localmente isomorfos. La correspondencia establecida es[6]

$$\begin{aligned}
L_k &\longleftrightarrow \tfrac{1}{2}\,\sigma_k\\
K_k &\longleftrightarrow -\tfrac{i}{2}\,\sigma_k\,.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

[6] Nótese que (5.3) también admite la identificación

$$\begin{aligned}
L_k &\longleftrightarrow \tfrac{1}{2}\,\sigma_k\\
K_k &\longleftrightarrow \tfrac{i}{2}\,\sigma_k\,.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Por exponenciación de elementos en el álgebra de Lie obtenemos las matrices

$$\Lambda(\alpha,\beta) = e^{i\left(\alpha^k \frac{1}{2}\,\sigma_k - \beta^k \frac{i}{2}\,\sigma_k\right)} = e^{i\,(\alpha - i\beta)^k\, \frac{1}{2}\,\sigma_k}\,. \tag{5.6}$$

Como $J_k^{(1/2)} = \frac{1}{2}\,\sigma_k$, vemos que la representación fundamental del grupo $SL(2,\mathbb{C})$ coincide con la representación irreducible $(1/2,0)$ de la ecuación (3.10).

La representación de (5.6) no es equivalente a su conjugada. En efecto, teniendo en cuenta que

$$\sigma_k{}^* = -\sigma_2\,\sigma_k\,\sigma_2, \tag{5.7}$$

vemos que la representación conjugada de $(1/2,0)$ es equivalente a la representación $(0,1/2)$ de la ec. (3.10):

$$\Lambda^*(\alpha,\beta) = e^{-i\,(\alpha + i\beta)^k\, \frac{1}{2}\,\sigma_k{}^*} = \sigma_2 e^{i\,(\alpha + i\beta)^k\, \frac{1}{2}\,\sigma_k}\sigma_2. \tag{5.8}$$

Los vectores de la representación $(1/2,0)$, ψ_L, son llamados **espinores de Weyl de polarización izquierda**, mientras que los de la representación $(0,1/2)$, ψ_R, son **espinores de Weyl de polarización derecha**. Los **espinores de Dirac** son vectores del espacio suma directa $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$,

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

los que, frente a transformaciones de Lorentz, cambian según

$$\Psi'_D = \begin{pmatrix} \Lambda(\alpha,\beta) & 0 \\ 0 & \sigma_2\Lambda^*(\alpha,\beta)\sigma_2 \end{pmatrix} \Psi_D. \tag{5.10}$$

La transformación de las coordenadas que induce (4.7), dada en la ecuación (4.8), es la que corresponde a las componentes de un tetravector. En consecuencia, éstos se transforman como vectores de una representación equivalente a la $(1/2,1/2)$ (de dimensión $2\times 2 = 4$). En efecto,

$$V'_{a\dot b} = \Lambda_{aa'}\, V_{a'\dot b'}\, (\Lambda^\dagger)_{\dot b'\dot b} = \Lambda_{aa'}\, \Lambda^*_{\dot b\dot b'}\, V_{a'\dot b'}\,. \tag{5.11}$$

El producto directo de representaciones irreducibles de $SL(2,\mathbb{C})$ se descompone como suma directa de manera consistente con la descomposición de Clebsh - Gordan de productos directos de representaciones irreducibles de $SU(2)$. Por ejemplo, $(1/2,0)\otimes(1/2,0)=(1,0)\oplus(0,0)$.

Se verifica que la representación $(1,0)$, de dimensión 3, corresponde a **tensores antisimétricos autoduales**,

$$F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}=\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{5.12}$$

6. El grupo de Poincaré

Observadores inerciales cuyos orígenes de coordenadas no coinciden asignan a un mismo punto del espacio de Minkowsky conjuntos de coordenadas que están relacionadas entre sí por una transformación (no homogénea) del **grupo de Poincaré**, de la forma

$$\bar{x}=L\,x+a \quad \Rightarrow \quad \bar{x}^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,x^{\nu}+a^{\mu}\,, \tag{6.1}$$

donde L es una transformación del grupo de Lorentz y a es un tetravector que representa una traslación rígida en el espacio-tiempo.

Es fácil ver que estas transformaciones se componen como elementos de un grupo, y que las traslaciones no conmutan con las transformaciones de Lorentz. En efecto, frente a dos transformaciones consecutivas tenemos

$$x\to L_1\,x+a_1\to L_1\,(L_2\,x+a_2)+a_1=L_1L_2\,x+(L_1\,a_2+a_1)\ . \tag{6.2}$$

Podemos introducir una realización de los generadores correspondientes a las traslaciones en el espacio-tiempo en términos de operadores diferenciales de la forma

$$\hat{P}_{\mu}=-i\partial_{\mu}\,, \tag{6.3}$$

de modo que

$$\bar{x}^{\mu}-x^{\mu}=i\,a^{\alpha}\hat{P}_{\alpha}\,x^{\mu}+\mathcal{O}(a^2)\,. \tag{6.4}$$

Como las coordenadas son independientes, resulta que los $\hat{P}_\mu$ conmutan entre sí,

$$\left[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu\right] = 0\,. \tag{6.5}$$

Por otra parte, resulta inmediato verificar que

$$\left[\hat{L}_{\mu\nu}, \hat{P}_\alpha\right] = i\, g_{\mu\alpha}\, \hat{P}_\nu - i\, g_{\nu\alpha}\, \hat{P}_\mu\,, \tag{6.6}$$

lo que corresponde a la transformación de un tetravector covariante.

Las ecuaciones (2.7), (6.5) y (6.6) determinan el álgebra de Lie del grupo de Poincaré. Nótese que el rango de esta álgebra es 4.

Por su parte, el **cuadrado** del tatravector $\hat{P}_\mu$, $\hat{\mathbf{P}}^2 := g^{\mu\nu}\hat{P}_\mu\,\hat{P}_\nu$, es un invariante cuadrático del grupo de Poincaré,

$$\left[\hat{P}_\mu, \hat{\mathbf{P}}^2\right] = 0\,, \quad \left[\hat{L}_{\mu\nu}, \hat{\mathbf{P}}^2\right] = 0\,. \tag{6.7}$$

En términos de los operadores $\hat{L}_i$ y $\hat{K}_i$ definidos en (2.9), el álgebra de conmutadores toma el aspecto más familiar

$$\begin{cases} \left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k\,, \\ \left[\hat{L}_i, \hat{K}_j\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{K}_k\,, \quad \left[\hat{K}_i, \hat{K}_j\right] = -i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k\,, \\ \left[\hat{L}_i, \hat{P}_j\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{P}_k\,, \quad \left[\hat{K}_i, \hat{P}_j\right] = i\,\delta_{ij}\,\hat{P}_0\,, \\ \left[\hat{L}_i, \hat{P}_0\right] = 0\,, \quad \left[\hat{K}_i, \hat{P}_0\right] = i\,\hat{P}_i\,, \\ \left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0\,, \quad \left[\hat{P}_i, \hat{P}_0\right] = 0\,. \end{cases} \tag{6.8}$$

6.1. Representaciones unitarias del grupo de Poincaré. Dado que el grupo de Poincaré contiene como subgrupo al grupo de Lorentz, sus representaciones unitarias tampoco son de dimensión finita. En ellas, los generadores están representados por operadores hermíticos $\{M_{\mu\nu}, P_\mu\}$, con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, que satisfacen el álgebra de conmutadores[7]

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -ig_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + ig_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + ig_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - ig_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}\,, \\ \\ [M_{\mu\nu}, P_\alpha] = i\,g_{\mu\alpha}\,P_\nu - i\,g_{\nu\alpha}\,P_\mu\,, \\ \\ [P_\mu, P_\nu] = 0\,. \end{array} \right. \tag{6.9}$$

Como los generadores P_μ conmutan entre sí, pueden ser simultáneamente diagonalizados, de modo que existen vectores en el espacio de la representación tales que

$$P_\mu\,|\mathbf{p}\rangle = p_\mu\,|\mathbf{p}\rangle\ , \quad \mu = 0, \ldots, 3\,, \tag{6.10}$$

con $p_\mu \in \mathbb{R}$. En esas condiciones, se puede buscar el **grupo de estabilidad** (o pequeño grupo) del conjunto de autovalores p_μ, esto es, el conjunto de las transformaciones del grupo de Lorentz que dejan invariante al tetravector $\mathbf{p}$.

Esas transformaciones están descritas por el **vector de Pauli - Lubansky** (o vector de polarización),

$$W^\mu := \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\rho\sigma}P_\nu = W^{\mu\dagger}\,, \tag{6.11}$$

---

[7] En una teoría cuántica, la realización de las transformaciones del grupo de Poincaré en términos de operadores unitarios (definidos sobre el espacio de Hilbert de los vectores de estado del sistema físico) garantiza la invarianza relativista de las probabilidades de transición.

El generador de las traslaciones en el tiempo debe ser identificado con el **hamiltoniano** del sistema, $P_0 \equiv H$, mientras que los posibles estados del sistema están descritos por los vectores de la correspondiente representación lineal del grupo de Poincaré. Operadores hermíticos que conmutan con P_0 corresponden a **magnitudes conservadas** en la teoría cuántica. En ese sentido, (6.8-6.9) muestran que el **impulso lineal**, $\overrightarrow{P} = (P_1, P_2, P_3)$, y el **impulso angular**, $\overrightarrow{M} = (M_1, M_2, M_3)$, com $M_i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}M_{jk}$, son magnitudes conservadas.

donde $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es un tensor totalmente antisimétrico tal que $\epsilon^{0123} = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} [P_\alpha, W^\mu] &= \tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu\,[P_\alpha, M_{\rho\sigma}] = \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu\,(i g_{\alpha\rho} P_\sigma - i g_{\alpha\sigma} P_\rho) = 0\,, \end{aligned} \tag{6.12}$$

de modo que $W^\mu\,|\mathbf{p}\rangle$ es también autovector de los operadores P_α correspondiente a los mismos autovalores p_α.

El operador W^μ es ortogonal a P_μ,

$$P_\mu\, W^\mu = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\mu P_\nu M_{\rho\sigma} = 0\,, \tag{6.13}$$

y se transforma como un vector contravariante,

$$[M_{\alpha\beta}, W^\mu] = \left(i\,\delta^\mu_\alpha\, g_{\nu\beta} - i\,\delta^\mu_\beta\; g_{\nu\alpha}\right) W^\nu\,. \tag{6.14}$$

De (6.12) y (6.14) resulta que el cuadrado de W^μ, $\mathbf{W}^2 = g_{\mu\nu} W^\mu W^\nu$, es un segundo invariante,

$$\left[M_{\alpha\beta}, \mathbf{W}^2\right] = 0\,, \quad \left[P_\mu, \mathbf{W}^2\right] = 0\,. \tag{6.15}$$

Pero como

$$[W^\mu, W^\nu] \neq 0\,, \tag{6.16}$$

sólo una de sus componentes puede ser diagonalizada al mismo tiempo que los P_μ. En lo que sigue veremos cómo conviene elegir dicha componente.

En consecuencia, las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré (que no son de dimensión finita) contienen conjuntos de autovectores simultáneos de los operadores $\{P_0, \overrightarrow{P}, W^\mu, \mathbf{W}^2\}$, para un valor particular de μ. Se distinguen tres casos según el signo del autovalor de $\mathbf{P}^2$,

$$\mathbf{P}^2\,|\mathbf{p}\rangle = m^2\,|\mathbf{p}\rangle\;, \quad \text{con } m^2 = {p_0}^2 - \overrightarrow{p}^{\,2}\,. \tag{6.17}$$

6.1.1. $\underline{m^2 > 0}$. En este caso existe un sistema de referencia para el cual $p_0 = m$ y $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$. La acción del operador W^μ está representada por

$$W^\mu \left|\mathbf{p}\right\rangle = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\rho\sigma} p_\nu \left|\mathbf{p}\right\rangle = \frac{p_0}{2}\,\epsilon^{\mu 0 ij} M_{ij} \left|\mathbf{p}\right\rangle = \tag{6.18}$$
$$= \frac{m}{2}\, g^{\mu k}\,\epsilon_{kij} M_{ij} \left|\mathbf{p}\right\rangle = g^{\mu k}\, m\, M_k \left|\mathbf{p}\right\rangle .$$

Teniendo en cuenta que

$$[M_i, M_j] = i\,\epsilon_{ijk}\, M_k \,, \tag{6.19}$$

vemos que el operador de Pauli - Lubansky, restringido al conjunto de vectores de la forma $\left|p_0 = m, \overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}\right\rangle$, se reduce a la aplicación de los generadores de un álgebra $su(2)$ (es decir, el pequeño grupo del autovalor $\mathbf{p} = (m, 0, 0, 0)$ es $SU(2)$).

La construcción usual muestra que en la representación del pequeño grupo de $\mathbf{p}$ existe un conjunto de $(2s+1)$ vectores $\left|p_0 = m, \overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}, s, s_3\right\rangle$, con $2s \in \mathbb{N}$ y $s_3 = -s, -s+1, \dots, s-1, s$, tales que

$$\begin{cases} P_0 \left|m, \overrightarrow{0}, s, s_3\right\rangle = m \left|m, \overrightarrow{0}, s, s_3\right\rangle \,, \\[2ex] P_i \left|m, \overrightarrow{0}, s, s_3\right\rangle = 0 \,, \\[2ex] -\frac{W_3}{m} \left|m, \overrightarrow{0}, s, s_3\right\rangle = s_3 \left|m, \overrightarrow{0}, s, s_3\right\rangle \,, \\[2ex] \frac{\mathbf{W}^2}{m^2} \left|m, \overrightarrow{0}, s, s_3\right\rangle = s(s+1) \left|m, \overrightarrow{0}, s, s_3\right\rangle \,. \end{cases} \tag{6.20}$$

El semientero s es el **espín** de la representación irreducible considerada, cuyo espacio de representación puede construirse a partir de esos vectores mediante la aplicación de las transformaciones del grupo de Poincaré[8].

[8] Esta construcción de una representación irreducible a partir del conocimiento de una representación del *pequeño grupo* se conoce como método de las representaciones inducidas.

6.1.2. $\underline{m^2 = 0}$. En este caso existe un sistema inercial para el cual

$$p = (p_0, 0, 0, p_0)\ , \tag{6.21}$$

con $p_0 > 0$. En esas condiciones,

$$W^\mu \left|p\right\rangle = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\rho\sigma} p_\nu \left|p\right\rangle = \frac{p_0}{2}\left(\epsilon^{\mu 0\rho\sigma} + \epsilon^{\mu 3\rho\sigma}\right) M_{\rho\sigma}\left|p\right\rangle\ , \tag{6.22}$$

de modo que

$$W^0 \left|p\right\rangle = p_0\,\epsilon^{0312} M_{12}\left|p\right\rangle = p_0\, M_3\left|p\right\rangle\ ,$$

$$W^3 \left|p\right\rangle = p_0\,\epsilon^{3012} M_{12}\left|p\right\rangle = -p_0\, M_3\left|p\right\rangle\ ,$$

$$\begin{array}{c} W^1 \left|p\right\rangle = \frac{p_0}{2}\left(\epsilon^{10\rho\sigma} + \epsilon^{13\rho\sigma}\right) M_{\rho\sigma}\left|p\right\rangle = \\ = p_0\left(\epsilon^{1023} M_{23} + \epsilon^{1302} M_{02}\right)\left|p\right\rangle = -p_0\left(M_1 + M_{02}\right)\left|p\right\rangle\ , \end{array} \tag{6.23}$$

$$W^2 \left|p\right\rangle = \tfrac{p_0}{2}\left(\epsilon^{20\rho\sigma} + \epsilon^{23\rho\sigma}\right) M_{\rho\sigma}\left|p\right\rangle =$$

$$= p_0\left(\epsilon^{2013} M_{13} + \epsilon^{2301} M_{01}\right)\left|p\right\rangle = -p_0\left(M_2 - M_{01}\right)\left|p\right\rangle\ .$$

Similarmente, dado que la aplicación de W^μ no cambia los autovalores de P_μ (ver ecuación (6.12)), tenemos que

$$\begin{array}{l} [W^3, W^1]\left|p\right\rangle = {p_0}^2\,[M_3, M_1 + M_{02}]\left|p\right\rangle = \\ = i\,{p_0}^2\left(M_2 - M_{01}\right)\left|p\right\rangle = -i\,p_0\,W^2\left|p\right\rangle\ , \\ [W^3, W^2]\left|p\right\rangle = {p_0}^2\,[M_3, M_2 - M_{01}]\left|p\right\rangle = \\ = -i\,{p_0}^2\left(M_1 + M_{02}\right)\left|p\right\rangle = i\,p_0\,W^1\left|p\right\rangle\ , \\ [W^1, W^2]\left|p\right\rangle = {p_0}^2\,[M_1 + M_{02}, M_2 - M_{01}]\left|p\right\rangle = \\ = i\,{p_0}^2\left(M_3 - M_3\right)\left|p\right\rangle = 0\,. \end{array} \tag{6.24}$$

Por lo tanto, aplicados sobre el conjunto de autovectores correspondientes a los autovalores $p = (p_0, 0, 0, p_0)$ (es decir, en el subespacio invariante frente al grupo de estabilidad de $\mathbf{p}$), los operadores $W^{1,2}$

conmutan entre sí (de modo que existen autovectores comunes a ambos, dado que son hermíticos), por lo que pueden ser considerados operadores de traslación en un espacio bidimensional, mientras que W^3 actúa como el generador de las rotaciones en dicho plano. En este caso, el pequeño grupo del autovalor $\mathbf{p} = (p_0, 0, 0, p_0)$ es $ISO(2)$, el grupo de simetrías de un espacio euclídeo bidimensional.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \langle p| \mathbf{W}^2 |p\rangle &= \langle p| \left[(W^0)^2 - (W^1)^2 - (W^2)^2 - (W^3)^2 \right] |p\rangle = \\ &= - \langle p| \left[(W^1)^2 + (W^2)^2 \right] |p\rangle \leq 0 \,. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Ahora bien, si existiera un vector para el cual $\langle p| \mathbf{W}^2 |p\rangle = -q^2 < 0$ (por ejemplo, un autovector de W^1 y W^2 con autovalores q y 0 respectivamente), de (6.24) vemos que podríamos construir un continuo de vectores con esa misma propiedad por aplicación del operador $e^{i\theta W^3}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$|p\rangle \longrightarrow e^{i\theta W^3} |p\rangle \ , \tag{6.26}$$

todos ellos autovectores degenerados del tetraimpulso correspondientes a los autovalores $(p_0, 0, 0, p_0)$. Pero en la naturaleza no se encuentran **partículas** de **masa** nula con esa clase de *polarizaciones continuas*, por lo que esta posibilidad debe ser descartada.

En consecuencia, debemos suponer que $\langle p| \mathbf{W}^2 |p\rangle = 0$, lo que implica que $W^{1,2}$ actúan sobre el conjunto de vectores $|p\rangle$ como operadores nulos.

En esas condiciones, podemos elegir un conjunto de autovectores simultáneos de W^3 y de los operadores P_μ, para los cuales

$$-\frac{W^3}{p_0} |p, \lambda\rangle = M_3 |p, \lambda\rangle = \lambda |p, \lambda\rangle \ , \tag{6.27}$$

donde el autovalor λ es la **helicidad** del vector (autovalor del **impulso angular** en la dirección de movimiento). Dado que M_3 es un generador de un grupo localmente isomorfo a $SU(2)$, sabemos que $e^{i4\pi M_3} = 1$, de modo que $2\lambda \in \mathbb{N}$.

En el presente caso no disponemos de *operadores escalera* para construir nuevos vectores de la representación con diferentes autovalores para M_3. Pero teniendo en cuenta que el operador de paridad satisface

$$\mathcal{P}P_0\mathcal{P} = +P_0\,, \quad \mathcal{P}P_i\mathcal{P} = -P_i\,, \quad \mathcal{P}M_3\mathcal{P} = +M_3 \tag{6.28}$$

(ver ec. (3.7)), vemos que su aplicación produce un cambio de signo en la proyección del momento angular en la dirección de movimiento, de modo que en la representación también existe el vector

$$\mathcal{P}\left|(p_0,0,0,p_0)\,,\lambda\right\rangle \sim \left|(p_0,0,0,-p_0)\,,-\lambda\right\rangle\,. \tag{6.29}$$

Este vector, por efecto de una rotación en π alrededor del eje 2, $e^{i\pi M_2}$ (que cambia el signo de los autovalores de P_3 y M_3 manteniendo el signo de la helicidad), es llevado al vector

$$e^{i\pi M_2}\mathcal{P}\left|(p_0,0,0,p_0)\,,\lambda\right\rangle \sim \left|(p_0,0,0,p_0)\,,-\lambda\right\rangle \tag{6.30}$$

que corresponde al mismo tetraimpulso y a la helicidad opuesta del vector original[9].

Por lo tanto, en el caso de masa nula, $m^2 = 0$, los vectores de las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré con autovalores definidos para P_μ tienen dos posibles valores para su helicidad, $\pm\lambda$, con $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

También en este caso, el resto de los vectores del espacio de la representación se obtiene a partir del conjunto $\{|(p_0,0,0,p_0),\pm\lambda\rangle\,,\, p_0 \in \mathbb{R}^+\}$ por aplicación de las transformaciones del grupo de Poincaré.

[9]Esto muestra que la existencia del operador de inversión espacial requiere que toda especie de partículas de masa nula y helicidad no nula esté acompañada por otra de helicidad opuesta, que puede corresponder a las mismas partículas, como en el caso de fotones y gravitones (cuyas interacciones son invariantes frente a paridad), o a otras diferentes, como en el caso de neutrinos y antineutrinos (cuyas interacciones no son invariantes frente a paridad).

6.1.3. $m^2 < 0$. Finalmente, las representaciones con $m^2 < 0$ son *taquiónicas* (corresponderían a partículas que se mueven a mayor velocidad que la luz), por lo que no nos ocuparemos de ellas.

Bibliografía:

- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires.*
- P. Ramond, *Field Theory: a modern primer.*