CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

ANÁLISIS FUNCIONAL

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

NOTAS SOBRE OPERADORES NO ACOTADOS

1. Extensiones de operadores lineales

• Sea A un operador lineal acotado definido sobre un dominio $\mathcal{D}(A)$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $u \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. El vector u siempre puede ser representado como el límite de una secuencia fundamental $\{u_n\}$ contenida en $\mathcal{D}(A)$. Y como A es acotado[1], tenemos

$$\|Au_n - Au_m\| = \|A\,(u_n - u_m)\| \leq \|A\|\ \|u_n - u_m\| \to 0 \tag{1.2}$$

para $n, m \to \infty$. Es decir, $\{Au_n\}$ es también una secuencia fundamental.

Entonces, como $\mathcal{H}$ es completo, existe un vector $v \in \mathcal{H}$ tal que

$$v = \lim_{n\to\infty} Au_n. \tag{1.3}$$

Este límite es independiente de la secuencia convergente a u considerada. En efecto, si $\{u_n\}$ y $\{u'_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ son coterminales, entonces

$$\|Au_n - Au'_n\| = \|A\,(u_n - u'_n)\| \leq \|A\|\ \|u_n - u'_n\| \to 0 \tag{1.4}$$

para $n \to \infty$.

Actualizado el 1 de octubre de 2005.

[1] La norma de A es, por definición,

$$\|A\| = \mathrm{Sup}_{\{u\in\mathcal{D}(A),\ \|u\|=1\}}\ \|Au\|\,. \tag{1.1}$$

En esas condiciones, se puede **extender** de manera única la definición del operador acotado A a todo $\overline{\mathcal{D}(A)}$, introduciendo un operador $\overline{A}$ de modo que $\forall\, u \in \overline{\mathcal{D}(A)}$

$$\overline{A}u := v = \lim_{n\to\infty} Au_n, \tag{1.5}$$

donde $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ y $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Así definido, este operador es lineal y acotado[2].

• En particular, un operador lineal acotado A, definido sobre un dominio $\mathcal{D}(A)$ denso en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tiene una única extensión lineal y acotada sobre todo $\mathcal{H}$, denominada su **clausura** y denotada por $\overline{A}$, cuya norma es igual a $\|A\|$.

• Sea A un operador lineal definido en *todo* el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se puede demostrar que A es acotado $\Leftrightarrow \forall\, \{u_n\} \to u$ tal que la secuencia $\{Au_n\} \to v$, es $v = Au$.

• Pero si T es un operador **no acotado** definido en un dominio $\mathcal{D}(T)$, y $\{u_n\}$ es una secuencia fundamental en $\mathcal{D}(T)$, la secuencia $\{Tu_n\}$ no será, en general, convergente en $\mathcal{H}$. Incluso si, para dos secuencias coterminales $\{u_n\}$ y $\{u'_n\} \subset \mathcal{D}(T)$, sucede que $\{Tu_n\}$ y $\{Tu'_n\}$ son fundamentales, en general, ellas no serán coterminales.

• Supongamos que para $u \notin \mathcal{D}(T)$ ocurre que **para toda** secuencia $\{u_n\}$ convergente a u y contenida en el dominio de T, la secuencia $\{Tu_n\}$ tiene un límite fijo:

$$\lim_{n\to\infty} Tu_n = v \in \mathcal{H}, \quad \forall\, \{u_n\} \in \mathcal{D}(T) \mid \lim_{n\to\infty} u_n = u. \tag{1.9}$$

---

[2] En efecto, si dos secuencias en $\mathcal{D}(A)$ tienen por límite a $u = \lim u_n$ y $u' = \lim u'_n$ respectivamente, entonces

$$\overline{A}\,(\alpha u + \beta u') = \lim A\,(\alpha u_n + \beta u'_n) = \alpha \lim Au_n + \beta \lim Au'_n = \alpha\overline{A}u + \beta\overline{A}u'. \tag{1.6}$$

En cuanto a su norma, tenemos por un lado que

$$\|\overline{A}\| = \mathrm{Sup}_{\left\{u\in\overline{\mathcal{D}(A)},\ \|u\|=1\right\}} \left\|\overline{A}u\right\| \geq \mathrm{Sup}_{\{u\in\mathcal{D}(A),\ \|u\|=1\}} \left\|\overline{A}u\right\| = \|A\|\,. \tag{1.7}$$

Por otra parte, por la continuidad de la norma, para cualquier secuencia en $\mathcal{D}(A)$ convergente a un vector unitario u tenemos

$$\|Au_n\| \leq \|A\|\ \|u_n\| \Rightarrow \left\|\overline{A}u\right\| \leq \|A\|\ \|u\| = \|A\|\,, \tag{1.8}$$

lo que implica que $\left\|\overline{A}\right\| \leq \|A\|$. En definitiva, $\left\|\overline{A}\right\| = \|A\|$.

En esas condiciones, se puede **extender** la definición de T incorporando al punto u de modo que

$$Tu := \lim_{n\to\infty} Tu_n = v. \tag{1.10}$$

• Si $\forall$ secuencia fundamental $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $\{Tu_n\}$ es también de Cauchy se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \in \mathcal{D}(T), \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} Tu_n = Tu, \tag{1.11}$$

entonces T se dice **cerrado**.

• Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el producto directo $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ es también un espacio de Hilbert respecto del producto escalar definido a continuación: si los pares ordenados

$$\langle\varphi_1, \psi_1\rangle, \langle\varphi_2, \psi_2\rangle \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}, \tag{1.12}$$

con $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$, el producto escalar está dado por

$$\Big(\langle\varphi_1, \psi_1\rangle, \langle\varphi_2, \psi_2\rangle\Big)_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}} = (\varphi_1, \varphi_2)_{\mathcal{H}} + (\psi_1, \psi_2)_{\mathcal{H}}. \tag{1.13}$$

• La **gráfica** de un operador lineal T es el conjunto de pares ordenados

$$\Gamma(T) := \{\langle\varphi, T\varphi\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(T)\} \subset \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}. \tag{1.14}$$

Si T es cerrado, entonces $\Gamma(T)$ es un conjunto cerrado[3].

• Sea T_1 un operador lineal definido sobre un dominio $\mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{H}$. Si $\Gamma(T) \subset \Gamma(T_1)$ se dice que T_1 es una **extensión** de T en $\mathcal{H}$, lo que se denota por $T \subset T_1$.

Dicho de otro modo,

$$T \subset T_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T_1), \\ \\ T_1\varphi = T\varphi,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T). \end{cases} \tag{1.16}$$

[3]La clausura en $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ de la gráfica de T, $\overline{\Gamma(T)}$, no corresponde en general a la gráfica de un operador. Una condición necesaria para que $\overline{\Gamma(T)}$ sea la gráfica de un operador es que si

$$\langle\varphi, \psi_1\rangle, \langle\varphi, \psi_2\rangle \in \overline{\Gamma(T)} \Rightarrow \psi_1 = \psi_2, \tag{1.15}$$

lo que en general no se cumple.

Ejemplo 1.1. - Sea $\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, con $T\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$, y sea $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$, con $T_1\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$. En esas condiciones, $T \subset T_1$.

• Un operador T se dice **clausurable** si tiene una extensión cerrada. Si T_1 es una extensión cerrada de T, entonces $\Gamma(T) \subset \Gamma(T_1)$, que es un conjunto cerrado de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. En esas condiciones, la clausura de la gráfica de T también está contenida en la de T_1, $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(T_1)$, y, por lo tanto, corresponde a la gráfica de un operador. Nótese que si $\langle \mathbf{0}, \psi \rangle \in \overline{\Gamma(T)}$, entonces $\psi = \mathbf{0}$, puesto que $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle$ es el único par de esa forma contenido en $\Gamma(T_1)$. Esto significa que en este caso, si $\langle \varphi, \psi \rangle \in \overline{\Gamma(T)}$, entonces ψ está unívocamente determinado.

• Si T es clausurable, se define su **clausura** $\overline{T}$ como el operador cuya gráfica es $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$. Su dominio es

$$\mathcal{D}(\overline{T}) = \left\{ \varphi \mid \langle \varphi, \psi \rangle \in \overline{\Gamma(T)},\ \psi \in \mathcal{H} \right\}, \tag{1.17}$$

y su acción corresponde a $\overline{T}\varphi = \psi$, donde ψ es el único vector de $\mathcal{H}$ tal que $\langle \varphi, \psi \rangle \in \overline{\Gamma(T)}$.

Por su definición, $\overline{T}$ es cerrado, constituyendo una extensión cerrada de T. Por otra parte, $\overline{T} \subset T_1$, donde T_1 es cualquier extensión cerrada de T. Por lo tanto, todo operador clausurable tiene una extensión cerrada mínima, que es su clausura $\overline{T}$.

• Sea T un operador lineal cerrado con dominio $\mathcal{D}(T)$ denso en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Un complejo λ pertenece al **conjunto resolvente** de T, $\rho(T)$, si $(T - \lambda I)$ es una biyección de $\mathcal{D}(T)$ sobre (onto) $\mathcal{H}$ con una inversa acotada.

Si $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow$ existe el operador acotado $R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}$, llamado **resolvente** de T.

• $\rho(T)$ es un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$, sobre el cual $R_\lambda(T)$ es una función analítica de λ, cuyos valores son operadores acotados que conmutan entre sí y satisfacen

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T),\ \forall\, \lambda, \mu \in \rho(T) \tag{1.18}$$

(propiedades idénticas a las de la resolvente de operadores acotados).

• Se define el **espectro** de T como

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \notin \rho(T) \}. \tag{1.19}$$

• Si λ es un autovalor de T, entonces

$$\exists\, u \in \mathcal{D}(T) \mid Tu = \lambda u \Rightarrow (T - \lambda I)\, u = \mathbf{0}\,, \tag{1.20}$$

con $u \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto, $(T - \lambda I)$ no es una biyección $\Rightarrow \lambda \notin \rho(T)$.

El conjunto de los autovalores de T constituye el **espectro puntual** de T, $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

• Si λ no es un autovalor de T, pero $\text{Rank}(T - \lambda I)$ no es denso en $\mathcal{H} \Rightarrow \lambda \notin \rho(T)$. En ese caso se dice que λ pertenece al **espectro residual** de T, $\sigma_r(T) \subset \sigma(T)$.

• Finalmente, un complejo λ pertenece al **espectro continuo** de T, $\sigma_c(T) \subset \sigma(T)$, si $(T - \lambda I)$ tiene una inversa no acotada con dominio $\text{Rank}(T - \lambda I)$ denso en $\mathcal{H}$.

2. El operador adjunto

• Sea T un operador lineal definido sobre un dominio $\mathcal{D}(T)$ **denso** en $\mathcal{H}$. Sea $\mathcal{D}(T^\dagger)$ el conjunto de los vectores $\psi \in \mathcal{H}$ para los cuales $(\psi, T\varphi)$ es una **funcional lineal y continua**[4] de $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ (respecto de la distancia en $\mathcal{H}$). Entonces, para cada $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ existe un vector $\chi \in \mathcal{H}$ tal que dicha funcional corresponde al producto escalar

$$(\psi, T\varphi) = (\chi, \varphi)\,, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T). \tag{2.2}$$

Puesto que $\mathcal{D}(T)$ es denso en $\mathcal{H}$, χ está unívocamente determinado por ψ. En efecto, si $(\chi_1 - \chi_2, \varphi) = 0$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$, $\Rightarrow \chi_1 - \chi_2 = \mathbf{0}$.

Entonces, la acción del operador adjunto $T^\dagger$ sobre $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ se define por

$$T^\dagger \psi := \chi. \tag{2.3}$$

• Dado que una funcional lineal es continua si y sólo si ella es acotada, para $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ es necesario que

$$|(\psi, T\varphi)| \leq K\, \|\varphi\|, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T). \tag{2.4}$$

Si T es acotado, en virtud de la desigualdad de Cauchy - Schwarz tenemos

$$|(\psi, T\varphi)| \leq \|\psi\|\, \|T\varphi\| \leq \|\psi\|\, \|T\|\, \|\varphi\|, \quad \forall\, \psi \in \mathcal{H}, \tag{2.5}$$

[4] O, equivalentemente, una funcional **lineal y acotada**, es decir, tal que

$$|(\psi, T\varphi)| \leq K\, \|\varphi\|\,,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)\,, \tag{2.1}$$

para cierta constante fija $K \geq 0$.

de modo que el adjunto de un operador acotado está definido en todo el espacio de Hilbert, $\mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{H}$.

• Por el contrario, el adjunto de un operador no acotado puede no estar densamente definido, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. - Sea $f(x) \notin \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, una función localmente sumable, y sea $\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ (denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$) el dominio de un operador T definido por

$$T\varphi(x) := \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)^* \varphi(y)\, dy, \tag{2.6}$$

donde $\varphi_0(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ es un vector fijo, y la integral en el segundo miembro converge por ser $\varphi(x)$ acotada y de soporte compacto. Entonces, si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, existe $\chi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ tal que

$$(\psi, T\varphi) = (\psi, \varphi_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)^* \varphi(y)\, dy = (\chi, \varphi)\,,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{2.7}$$

Pero eso requiere que $(\psi, \varphi_0)^* f(x) = \chi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, lo que sólo es posible si $(\psi, \varphi_0) = 0$ y $\chi(x) = \mathbf{0}(x)$.

Por lo tanto, $\mathcal{D}(T^\dagger) = \{\psi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \mid \psi \perp \varphi_0\}$ (que no es un conjunto denso), y $T^\dagger \psi = \mathbf{0},\ \forall\, \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$.

• Si $S \subset T \Rightarrow T^\dagger \subset S^\dagger$. En efecto, si $S \subset T \Rightarrow \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$, y $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(S),\ S\varphi = T\varphi$. Sea $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. Entonces $\exists\, \chi \in \mathcal{H}$ tal que

$$\begin{gathered} (\psi, T\varphi) = (\chi, \varphi),\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\psi, S\varphi) = (\chi, \varphi),\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(S) \Rightarrow \psi \in \mathcal{D}(S^\dagger). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Por lo tanto, $\mathcal{D}(T^\dagger) \subset \mathcal{D}(S^\dagger)$, y $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ es $T^\dagger\psi = S^\dagger\psi$. Es decir, $T^\dagger \subset S^\dagger$.

• Si $\mathcal{D}(T^\dagger)$ es denso en $\mathcal{H}$, se puede definir su adjunto, $(T^\dagger)^\dagger = T^{\dagger\dagger}$.

• **Teorema I:** Sea T un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces

a) $T^\dagger$ es cerrado;

b) T es clausurable $\Leftrightarrow \mathcal{D}(T^\dagger)$ es denso en $\mathcal{H}$, en cuyo caso $\overline{T} = T^{\dagger\dagger}$;

c) si T es clausurable $\Rightarrow (\overline{T})^\dagger = T^\dagger$.

Para probar el punto a) introduzcamos un operador V definido sobre el espacio producto directo $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ como

$$V\langle\phi,\psi\rangle := \langle-\psi,\phi\rangle \;,\forall\,\phi,\psi\in\mathcal{H}\,. \tag{2.9}$$

Así definido, V es un **operador unitario**[5] que satisface $V^2=-\mathbf{I}$. En efecto,

$$\|V\langle\phi,\psi\rangle\|^2 = \|\langle-\psi,\phi\rangle\|^2 = \|\psi\|^2+\|\phi\|^2 = \|\langle\phi,\psi\rangle\|^2\,. \tag{2.12}$$

Entonces, el par $\langle\phi,\chi\rangle\in(V[\Gamma(T)])^{\perp}$ si y sólo si

$$(\langle\phi,\chi\rangle\,,\langle-T\varphi,\varphi\rangle) = -(\phi,T\varphi)+(\chi,\varphi)=0\,,\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(T)\,. \tag{2.13}$$

Pero en ese caso

$$\phi\in\mathcal{D}(T^\dagger) \quad \text{y} \quad T^\dagger\phi=\chi\,, \tag{2.14}$$

de manera que

$$\langle\phi,\chi\rangle = \left\langle\phi,T^\dagger\phi\right\rangle\in\Gamma\left(T^\dagger\right)\,. \tag{2.15}$$

En consecuencia, $\Gamma\left(T^\dagger\right)=(V[\Gamma(T)])^{\perp}$, que siempre es un conjunto cerrado. Por lo tanto, $T^\dagger$ es cerrado.

Para probar el punto b) señalemos que, debido a la linealidad de T, $\Gamma(T)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$. Entonces, para la clausura de la gráfica tenemos

$$\overline{\Gamma(T)} = \left([\Gamma(T)]^{\perp}\right)^{\perp} = \left(V^2\,[\Gamma(T)]^{\perp}\right)^{\perp} = \left(V\,[V\Gamma(T)]^{\perp}\right)^{\perp} = \left(V\Gamma\left(T^\dagger\right)\right)^{\perp}\,. \tag{2.16}$$

Por lo tanto, de acuerdo a la prueba de a), si $T^\dagger$ está densamente definido (condición necesaria para la existencia de su adjunto) entonces $\overline{\Gamma(T)}$ es la gráfica del operador $T^{\dagger\dagger}$.

Finalmente, si T es clausurable, por a) y b) sabemos que $T^\dagger$ es cerrado y densamente definido, mientras que su adjunto, $T^{\dagger\dagger}=\overline{T}$, también está densamente definido. Entonces,

$$T^\dagger=\overline{T^\dagger}=\left(T^\dagger\right)^{\dagger\dagger}=\left(T^{\dagger\dagger}\right)^{\dagger}=\left(\overline{T}\right)^{\dagger}\,, \tag{2.17}$$

lo que prueba c). □

[5]Se dice que un operador U definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es unitario si

$$(U\varphi,U\psi)=(\varphi,\psi)\;,\;\forall\,\varphi,\psi\in\mathcal{H}. \tag{2.10}$$

En esas condiciones, U es acotado, $U^\dagger=U^{-1}$ y la imagen por U del complemento ortogonal de cierto subespacio $\mathcal{G}\subset\mathcal{H}$, $U\left(\mathcal{G}^{\perp}\right)$, es el complemento ortogonal de la imagen de $\mathcal{G}$ por U, $(U(\mathcal{G}))^{\perp}$. En efecto, $\phi\in(U(\mathcal{G}))^{\perp}$ si y sólo si

$$(\phi,U\psi)=0\,,\forall\,\psi\in\mathcal{G}\Leftrightarrow\left(U^\dagger\phi,\psi\right)=0\,,\forall\,\psi\in\mathcal{G}\Leftrightarrow U^\dagger\phi\in\mathcal{G}^{\perp}\Leftrightarrow\phi\in U\left(\mathcal{G}^{\perp}\right)\,, \tag{2.11}$$

de modo que $(U(\mathcal{G}))^{\perp}=U\left(\mathcal{G}^{\perp}\right)$.

Ejemplo 2.2. - Consideremos el conjunto de las funciones **absolutamente continuas**[6] en el intervalo $[0,1]$, $AC(0,1)$, tales que su derivada $\varphi'(x)$ sea de cuadrado integrable en ese intervalo. Sea T_1 definido de manera que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T_1) := \{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1)\}\,, \\ \\ T_1\,\varphi(x) := -i\,\varphi'(x), \end{array} \right. \tag{2.21}$$

y T_2 de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T_2) := \{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1),\ \varphi(0)=0\}\,, \\ \\ T_2\,\varphi(x) := -i\,\varphi'(x), \end{array} \right. \tag{2.22}$$

Evidentemente, T_1 es una extensión de T_2, $T_2 \subset T_1$.

Dado que $\mathcal{D}(T_1) \supset \mathcal{D}(T_2) \supset \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, que es denso en $\mathbf{L_2}(0,1)$, ambos dominios de definición son densos.

Por otra parte, de la ec. (2.20) resulta evidente que los dominios de los operadores adjuntos $\mathcal{D}(T_{1,2}^\dagger) \supset \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, por lo que también ellos son densos. En consecuencia, por el teorema anterior, ambos operadores son clausurables.

Ahora determinaremos el operador adjunto de T_1. Si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T_1^\dagger)$ entonces $\exists\,\chi(x) \in \mathbf{L}_2(0,1)$ tal que

$$(\psi, T_1\varphi) = \int_0^1 \psi(x)^*(-i)\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 \chi(x)^*\varphi(x)\,dx = (\chi,\varphi)\ , \tag{2.23}$$

para toda $\varphi(x) \in \mathcal{D}(T_1)$. Esto requiere que sea posible **integrar por partes** en la primera de esas integrales, por lo que debemos suponer que $\psi(x) \in AC(0,1)$.

---

[6]Si $\varphi(x) \in AC(a,b)$, entonces $\varphi(x)$ es una función continua en (a,b) cuya derivada (en el sentido de límite de cociente incremental) existe en casi todo punto de ese intervalo, y es una función **localmente sumable**. La función puede ser reconstruida a partir de su derivada mediante la regla de Barrow,

$$\varphi(x) \in AC(a,b) \Rightarrow \varphi'(x) \in \mathbf{L_1^{(loc.)}}(a,b),\ \text{y}\ \varphi(x) = \int_a^x \varphi'(y)\,dy + \varphi(a). \tag{2.18}$$

Para las funciones absolutamente continuas también vale la regla de integración por partes. En efecto, si $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in AC(a,b)$, entonces $\varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \in AC(a,b)$, la derivada del producto es

$$(\varphi_1(x)\,\varphi_2(x))' = \varphi_1'(x)\,\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\,\varphi_2'(x) \in \mathbf{L_1^{(loc.)}}(a,b), \tag{2.19}$$

y

$$\int_a^x \varphi_1(y)\,\varphi_2'(y)\,dy = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x) - \varphi_1(a)\,\varphi_2(a) - \int_a^x \varphi_1'(y)\,\varphi_2(y)\,dy. \tag{2.20}$$

Haciendo uso de la propiedad (2.20), podemos escribir que

$$(-i)\psi(x)^*\varphi(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \big(-i\,\psi'(x)\big)^*\varphi(x)\,dx = \int_0^1 \chi(x)^*\varphi(x)\,dx\,. \tag{2.24}$$

Teniendo en cuenta que una funcional continua respecto de la convergencia en media no puede depender del valor que su argumento tome en un punto particular del intervalo $[0,1]$, y dado que los valores que las funciones $\varphi(x)$ toman en $x=0,1$ son arbitrarios, vemos que debemos imponer además la condición de contorno $\psi(0)=0=\psi(1)$.

En esas condiciones, dado que $\mathcal{D}(T_1)$ es denso en $\mathbf{L}_2(0,1)$, la igualdad (2.24) implica que $\chi(x)=-i\,\psi'(x)\in\mathbf{L}_2(0,1)$.

En definitiva, el operador $T_1^\dagger$ está definido de modo que

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{D}(T_1^\dagger) := \{\psi(x)\in AC(0,1)\mid \psi'(x)\in\mathbf{L_2}(0,1)\,,\psi(0)=0=\psi(1)\}\ ,\\[2em] T_1^\dagger\,\psi(x) := -i\,\psi'(x)\,.\end{array}\right. \tag{2.25}$$

Nótese que, en este caso, T_1 es una extensión de $T_1^\dagger$, $T_1^\dagger\subset T_1$.

Siguiendo el mismo procedimiento resulta inmediato mostrar que $T_1^{\dagger\dagger}=\overline{T_1}=T_1$, que entonces es un operador cerrado.

Similarmente, se obtiene que

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{D}(T_2^\dagger) := \{\psi(x)\in AC(0,1)\mid \psi'(x)\in\mathbf{L_2}(0,1),\ \psi(1)=0\}\ ,\\[2em] T_2^\dagger\,\psi(x) := -i\,\psi'(x)\,,\end{array}\right. \tag{2.26}$$

y que $T_2^{\dagger\dagger}=\overline{T_2}=T_2$, que también es cerrado. Además, se ve que $T_1^\dagger\subset T_2^\dagger$.

• En general, la elección de un dominio de definición para un operador diferencial tiene una influencia determinante sobre su espectro, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. - Consideremos la ecuación

$$-i\,\varphi'(x)=\lambda\varphi(x),\ \text{con}\ \varphi(x)\in AC(0,1)\,. \tag{2.27}$$

Esa igualdad implica que

$$\begin{array}{c}\varphi'(x)\in AC(0,1)\Rightarrow\varphi^{(2)}(x)\in AC(0,1)\Rightarrow\dots\\[1em] \dots\Rightarrow\varphi(x)\in\mathcal{C}^\infty(0,1)\,.\end{array} \tag{2.28}$$

En esas condiciones, la ecuación de autovalores para los operadores $T_{1,2}$ del ejemplo 2.2 se reduce a una ecuación diferencial ordinaria, cuya solución es

$$\varphi(x) = e^{i\lambda x}\varphi(0) \in AC(0,1) \subset \mathbf{L_2}(0,1). \tag{2.29}$$

Pero mientras que todo número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de T_1, la **condición de contorno** para T_2, $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0$.

Entonces, $\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$, mientras que T_2 no tiene autovectores y su espectro puntual es vacío, $\sigma_p(T_2) = \emptyset$.

• Sea T un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma_p(T^\dagger)$.

En efecto, en ese caso Rank$(T - \lambda I)$ no es denso en $\mathcal{H}$, de modo que $\exists\, \psi \neq \mathbf{0} \mid (\psi, (T - \lambda I)\varphi) = 0, \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$[7]. Pero eso significa que $(\psi, T\varphi) = \lambda\, (\psi, \varphi)$ es una funcional lineal y continua de $\varphi \Rightarrow \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$.

En esas condiciones, podemos escribir que $\big((T^\dagger - \lambda^* I)\psi, \varphi\big) = 0,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$ denso en $\mathcal{H}$, de modo que $T^\dagger\psi = \lambda^*\psi$.

• Por otra parte, si $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma(T^\dagger)$ (en el espectro puntual o en el residual).

En efecto, si $T\varphi = \lambda\varphi$, con $\varphi \neq \mathbf{0}$, entonces, $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ tenemos que $(\psi, (T - \lambda I)\varphi) = \big((T^\dagger - \lambda^* I)\psi, \varphi\big) = 0 \Rightarrow$ Rank$(T^\dagger - \lambda^* I)$ no es denso en $\mathcal{H} \Rightarrow \lambda^* \notin \rho(T^\dagger) \cup \sigma_c(T^\dagger)$.

En esas condiciones, $\lambda^* \in \sigma_r(T^\dagger)$, a menos que exista en $\mathcal{D}(T)$ un vector $\psi \neq \mathbf{0} \mid (T^\dagger - \lambda^* I)\psi = \mathbf{0}$, en cuyo caso $\lambda^* \in \sigma_p(T^\dagger)$.

Ejemplo 2.4. - Consideremos nuevamente el operador T_1 del ejemplo 2.2. Hemos visto en el ejemplo 2.3 que el espectro puntual de T_1 es todo el plano complejo, $\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$. Entonces el espectro de $T_1^\dagger$ es también todo el plano complejo, $\sigma(T_1^\dagger) = \mathbb{C}$.

Por otra parte, resulta inmediato mostrar que las condiciones de contorno que pesan sobre las funciones en $\mathcal{D}(T_1^\dagger)$, ec. (2.25), hacen que este operador no tenga autovectores, $\sigma_p(T_1^\dagger) = \emptyset$. En consecuencia, el espectro residual de $T_1^\dagger$ es todo el plano complejo, $\sigma_r(T_1^\dagger) = \mathbb{C}$.

[7] Para ver que esto es así, llamemos $F = \overline{\text{Rank}(T - \lambda I)}$. Sabemos que todo vector $\psi \in \mathcal{H}$ puede escribirse como $\psi = u + v$, con $u \in F$ y $v \in F^\perp$. En esas condiciones, si $\{\psi \perp F \Rightarrow \psi = v = \mathbf{0}\}$, entonces $F^\perp = \{\mathbf{0}\}$ y F es denso en $\mathcal{H}$. En consecuencia, si F no es denso en $\mathcal{H} \Rightarrow \exists\, \psi \neq \mathbf{0} \mid \psi \perp F$.

3. Operadores simétricos

• Un operador lineal T, densamente definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se dice **simétrico** si[8] $T \subset T^\dagger$. Es decir, si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^\dagger), \\ \\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T),\ T^\dagger \varphi = T\varphi. \end{array} \right. \tag{3.2}$$

En particular, en este caso el operador adjunto $T^\dagger$ también está densamente definido.

• Toda extensión simétrica S de T está contenida en $T^\dagger$. En efecto, si $T \subset S \subset S^\dagger \Rightarrow S \subset S^\dagger \subset T^\dagger$. Por lo tanto, $T \subset S \subset S^\dagger \subset T^\dagger$.

• Un operador se dice **autoadjunto**[9] si $T^\dagger = T$, es decir, si T es simétrico y $\mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{D}(T)$.

• Un operador simétrico (densamente definido) es siempre clausurable. En efecto, $T \subset T^\dagger$, que es cerrado (ver Teorema I). Por lo tanto, T tiene una extensión cerrada.

• Por otra parte, $T \subset T^\dagger \Rightarrow \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^\dagger)$, que entonces es denso en $\mathcal{H}$. Por el **Teorema I**, T es clausurable y su clausura es $\overline{T} = T^{\dagger\dagger}$. En consecuencia,

$$T \subset \overline{T} = T^{\dagger\dagger} \subset T^\dagger. \tag{3.3}$$

• Si T es simétrico y cerrado,

$$T = \overline{T} = T^{\dagger\dagger} \subset T^\dagger. \tag{3.4}$$

• Si T es autoadjunto,

$$T = \overline{T} = T^{\dagger\dagger} = T^\dagger \tag{3.5}$$

y, en consecuencia, T es cerrado.

---

[8]Equivalentemente, T es simétrico si $\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(T)$ es

$$(\varphi_1, T\varphi_2) = (T\varphi_1, \varphi_2)\,. \tag{3.1}$$

[9]Los **observables** de la Mecánica Cuántica están representados por operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert.

• Un operador T simétrico y cerrado es autoadjunto si y sólo si su adjunto $T^\dagger$ es simétrico.

En efecto, si T es autoadjunto $\Rightarrow T = T^{\dagger\dagger} = T^\dagger \Rightarrow T^\dagger$ es simétrico: $T^\dagger \subset T^{\dagger\dagger}$. Por otra parte, si $T^\dagger$ es simétrico, $T^\dagger \subset T^{\dagger\dagger} = T \subset T^\dagger \Rightarrow T$ es autoadjunto: $T = T^\dagger$.

• Si T es un operador autoadjunto, entonces

a) el espectro residual de T es vacío, $\sigma_r(T) = \emptyset$,
b) el espectro de T es un subconjunto de los reales, $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,
c) autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí.

Para ver que esto es así, primero consideremos la aplicación

$$[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}] : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathrm{Rank}\,[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}] \subset \mathcal{H}\,, \tag{3.6}$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\| \,[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]\,\varphi\, \|^2 = \| \,(T - \lambda\,\mathbf{I})\,\varphi\, \|^2 + \mu^2 \,\| \,\varphi\, \|^2 \geq \mu^2 \,\| \,\varphi\, \|^2 \tag{3.7}$$

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$. En consecuencia, $(\lambda + i\,\mu) \notin \sigma_p(T)$ si $\mu \neq 0$.

Además, para $\mu \neq 0$, $[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ es una biyección de $\mathcal{D}(T)$ en $\mathrm{Rank}[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ con inversa acotada. En efecto, si φ_1 y φ_2 tienen la misma imagen, entonces

$$0 = \| \,[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]\,(\varphi_1 - \varphi_2)\, \| \geq |\,\mu\,|\, \| \,\varphi_1 - \varphi_2\, \|\,, \tag{3.8}$$

lo que implica que $\varphi_1 = \varphi_2$. Por otra parte, de (3.7) también resulta que

$$\frac{\| \,\varphi\, \|}{\| \,[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]\,\varphi\, \|} \leq \frac{1}{|\,\mu\,|}\,, \tag{3.9}$$

desigualdad que muestra que la inversa de $[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ es acotada en $\mathrm{Rank}[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]$.

En esas condiciones, si $\mathrm{Rank}[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ no es denso en $\mathcal{H}$, entonces $(\lambda + i\,\mu) \in \sigma_r(T) \Rightarrow (\lambda - i\,\mu) \in \sigma_p(T^\dagger = T)$, lo que hemos visto que no es posible si $\mu \neq 0$.

Por lo tanto, $\mathrm{Rank}[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ es denso en $\mathcal{H}$ y $(\lambda + i\,\mu) \in \rho_r(T)$ para todo $\mu \neq 0$, lo que prueba que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Finalmente, si un real $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \lambda^* = \lambda \in \sigma_p(T^\dagger = T)$, lo que no es posible porque (por definición) se trata de conjuntos disjuntos. Por lo tanto, $\sigma_r(T) = \emptyset$. $\square$

4. Extensiones autoadjuntas de operadores simétricos

• Un operador simétrico T se dice **esencialmente autoadjunto** si su clausura $\overline{T}$ es un operador autoadjunto.

• Si T es esencialmente autoadjunto, entonces T tiene una única extensión autoadjunta[10].

En efecto, supongamos que S es una extensión autoadjunta de T. Entonces, $S = S^\dagger$ es cerrado. Y como $T \subset S \Rightarrow \overline{T} = T^{\dagger\dagger} \subset S$. En consecuencia, para los adjuntos de esos dos operadores tenemos que $S^\dagger = S \subset \overline{T}^\dagger = \overline{T}$. Por lo tanto, $S = \overline{T}$

• Si T es clausurable, entonces T es esencialmente autoadjunto si y sólo si $T^\dagger$ es autoadjunto.

En efecto, por el **Teorema I**, si T es clausurable $\Rightarrow \overline{T}^\dagger = T^\dagger$. Ahora bien, si T es esencialmente autoadjunto $\Rightarrow T^\dagger = \overline{T}^\dagger = \overline{T} = T^{\dagger\dagger}$, es decir, $T^\dagger$ es autoadjunto.

Inversamente, si $T^\dagger$ es autoadjunto, entonces $T^\dagger = T^{\dagger\dagger} = \overline{T} \Rightarrow \overline{T}$ es autoadjunto. Por lo tanto, T es esencialmente autoadjunto.

• Si T es autoadjunto, $T^\dagger = T$, entonces T es cerrado. Además, $\lambda = \pm i$ no es un autovalor de $T^\dagger$.

En efecto, sea $\varphi_\pm \in \mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{D}(T)$ tal que $T^\dagger \varphi_\pm = \pm i\, \varphi_\pm = T\varphi_\pm$. Entonces,

$$\big(T^\dagger \varphi_\pm, \varphi_\pm\big) = \mp i \|\varphi_\pm\|^2 = (\varphi_\pm, T\varphi_\pm) = \pm i \|\varphi_\pm\|^2 \Rightarrow \|\varphi_\pm\| = 0. \tag{4.1}$$

Inversamente, si T es simétrico y cerrado, y las ecuaciones $T^\dagger \varphi_\pm = \pm i\, \varphi_\pm$ no tienen soluciones no triviales, entonces T es autoadjunto como consecuencia del siguiente teorema.

• **Teorema II:** Sea T un operador simétrico densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) T es autoadjunto,
b) T es cerrado y $\mathrm{Ker}(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}) = \{\mathbf{0}\}$,
c) $\mathrm{Rank}(T \pm i\,\mathbf{I}) = \mathcal{H}$.

---

[10] En general se debe tratar con operadores T simétricos no cerrados. Si se puede establecer que T es esencialmente autoadjunto, entonces T está unívocamente asociado a un operador autoadjunto $\overline{T} = T^{\dagger\dagger}$

Por una parte, es evidente que a) $\Rightarrow$ b).

Para ver que b) $\Rightarrow$ c) supongamos que Rank $(T \pm i\,\mathbf{I})$ no sea denso en $\mathcal{H}$. Entonces, existen vectores no nulos $\psi_\pm \in \mathcal{H}$ tales que

$$(\psi_\pm, (T \pm i\,\mathbf{I})\varphi) = 0\,, \ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(T) \text{ denso en } \mathcal{H}\,. \tag{4.2}$$

Esos productos escalares definen funcionales lineales y continuas (idénticamente nulas) de φ, de modo que $\psi_\pm \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, y podemos escribir

$$\left(\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right)\psi_\pm, \varphi\right) = 0\,, \ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(T) \ \Rightarrow \ T^\dagger\,\psi_\pm = \pm i\,\psi_\pm\,. \tag{4.3}$$

En consecuencia, Ker $\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Por lo tanto,

$$\text{Ker } \left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) = \{\mathbf{0}\} \ \Rightarrow \ \text{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I}) \text{ denso en } \mathcal{H}\,. \tag{4.4}$$

Si, además, T es cerrado se puede demostrar que el rango de T es también cerrado, de modo que Rank $(T \pm i\,\mathbf{I}) = \mathcal{H}$ (ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I, Theorem VIII.3, pag. 256). Por lo tanto, b) $\Rightarrow$ c).

Por otra parte, si Ker $\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) \neq \{\mathbf{0}\}$ es porque existen vectores no nulos $\psi_\pm \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ tales que $T^\dagger\,\psi_\pm = \pm i\,\psi_\pm$. Entonces,

$$\left(\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right)\psi_\pm, \varphi\right) = (\psi_\pm, (T \pm i\,\mathbf{I})\,\varphi) = 0\,, \ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(T)\,, \tag{4.5}$$

de modo que Rank $(T \pm i\,\mathbf{I})$ no es denso en $\mathcal{H}$.

Por lo tanto,

$$\text{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I}) \text{ denso en } \mathcal{H} \ \Rightarrow \ \text{Ker } \left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) = \{\mathbf{0}\}\ . \tag{4.6}$$

Finalmente, supongamos que Rank $(T \pm i\,\mathbf{I}) = \mathcal{H}$. Entonces, $\forall\,\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ existen vectores $\varphi_\pm \in \mathcal{D}(T)$ tales que

$$\left(T^\dagger \pm i\,\mathbf{I}\right)\psi = (T \pm i\,\mathbf{I})\,\varphi_\pm \Rightarrow \left(T^\dagger \pm i\,\mathbf{I}\right)(\psi - \varphi_\pm) = \mathbf{0}\,, \tag{4.7}$$

dado que T es simétrico. Pero, en esas condiciones, la implicación (4.6) requiere que $\psi = \varphi_\pm$, de modo que $\mathcal{D}(T^\dagger) \subset \mathcal{D}(T)$.

En consecuencia, $T^\dagger = T$, y c) $\Rightarrow$ a). $\square$

• **Corolario I:** Sea T un operador simétrico densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) T es esencialmente autoadjunto,
b) Ker$(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}) = \{\mathbf{0}\}$,
c) Rank$(T \pm i\,\mathbf{I})$ es denso en $\mathcal{H}$.

• El resultado anterior establece el criterio básico para determinar cuándo un operador simétrico tiene una única extensión autoadjunta.

Ejemplo 4.1. - Para describir el impulso en la Mecánica Cuántica se introduce el operador diferencial en la recta $P\varphi(x) = -i\varphi'(x)$, que es simétrico sobre el dominio $\mathcal{D}(P) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Si $\psi(x) \in \mathcal{D}(P^\dagger)$, entonces $\exists\, \chi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ tal que

$$(\psi, P\varphi) = (\psi, -i\,\varphi') = \int_{Sop(\varphi)} \psi(x)^* \left(-i\,\varphi'(x)\right)\,dx = (\chi, \varphi)\,, \tag{4.8}$$

$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(P)$. Esto requiere que $\psi(x) \in AC(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, con una derivada primera $\psi'(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, en cuyo caso tenemos $\chi(x) = -i\,\psi'(x)$.

En consecuencia,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(P^\dagger) = \{\psi(x) \in AC(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \mid \psi'(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})\}\,, \\ \\ P^\dagger\psi(x) = -i\,\psi'(x). \end{array} \right. \tag{4.9}$$

Como $\mathcal{D}(P^\dagger) \supset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(P^\dagger)$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ y puede definirse $P^{\dagger\dagger} = \overline{P}$. Un razonamiento similar al anterior muestra que $\mathcal{D}(P^{\dagger\dagger}) = \mathcal{D}(P^\dagger)$, con $P^{\dagger\dagger}\psi(x) = -i\,\psi'(x)$. Es decir, $P^{\dagger\dagger} = \overline{P} = P^\dagger$.

En consecuencia,

a) Como $\overline{P}$ es autoadjunto $\Rightarrow$ P es esencialmente autoadjunto.

b) Consideremos la ecuación de autovalores

$$P^\dagger\psi_\pm(x) = \pm i\,\psi_\pm(x) = -i\,\psi'_\pm(x). \tag{4.10}$$

Como $\psi_\pm(x) \in AC(\mathbb{R})$, resulta que $\psi_\pm(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y entonces debemos resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\psi'_\pm(x) = \mp\psi_\pm(x) \Rightarrow \psi_\pm(x) = e^{\mp x} \notin \mathbf{L_2}(\mathbb{R}). \tag{4.11}$$

Por lo tanto, $\text{Ker}\left(P^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) = \{\mathbf{0}\}$.

c) Finalmente, ya sabemos que esta última condición implica que $\text{Rank}(P \pm iI)$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

• El siguiente ejemplo muestra que un operador simétrico puede admitir muchas extensiones autoadjuntas[11].

---

[11]Como veremos más adelante, también puede no admitir ninguna extensión autoadjunta.

Ejemplo 4.2. - Sea T definido sobre $\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$ como $T\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$. Este operador es claramente simétrico pues, integrando por partes, tenemos

$$(T\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, T\varphi_2)\,, \ \forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1). \tag{4.12}$$

Si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T^\dagger) \subset \mathbf{L_2}(0,1)$, entonces $\exists\, \chi \in \mathbf{L_2}(0,1)$ tal que

$$(\psi, T\varphi) = (\psi, -i\,\varphi') = (\chi, \varphi)\,, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1). \tag{4.13}$$

Esto requiere[12] que $\psi(x) \in AC(0,1)$, para que sea posible integrar por partes, de donde resulta que $\chi(x) = -i\,\psi'(x) \in \mathbf{L}_2(0,1)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(T^\dagger) = \{\psi(x) \in AC(0,1) \subset \mathbf{L_2}(0,1) \ | \ \psi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1)\}\,, \tag{4.14}$$

y el operador adjunto actúa según

$$T^\dagger \psi(x) = -i\,\psi'(x). \tag{4.15}$$

Ahora bien, las ecuaciones de autovalores

$$T^\dagger \psi_\pm(x) = -i\,\psi_\pm'(x) = \pm i\,\psi_\pm(x) \in AC(0,1) \tag{4.16}$$

se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias que tienen soluciones no triviales,

$$\psi_\pm(x) = e^{\mp x} \in \mathcal{C}^\infty(0,1) \subset AC(0,1). \tag{4.17}$$

En consecuencia, T no es esencialmente autoadjunto.

Como $AC(0,1) \supset \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, $\mathcal{D}(T^\dagger)$ es un conjunto denso en $\mathbf{L_2}(0,1)$ y puede definirse $(T^\dagger)^\dagger$.

Si $\phi(x) \in \mathcal{D}(T^{\dagger\dagger})$, entonces $\exists\, \chi \in \mathbf{L_2}(0,1)$ tal que

$$\big(\phi, T^\dagger \psi\big) = (\phi, -i\,\psi') = (\chi, \psi)\,. \tag{4.18}$$

Para que ese producto escalar sea una funcional lineal y continua de $\psi \in AC(0,1)$, debe ser posible integrar por partes, lo que requiere que $\phi(x)$ tenga una derivada en $\mathbf{L_2}(0,1)$. En consecuencia, $\phi(x) \in AC(0,1)$ con $\phi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1)$, y

$$\int_0^1 \phi(x)^* (-i\,\psi'(x))\, dx = -i\,\phi(x)^* \psi(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 (-i\phi'(x))^* \psi(x)\, dx. \tag{4.19}$$

Pero una funcional continua respecto de la distancia en $\mathbf{L_2}(0,1)$ no puede depender del valor de su argumento $\psi(x)$ en los puntos particulares $x = 0, 1$ (región de medida nula donde un dado vector de $\mathbf{L_2}(0,1)$ puede tomar valores arbitrarios).

[12] La condición (4.13) también puede interpretarse como estableciendo que la derivada de ψ como **distribución** es localmente sumable (ver Notas sobre Teoría de Distribuciones), de donde resulta que $\psi(x)$ es absolutamente continua.

Por lo tanto, las funciones en $\mathcal{D}(T^{\dagger\dagger})$ deben satisfacer además las condiciones de contorno $\phi(0) = 0 = \phi(1)$.

En definitiva, $T^{\dagger\dagger} = \overline{T}$, la mínima extensión cerrada de T, está definido en un dominio denso por

$$\text{(4.20)} \qquad \begin{cases} \mathcal{D}(T^{\dagger\dagger}) = \{\phi(x) \in AC(0,1) \mid \phi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1), \phi(0) = 0 = \phi(1)\}\,, \\ \\ T^{\dagger\dagger}\phi(x) = -i\,\phi'(x). \end{cases}$$

Nótese que $T \subset \overline{T} \subset T^\dagger$, con $\overline{T} \neq T^\dagger$ ($T^\dagger$ no es autoadjunto). Dado que $\overline{T}^\dagger = T^\dagger \supset \overline{T}$, la clausura es una extensión simétrica (no autoadjunta) cerrada de T.

Veamos ahora que $\overline{T}$ admite extensiones autoadjuntas. En efecto, para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ de módulo 1, consideremos el operador definido por

$$\text{(4.21)} \qquad \begin{cases} \mathcal{D}(T_\alpha) = \{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1), \varphi(1) = \alpha\,\varphi(0)\}\,, \\ \\ T_\alpha\varphi(x) = -i\,\varphi'(x). \end{cases}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que antes, si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T_\alpha^\dagger)$, entonces $\psi(x)$ debe ser absolutamente continua de modo que el producto escalar

$$\text{(4.22)} \qquad (\psi, T_\alpha\varphi) = -i\int_0^1 \psi(x)^*\varphi'(x)\,dx = -i\,\psi(x)^*\varphi(x)\Big|_0^1 + (-i\,\psi', \varphi)$$

sea una funcional lineal y continua de $\varphi(x) \in \mathcal{D}(T_\alpha)$. Pero esto requiere además que, $\forall\,\varphi(x) \in \mathcal{D}(T_\alpha)$, sea

$$\text{(4.23)} \qquad \psi(1)^*\varphi(1) - \psi(0)^*\varphi(0) = (\psi(1)^* - \alpha^*\psi(0)^*)\,\alpha\,\varphi(0) = 0\,.$$

Como el valor de $\varphi(0)$ es arbitrario, debe ser $\psi(1) - \alpha\,\psi(0) = 0$. Es decir, $\mathcal{D}(T_\alpha^\dagger) = \mathcal{D}(T_\alpha)$ y $T_\alpha^\dagger\psi(x) = -i\,\psi'(x)$.

En conclusión, $T_\alpha^\dagger = T_\alpha$ para cada complejo α de módulo 1. En esas condiciones, existe toda una familia (dependiente de un parámetro) de extensiones autoadjuntas de T (todas ellas, naturalmente, contenidas en $T^\dagger$.)

Finalmente, señalemos que:

1) $\forall\,\alpha = e^{i\,\gamma}$, con $\gamma \in [0, 2\pi)$, tenemos $\overline{T} \subset T_\alpha = T_\alpha^\dagger \subset T^\dagger$.

2) El operador T no tiene autovectores,

$$\text{(4.24)} \qquad -i\,\varphi'(x) = \lambda\,\varphi(x),\ \text{con}\ \varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1) \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0\,,$$

de modo que $\sigma_p(T) = \emptyset$.

3) El operador $\overline{T}$ tampoco tiene autovectores,

$$-i\,\varphi'(x) = \lambda\,\varphi(x), \text{ con } \varphi(x) \in AC(0,1), \ \varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0\,, \tag{4.25}$$

de modo que $\sigma_p(\overline{T}) = \emptyset$.

4) Todo número complejo es autovalor de $T^\dagger$ con degeneración 1,

$$-i\,\varphi'(x) = \lambda\,\varphi(x) \ \Rightarrow \ \varphi(x) = e^{i\lambda x}\varphi(0) \in AC(0,1), \ \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\,. \tag{4.26}$$

Por lo tanto, $\sigma_p(T^\dagger) = \mathbb{C}$ $\big(\Rightarrow \sigma(T^{\dagger\dagger}) = \sigma_r(\overline{T}) = \mathbb{C}\big)$.

5) T_α tiene un conjunto (numerable) ortogonal y completo de autofunciones cuyos autovalores (reales y no degenerados) dependen del parámetro α,

$$\begin{array}{c} -i\,\varphi'(x) = \lambda\,\varphi(x), \text{ con } \varphi(x) \in AC(0,1), \text{ y } \varphi(1) = \alpha\,\varphi(0) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ \varphi_n(x) = e^{i\lambda_n x}\varphi(0), \text{ con } \lambda_n = 2\pi n - i\log\alpha = 2\pi n + \gamma\,, \end{array} \tag{4.27}$$

con $n \in \mathbb{Z}$, y $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m}$.

En este caso, $\sigma_p(T_\alpha) = \{\lambda_n\,, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, y $\sigma_r(T_\alpha) = \emptyset$.

5. Teoría de von Neumann

• **Teorema III:** Sea T un operador simétrico cerrado, densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces:

1- a) $\dim \mathrm{Ker}(T^\dagger - \lambda\,\mathbf{I})$ es constante en el semiplano abierto superior del plano complejo λ,
   b) $\dim \mathrm{Ker}(T^\dagger - \lambda\,\mathbf{I})$ es constante en el semiplano abierto inferior del plano complejo λ,

2- el espectro de T es **uno** de los posibles subconjuntos del plano complejo λ que se enumeran a continuación:
   a) el semiplano superior cerrado,
   b) el semiplano inferior cerrado,
   c) todo el plano complejo,
   d) un subconjunto del eje real,

3- T es autoadjunto $\Leftrightarrow$ su espectro es un subconjunto del eje real,

4- T es autoadjunto $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(T^\dagger - \lambda\,\mathbf{I}) = 0, \ \forall\,\lambda \notin \mathbb{R}$.

Para la demostración, ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Theorem X.1, pag. 136.

• **Corolario II:** Si un operador simétrico cerrado T tiene al menos un número real en su conjunto resolvente $\Rightarrow T$ es autoadjunto.

En efecto, como $\rho(T)$ es abierto, si contiene un número real $\Rightarrow$ contiene todo un entorno de ese real, el cual contiene tanto puntos del semiplano superior como del inferior. Entonces, por el teorema anterior, T es autoadjunto.

• Se definen los **subespacios de deficiencia** de un operador simétrico como

$$\mathcal{K}_\pm := \mathrm{Ker}\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) \subset \mathcal{D}(T^\dagger), \tag{5.1}$$

siendo los **índices de deficiencia** sus respectivas dimensiones,

$$n_\pm(T) := \dim \mathcal{K}_\pm = \dim \mathrm{Ker}\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) \tag{5.2}$$

• Los índices de deficiencia pueden tomar cualquier valor natural, e incluso ser ∞, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1. - Supongamos que los operadores T_n, $n = 1, 2, \dots$ son simétricos sobre los dominios $\mathcal{D}(T_n) \subset \mathcal{H}_n$. Sea $\mathcal{D}(T)$ el conjunto de vectores de $\mathcal{H} := \bigoplus_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n$ de la forma $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots)$, donde sólo un número finito de vectores $\varphi_n \in \mathcal{D}(T_n)$ son no nulos.

En esas condiciones, el operador $T := \bigoplus_{n=1}^\infty T_n$ es simétrico en $\mathcal{D}(T)$, y sus índices de deficiencia son

$$n_\pm(T) = \sum_{n=1}^{\infty} n_\pm(T_n). \tag{5.3}$$

• **Teorema IV:** Sea T un operador simétrico y cerrado con índices de deficiencia $n_\pm(T)$. Las extensiones simétricas y cerradas de T están en correspondencia uno a uno con el conjunto de isometrías parciales (en el sentido del producto escalar usual) de $\mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_-$.

Si U es una tal isometría con dominio $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{K}_+$ (de dimensión $\dim \mathcal{D}(U) \leq n_+(T)$), entonces la correspondiente extensión cerrada y simétrica de T, T_U, tiene por dominio

$$\mathcal{D}(T_U) = \{\chi = \varphi + \psi_+ + U\psi_+ \mid \varphi \in \mathcal{D}(T),\ \psi_+ \in \mathcal{D}(U)\} \subset \mathcal{D}(T^\dagger). \tag{5.4}$$

Siendo T_U la restricción de $T^\dagger$ a ese dominio, su acción está dada por

$$T_U\chi = T^\dagger\chi = T\varphi + i\,\psi_+ - i\,U\psi_+. \tag{5.5}$$

Si $n_\pm(T) < \infty \Rightarrow$ los índices de deficiencia de T_U están dados por

$$n_\pm(T_U) = n_\pm(T) - \dim \mathcal{D}(U). \tag{5.6}$$

Para la demostración, ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Theorem X.2, pag. 140.

• **Corolario III:** Sea T un operador simétrico cerrado con índices de deficiencia $n_+(T)$ y $n_-(T)$. Entonces

a) T es autoadjunto $\Leftrightarrow n_+(T) = 0 = n_-(T)$,

b) T admite extensiones autoadjuntas $\Leftrightarrow n_+(T) = n_-(T) > 0$. En ese caso, existe una correspondencia uno a uno entre las extensiones autoadjuntas de T y las aplicaciones unitarias $U : \mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_-$.

c) Si $n_+(T) = 0 \neq n_-(T)$ ó $n_+(T) \neq 0 = n_-(T)$, el operador T no admite extensiones simétricas no triviales. Esos operadores ya son **máximamente simétricos**.

• El siguiente ejemplo muestra que el *impulso radial* no corresponde a un observable de la Mecánica Cuántica.

Ejemplo 5.2. - Consideremos el operador $P_r := -i\,\frac{\partial}{\partial r}$ simétrico sobre el dominio $\mathcal{D}(P_r) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$.

Si $\psi \in \mathcal{D}(P_r^\dagger) \Rightarrow \exists\, \chi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$(\psi, P_r\varphi) = (\psi, -i\,\varphi') = (\chi, \varphi)\,,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+). \tag{5.7}$$

Entonces $\mathcal{D}(P_r^\dagger) = \{\psi(r) \in AC(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \mid \psi'(r) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)\}$, y $P_r^\dagger\psi(r) = -i\,\psi'(r)$.

Buscamos ahora soluciones de

$$P_r^\dagger\psi_\pm(r) = -i\,\psi_\pm'(r) = \pm i\,\psi_\pm(r),\ \text{con } \psi_\pm(r) \in \mathcal{D}(P_r^\dagger). \tag{5.8}$$

Esa ecuación diferencial tiene soluciones $\psi_\pm(r) = e^{\mp r}\psi_\pm(0) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$. Pero de ellas, sólo $\psi_+(r) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$. En consecuencia, $n_+(P_r) = 1 \neq n_-(P_r) = 0 \Rightarrow P_r$ no admite extensiones autoadjuntas.

Por lo tanto, P_r no corresponde a un observable[13].

---

[13] En un espacio de dimensión D debe considerarse el operador

$$P_r := -i\,[\partial_r + (D-1)/2r] = r^{-\frac{D-1}{2}}\,(-i\partial_r)\,r^{\frac{D-1}{2}}\,, \tag{5.9}$$

simétrico respecto de la medida $r^{D-1}dr$, para el cual se obtienen similares resultados.

En efecto, si $\psi_\pm(r) = r^{-\frac{D-1}{2}}\,e^{\mp r}$ tenemos $[\partial_r + (D-1)/2r]\,\psi_\pm(r) = \mp\psi_\pm(r)$, pero sólo $\psi_+(r) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+;\, r^{D-1}\,dr)$.

• El siguiente ejemplo, un caso particular de operador de Sturm - Liouville con coeficientes regulares, muestra que estos operadores admiten extensiones autoadjuntas que están determinadas por condiciones de contorno locales en los extremos del intervalo.

Ejemplo 5.3. - Sea el operador diferencial $L := -\frac{d^2}{dx^2}$ definido sobre el dominio denso $\mathcal{D}(L) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, en el cual es simétrico.

Su adjunto está definido sobre el dominio denso

$$\mathcal{D}(L^\dagger) = \left\{\psi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \mid \psi'(x) \in AC(\mathbb{R}^+), \psi''(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)\right\}, \tag{5.10}$$

sobre el cual actúa según

$$L^\dagger\psi(x) = -\psi''(x). \tag{5.11}$$

Similarmente, el operador clausura $\overline{L} = L^{\dagger\dagger}$ está definido sobre el dominio

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(L^{\dagger\dagger}) = \{\phi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \mid \phi'(x) \in AC(\mathbb{R}^+), \\ \phi''(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+), \phi(0) = 0 = \phi'(0)\} \subset \mathcal{D}(L^\dagger), \end{aligned} \tag{5.12}$$

funciones sobre las cuales también actúa como el operador diferencial

$$L^{\dagger\dagger}\phi(x) = -\phi''(x). \tag{5.13}$$

La ecuación de autovalores

$$L^\dagger\psi_\pm(x) = -\psi_\pm''(x) = \pm i\,\psi_\pm(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \tag{5.14}$$

implica que $\psi_\pm(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, reduciéndose a una ecuación diferencial ordinaria cuyas soluciones en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$ son

$$\psi_\pm(x) = e^{-\left(\frac{1 \mp i}{\sqrt{2}}\right)x}\,\psi_\pm(0) \ \Rightarrow \ n_+(L) = 1 = n_-(L), \tag{5.15}$$

y los subespacios de deficiencia son unidimensionales.

En consecuencia, existe una familia de extensiones autoadjuntas de L dependiente de un parámetro continuo, correspondientes a las isometrías $U\psi_+(x) = e^{i\gamma}\psi_-(x)$, con $\gamma \in [0, 2\pi)$, donde $\|\psi_+\| = \|\psi_-\|$.

Cada extensión autoadjunta L_γ es la restricción de $L^\dagger$ al domino

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(L_\gamma) = \\ = \left\{\chi(x) = \phi(x) + A\left[\psi_+(x) + e^{i\gamma}\psi_-(x)\right] \ \mid \phi(x) \in \mathcal{D}(L^{\dagger\dagger}),\ A \in \mathbb{C}\right\}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

actuando sobre esas funciones según

$$L_\gamma \chi(x) = L^\dagger \chi(x) = -\phi''(x) + i\,A\left[\psi_+(x) - e^{i\gamma}\psi_-(x)\right]. \tag{5.17}$$

Ese dominio también puede ser caracterizado mediante **condiciones de contorno locales** en $x=0$. En efecto, para $x \to 0^+$ tenemos

$$\begin{array}{c} \chi(0) = 0 + A\,[1+e^{i\gamma}] = 2A\,e^{i\gamma/2}\cos(\gamma/2)\,, \\[2ex] \chi'(0) = 0 + iA\left[-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + e^{i\gamma}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \\[2ex] = -\dfrac{A}{\sqrt{2}}\,e^{i\gamma/2}\,\{2\cos(\gamma/2) + 2\sin(\gamma/2)\}, \end{array} \tag{5.18}$$

de donde, para $A \neq 0$, resulta la relación

$$\begin{array}{c} \sqrt{2}\,\cos(\gamma/2)\,\chi'(0) = -\left(\cos(\gamma/2) + \sin(\gamma/2)\right)\chi(0) \\[2ex] \Rightarrow \alpha(\gamma)\,\chi(0) + \beta(\gamma)\,\chi'(0) = 0\,. \end{array} \tag{5.19}$$

Esta igualdad también se satisface para $A=0$, puesto que en ese caso $\chi(x) \in \mathcal{D}(L^{\dagger\dagger})$.

En (5.19), las constantes $\alpha(\gamma), \beta(\gamma) \in \mathbb{R}$ y no se anulan simultáneamente, dado que

$$\alpha(\gamma)^2 + \beta(\gamma)^2 = 2 + \cos\gamma + \sin\gamma > 0\,,\ \ \forall\,\gamma \in [0, 2\pi)\,. \tag{5.20}$$

• **Teorema V:** Sea A un operador cerrado densamente definido sobre el dominio $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$, y sea

$$\mathcal{D}(A^\dagger A) = \left\{\varphi \in \mathcal{D}(A) \mid A\varphi \in \mathcal{D}(A^\dagger)\right\}. \tag{5.21}$$

Entonces, definiendo el operador $A^\dagger A$ sobre $\mathcal{D}(A^\dagger A)$ mediante

$$(A^\dagger A)\varphi := A^\dagger(A\varphi), \tag{5.22}$$

resulta que $A^\dagger A$ es autoadjunto.

Para la demostración, ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Theorem X.25, pag. 180.

• Para el caso de operadores no acotados, el resultado anterior es absolutamente no trivial ya que, a priori, no es evidente que pueda haber vectores no nulos en $\mathcal{D}(A^\dagger A)$, ni mucho menos que ese dominio sea denso en $\mathcal{H}$.

Ejemplo 5.4. - Consideremos el operador con dominio

$$\mathcal{D}(A) = \{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1), \varphi(0) = 0 = \varphi(1)\}\,, \tag{5.23}$$

y tal que $A\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$. Este operador es cerrado, ya que coincide con la clausura del operador T del ejemplo 4.2.

Su adjunto (ver ejemplo 4.2) tiene por dominio a

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{\psi(x) \in AC(0,1) \mid \psi'(x) \in \mathbf{L}_2(0,1)\}\ , \tag{5.24}$$

donde actúa según $A^\dagger\psi(x) = -i\,\psi'(x)$.

Del **Teorema V** resulta que $A^\dagger A$ corresponde a la extensión autoadjunta de $L := -\frac{d^2}{dx^2}$ con condiciones de contorno locales dadas por $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Similarmente $AA^\dagger$ corresponde a la extensión autoadjunta de L con condiciones de contorno $\psi'(0) = 0 = \psi'(1)$.

Bibliografía:

- M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Volúmenes I y II.