CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

TEORÍA DE GRUPOS

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

NOTAS SOBRE EL GRUPO DE LORENTZ

1. El grupo de Lorentz

El espacio de Minkowsky, $\mathbf{M}_4$, es un espacio real pseudo - euclídeo de signatura $(1,3)$. Las coordenadas que distintos **observadores inerciales** asignan a un mismo punto de $\mathbf{M}_4$ están relacionadas por transformaciones lineales que preservan el **intervalo**

$$s^2 = (x^0)^2 - x^i x^i = (\bar{x}^0)^2 - \bar{x}^i \bar{x}^i. \tag{1.1}$$

En términos de la **métrica** del espacio, $g = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$, el intervalo se escribe

$$\begin{aligned} s^2 = x^t g x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \\ \bar{x}^t g \bar{x} = g_{\mu\nu} \bar{x}^\mu \bar{x}^\nu. \end{aligned} \tag{1.2}$$

La relación entre las coordenadas está dada por la transformación lineal

$$\bar{x} = L x, \tag{1.3}$$

o bien, en componentes,

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{1.4}$$

donde los elementos de matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ son reales. La invarianza del intervalo implica que las matrices L preservan la métrica g,

$$L^t g L = g \Longrightarrow g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}. \tag{1.5}$$

Actualizado el 1 de octubre de 2005.

Esto significa que el grupo de Lorentz es lo que antes hemos llamado grupo pseudo-ortogonal $O(1,3)$.

La relación (1.5) implica que el determinante de las matrices L sólo puede tomar los valores

$$\det L = \pm 1. \tag{1.6}$$

Dado que todo grupo de matrices es un grupo de Lie, sus elementos son funciones continuas de los parámetros del grupo. En consecuencia, el cambio de signo del determinante en (1.6) no puede ser producto de la variación de un parámetro continuo. De ello resulta que ***la variedad del grupo de Lorentz es no conexa***. Si $\det L = +1$ (-1) la transformación L se dice **propia** (**impropia**).

Además, de (1.5) surge que

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = g_{00} \Longrightarrow (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \Lambda^{i}{}_{0}\Lambda^{i}{}_{0} = 1. \tag{1.7}$$

En consecuencia, $(\Lambda^{0}{}_{0})^2 \geq 1$, y las transformaciones son llamadas **ortócronas** si $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$, o bien **no ortócronas** para $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$. Tampoco aquí es posible pasar de unas a otras mediante la variación de un parámetro continuo.

Por lo tanto, el grupo de Lorentz está constituido por cuatro componentes desconectadas entre sí, caracterizadas por los signos de $\det L$ y de $\Lambda^{0}{}_{0}$. De ellas, sólo la parte conexa que contiene a la identidad forma un subgrupo (invariante[1]), llamado **subgrupo propio ortócrono**, y denotado por $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$. Téngase en cuenta que $\det \mathbf{1}_4 = 1$ y $\mathbf{1}^{0}{}_{0} = 1$.

Las otras componentes corresponden a los ***cosets*** que se obtienen de $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$. La transformación de **paridad**,

$$P = \mathrm{diag}(1, -1, -1 - 1), \tag{1.8}$$

que cambia el signo de las coordenadas espaciales y satisface

$$\det P = -1,\ P^{0}_{\ 0} = 1,\ P^2 = \mathbf{1}_4, \tag{1.9}$$

es una transformación ***impropia ortócrona*** con la que se construye el coset $\mathcal{L}_{-}^{\uparrow} = P\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$.

La **inversión temporal**,

$$T = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1), \tag{1.10}$$

[1]En efecto, si $L_0 \in \mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$, existe una curva sobre el grupo que la conecta de manera continua con la identidad $\mathbf{1}_4$. Entonces, $\forall L \in \mathcal{L}$, LL_0L^{-1} se conecta con continuidad con $L\mathbf{1}_4L^{-1} = \mathbf{1}_4$ y, en consecuencia, $LL_0L^{-1} \in \mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$.

que satisface

$$\det T = -1,\ T^0{}_0 = -1,\ T^2 = \mathbf{1}_4, \tag{1.11}$$

es una transformación ***impropia no ortócrona*** con la que se construye el coset $\mathcal{L}_-^\downarrow = T\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Finalmente, el producto $PT = TP = -\mathbf{1}_4$ es una transformación ***propia no ortócrona***, con la que se obtiene el coset $\mathcal{L}_+^\downarrow = PT\mathcal{L}_+^\uparrow$.

El subgrupo propio ortócrono contiene transformaciones que corresponden a ***rotaciones en el espacio***,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & R \\ 0 & \end{pmatrix},\ \text{con } R \in SO(3). \tag{1.12}$$

En efecto, puesto que $R^t R = \mathbf{1}_3$, es evidente que $L^t g L = g$, mientras que

$$\det L = \det R = 1,\ L^0{}_0 = 1. \tag{1.13}$$

El subgrupo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ también contiene ***boosts*** o transformaciones de Lorentz propiamente dichas. Por ejemplo, para

$$\begin{aligned} \bar{x}^0 &= x^0 \cosh\alpha + x^1 \sinh\alpha \\ \bar{x}^1 &= x^0 \sinh\alpha + x^1 \cosh\alpha \\ \bar{x}^2 &= x^2 \\ \bar{x}^3 &= x^3, \end{aligned} \tag{1.14}$$

con $\cosh\alpha = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, tenemos la matriz

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

para la cual $\det L = \cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$, y $L^0{}_0 = \cosh\alpha \geq 1$, y que también satisface $L^t g L = g$. Nótese que esta matriz no es una función periódica del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, lo que corresponde al hecho de que ***el grupo de Lorentz no es compacto***.

2. Álgebra de Lie del subgrupo propio ortócrono $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Las matrices próximas de la identidad tienen la forma

$$L = \mathbf{1}_4 + \varepsilon \implies \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu; \tag{2.1}$$

remplazando esta expresión en (1.5) se obtiene

$$g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}\varepsilon^\alpha{}_\mu + g_{\mu\beta}\varepsilon^\beta{}_\nu + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = g_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

de donde resulta que el producto $g\,\varepsilon$ es una matriz antisimétrica.

Definiendo $\varepsilon_{\mu\nu} := g_{\mu\alpha}\varepsilon^\alpha{}_\nu$, y teniendo en cuenta que $g_{\mu\nu}$ es simétrico, de la anterior ecuación tenemos[2]

$$\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} = 0. \tag{2.4}$$

En consecuencia, el álgebra de Lie está generada por $(4^2-4)/2 = 6$ generadores, de modo que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ***es un grupo de Lie de dimensión 6***.

Para determinar las constantes de estructura sería necesario elegir una base en ese espacio de matrices, multiplicarlas a izquierda por g y calcular los conmutadores de los generadores resultantes.

Alternativamente, daremos una realización de esos generadores en términos de operadores diferenciales en las coordenadas del espacio - tiempo. Para ello consideremos la diferencia

$$\begin{array}{c} \bar{x}^\mu - x^\mu = \varepsilon^\mu{}_\beta x^\beta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \varepsilon^\alpha{}_\beta x^\beta(\partial_\alpha x^\mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(x_\beta\partial_\alpha - x_\alpha\partial_\beta)x^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \frac{-i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\hat{L}_{\alpha\beta}x^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{array} \tag{2.5}$$

donde los $\hat{L}_{\alpha\beta} = -i(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha) = -\hat{L}_{\beta\alpha}$ son operadores diferenciales hermíticos. De ese modo, la transformación que sufre el vector de coordenadas también puede ser descrita por

$$\bar{x} = \left(1 - \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\hat{L}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)\, x. \tag{2.6}$$

Tomando los conmutadores de los generadores así representados se obtienen las constantes de estructura del grupo $SO(1,3)$,

$$\left[\hat{L}_{\mu\nu}, \hat{L}_{\rho\sigma}\right] = -ig_{\nu\rho}\hat{L}_{\mu\sigma} + ig_{\mu\rho}\hat{L}_{\nu\sigma} + ig_{\nu\sigma}\hat{L}_{\mu\rho} - ig_{\mu\sigma}\hat{L}_{\nu\rho}. \tag{2.7}$$

---

[2] Similarmente, si $\varepsilon^{\mu\nu} := g^{\mu\alpha}\varepsilon^\nu{}_\alpha$, donde $g^{\mu\alpha} := (g^{-1})_{\mu\alpha}$ (con $g^{-1} = g$), resulta que

$$\varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{\nu\mu} = 0. \tag{2.3}$$

En particular, considerando la subálgebra correspondiente a índices espaciales tenemos

$$\left[\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{kl}\right] = i\delta_{jk}\hat{L}_{il} - i\delta_{ik}\hat{L}_{jl} - i\delta_{jl}\hat{L}_{ik} + i\delta_{il}\hat{L}_{jk}, \tag{2.8}$$

en la que se reconoce el álgebra de $SO(3)$.

Puede darse a esta operación en el álgebra de Lie un aspecto más familiar redefiniendo los generadores como

$$\begin{gathered}\hat{L}_i = \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_{jk}\ \left(\Longrightarrow \hat{L}_{ij} = \epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k\right)\\ \hat{K}_i = \hat{L}_{0i},\end{gathered} \tag{2.9}$$

operadores que satisfacen las reglas de conmutación

$$\begin{gathered}\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k,\\ \left[\hat{L}_i, \hat{K}_j\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{K}_k,\\ \left[\hat{K}_i, \hat{K}_j\right] = -i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k,\end{gathered} \tag{2.10}$$

donde se ve claramente que los $\hat{L}_i$ son los generadores del subgrupo $SO(3)$ de $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

3. Representaciones irreducibles (del grupo de cubrimiento) de $\mathcal{L}_+^\uparrow$

La construcción de las representaciones matriciales del grupo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ pasa entonces por encontrar conjuntos de seis matrices, $\{L_k, K_k; k = 1, 2, 3\}$, que satisfagan las reglas de conmutación de (2.10), para luego exponenciar elementos de la representación matricial del álgebra de Lie así obtenida. Esto es, exponenciar combinaciones lineales con coeficientes ***reales*** y multiplicadas por la unidad imaginaria, de la forma $i(\alpha^k L_k + \beta^k K_k)$, con $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$.

Puede simplificarse aún más esta construcción considerando las combinaciones lineales ***complejas*** (elementos de la **complexificación** del álgebra de Lie de $\mathcal{L}_+^\uparrow$)

$$J_k^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left(L_k \pm iK_k\right), \tag{3.1}$$

cuyos conmutadores se reducen a

$$\begin{gathered}\left[J_i^{(\pm)}, J_j^{(\pm)}\right] = i\epsilon_{ijk}J_k^{(\pm)},\\ \left[J_i^{(\pm)}, J_j^{(\mp)}\right] = 0.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Esto corresponde a dos subálgebras $su(2)$ que conmutan entre sí.

Ya hemos estudiado las representaciones unitarias irreducibles del álgebra de Lie de $SU(2)$, que están caracterizadas por un ***semientero*** j, y generadas por tres matrices ***autoadjuntas*** $J_k^{(j)}, k = 1, 2, 3$, de dimensión $2j + 1$. Podemos tomar entonces

$$J_k^{(+)} := J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathbf{j}_-)},$$
(3.3)
$$J_k^{(-)} := \mathbf{1}^{(\mathbf{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)},$$

que satisfacen trivialmente (3.2).

De esa manera, ***las representaciones matriciales irreducibles del grupo (de cubrimiento de)*** $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ ***están caracterizadas por un par de semienteros*** (j_+, j_-)***, y son de dimensión*** $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$.

Téngase en cuenta que, mientras que las matrices que representan a los generadores $\hat{L}_k$ de $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$,

$$L_k^{(j_+,j_-)} = J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathbf{j}_-)} + \mathbf{1}^{(\mathbf{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}, \tag{3.4}$$

son ***autoadjuntas***, las correspondientes a los $\hat{K}_k$,

$$K_k^{(j_+,j_-)} = -i \left(J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathbf{j}_-)} - \mathbf{1}^{(\mathbf{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)} \right), \tag{3.5}$$

son ***anti - autoadjuntas***. En consecuencia, las representaciones matriciales así obtenidas ***no son unitarias***.

Se puede demostrar que $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ (que es un grupo de Lie no compacto) ***no tiene representaciones unitarias de dimensión finita***.

Los elementos de $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ están identificados por el conjunto de seis parámetros reales α_k, β_k, con $k = 1, 2, 3$. En la representación irreducible[3] (j_+, j_-) tenemos

[3]Frente a la transformación de paridad se tiene que

$$P\hat{L}_{ij}P^{-1} = \hat{L}_{ij},$$
(3.6)
$$P\hat{L}_{0k}P^{-1} = -\hat{L}_{0k}.$$

Entonces, en una dada representación matricial se tiene

$$\mathcal{P}L_k\mathcal{P}^{-1} = L_k,$$
(3.7)
$$\mathcal{P}K_k\mathcal{P}^{-1} = -K_k.$$

En consecuencia,

$$\mathcal{P}D^{(j_+,j_-)}(\alpha, \beta)\mathcal{P}^{-1} = D^{(j_+,j_-)}(\alpha, -\beta) \sim D^{(j_-,j_+)}(\alpha, \beta). \tag{3.8}$$

$$D^{(j_+,j_-)}(\alpha,\beta) := e^{i\left(\alpha^k L_k + \beta^k K_k\right)} =$$

$$= e^{i\left((\alpha^k - i\beta^k) J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)} + (\alpha^k + i\beta^k)\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}\right)} =$$

(3.10)
$$= e^{i\left((\alpha^k - i\beta^k) J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)}\right)} e^{i\left((\alpha^k + i\beta^k)\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}\right)} =$$

$$= e^{i(\alpha - i\beta)^k J_k^{(j_+)}} \otimes e^{i(\alpha + i\beta)^k J_k^{(j_-)}},$$

donde se han tenido en cuenta (3.4) y (3.5) para expresar las matrices de la representación como un producto directo[4] (donde cada factor actúa sobre distintos conjuntos de índices de las componentes de los vectores del espacio producto directo). Téngase en cuenta que no se trata de un producto directo de grupos, pues ambos factores dependen de los mismos parámetros. Además resulta claro que, mientras que los parámetros α^k corresponden a ***subgrupos abelianos unidimensionales compactos***, los β^k corresponden a ***subgrupos abelianos unidimensionales no compactos***.

En consecuencia, los vectores de la representación irreducible (j_+, j_-) tienen componentes identificadas por un par de índices, a y $\dot{b}$, que toman $(2j_+ + 1)$ y $(2j_- + 1)$ valores respectivamente. Frente a transformaciones de Lorentz ellas se transforman según

$$\psi'_{a\dot{b}} = \left(e^{i(\alpha - i\beta)^k J_k^{(j_+)}}\right)_{aa'} \left(e^{i(\alpha + i\beta)^k J_k^{(j_-)}}\right)_{\dot{b}\dot{b}'} \psi_{a'\dot{b}'} \,. \tag{3.12}$$

4. Grupo de cubrimiento de $\mathcal{L}_+^\uparrow$

El hecho de que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ contenga a $SO(3)$ es indicativo de que no se trata de un grupo simplemente conexo. Para determinar su grupo de cubrimiento, primero

---

Por lo tanto, si $j_+ \neq j_-$ la representación no es invariante frente a paridad. Para construir representaciones invariantes frente a $\mathcal{P}$ se deben considerar las sumas directas

$$\mathcal{D}^{(j_+,j_-)} = D^{(j_+,j_-)} \oplus D^{(j_-,j_+)}, \tag{3.9}$$

de dimensión $2(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$.

[4]En el último paso se ha usado la igualdad

$$e^{M} \otimes \mathbf{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(M \otimes \mathbf{1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, M^n \otimes \mathbf{1} = e^{M} \otimes \mathbf{1}. \tag{3.11}$$

señalemos que es posible establecer una relación biunívoca entre los vectores del espacio de Minkowsky, $\mathbf{M}_4$, y las matrices autoadjuntas de dimensión 2×2.

Una base para ese espacio de matrices (de dimensión 4) está dada por $\{\sigma_0 = \mathbf{1}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, que tienen las propiedades

$$\operatorname{tr}\{\sigma_k\} = 0,\ \operatorname{tr}\{\mathbf{1}_2\} = 2,\ \operatorname{tr}\{\sigma_k \sigma_l\} = 2\delta_{kl}. \tag{4.1}$$

Ahora bien, dado $x \in \mathbf{M}_4$, podemos formar la matriz

$$\begin{gathered} \sigma(x) := x^0 \mathbf{1}_2 + x^k \sigma_k = \\ \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \sigma(x)^\dagger. \end{gathered} \tag{4.2}$$

De (4.1) tenemos que

$$x^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\{\sigma_\mu \, \sigma(x)\}, \tag{4.3}$$

mientras que el determinante de esa matriz es igual al intervalo,

$$\det \sigma(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = s^2. \tag{4.4}$$

Inversamente, dada una matriz autoadjunta A de dimensión 2×2, ella determina un vector en $\mathbf{M}_4$ cuyas componentes son

$$x^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\{\sigma_\mu A\}, \tag{4.5}$$

pudiendo ser escrita como

$$A = x^\mu \sigma_\mu. \tag{4.6}$$

Las transformaciones de Lorentz son tales que preservan el intervalo s^2, de modo que corresponden a las transformaciones lineales de la matriz $\sigma(x)$ que la mantienen autoadjunta, y dejan invariante su determinante. Consideremos el cambio

$$\begin{gathered} \bar{\sigma} = \Lambda \, \sigma(x) \, \Lambda^\dagger = \bar{\sigma}^\dagger, \\ \Rightarrow \det \bar{\sigma} = |\det \Lambda|^2 \det \sigma(x). \end{gathered} \tag{4.7}$$

Entonces, $|\det \Lambda|^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = e^{i\theta}$. Pero ese factor se debe a una fase $e^{i\theta/2}$ en Λ, sin consecuencias sobre la transformación (4.7). De ese modo, basta con considerar matrices complejas de 2×2, cuyo determinante sea $\det \Lambda = 1$.

En consecuencia, el grupo de transformaciones que debemos considerar es lo que hemos llamado $SL(2, \mathbb{C})$, y las coordenadas del vector transformado están dadas por

$$\bar{x}^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\sigma_\mu\,\Lambda\,\sigma(x)\,\Lambda^\dagger\},\ \text{con}\ \Lambda \in SL(2,\mathbb{C}). \tag{4.8}$$

Pero aún así, $-\mathbf{1}_2 \in SL(2,\mathbb{C})$, y

$$(-\mathbf{1}_2)\sigma(x)(-\mathbf{1}_2)^\dagger = \sigma(x), \tag{4.9}$$

lo que corresponde a no variar las coordenadas.

Dicho de otro modo, el par de matrices $\{+\Lambda, -\Lambda\} \subset SL(2,\mathbb{C})$ corresponden a la misma transformación de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Por lo tanto, hemos establecido un homorfismo[5] entre $SL(2,\mathbb{C})$ y $\mathcal{L}_+^\uparrow$, cuyo núcleo es el ***centro*** del primer grupo,

$$\{+\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2\} \approx \mathbb{Z}_2. \tag{4.10}$$

En consecuencia, $SL(2,\mathbb{C})$ (simplemente conexo) es el ***grupo de cubrimiento*** de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Y éste, por ser ***doblemente conexo*** $\left(\Pi_1(\mathcal{L}_+^\uparrow) \approx \mathbb{Z}_2\right)$, resulta ***globalmente isomorfo al grupo cociente***

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \approx SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2. \tag{4.11}$$

5. Algebra de Lie del grupo $SL(2,\mathbb{C})$. Representaciones

Para determinar el álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{C})$, tengamos en cuenta que para matrices próximas de la identidad, $\Lambda = \mathbf{1}_2 + A$,

$$\det\Lambda = 1 \Rightarrow \mathrm{tr}\{A\} = 0. \tag{5.1}$$

Como A es compleja, una base para ese espacio lineal (de dimensión $2\times 2^2 - 2 = 6$) está dada por

$$\left\{\frac{1}{2}\,\sigma_k, -\frac{i}{2}\,\sigma_k,\ \text{con}\ k = 1,2,3\right\}. \tag{5.2}$$

Naturalmente, los conmutadores de estas matrices reproducen las relaciones de (2.10),

$$\begin{aligned}
\left[\tfrac{1}{2}\,\sigma_i, \tfrac{1}{2}\,\sigma_j\right] &= i\,\epsilon_{ijk}\,\tfrac{1}{2}\,\sigma_k,\\
\left[\tfrac{1}{2}\,\sigma_i, -\tfrac{i}{2}\,\sigma_j\right] &= i\,\epsilon_{ijk}\,\left(-\tfrac{i}{2}\,\sigma_k\right),\\
\left[-\tfrac{i}{2}\,\sigma_i, -\tfrac{i}{2}\,\sigma_j\right] &= -i\,\epsilon_{ijk}\,\tfrac{1}{2}\,\sigma_k,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

[5]Evidentemente, esto se corresponde con el homomorfismo existente entre $SU(2)$ y $SO(3)$, subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ y $\mathcal{L}_+^\uparrow$ respectivamente.

como corresponde a grupos localmente isomorfos. La correspondencia establecida es[6]

$$L_k \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}\,\sigma_k \qquad (5.5) \qquad K_k \longleftrightarrow -\tfrac{i}{2}\,\sigma_k\,.$$

Por exponenciación de elementos en el álgebra de Lie obtenemos las matrices

$$\Lambda(\alpha,\beta) = e^{i\left(\alpha^k \frac{1}{2}\,\sigma_k - \beta^k \frac{i}{2}\,\sigma_k\right)} = e^{i\,(\alpha - i\beta)^k\,\frac{1}{2}\,\sigma_k}. \tag{5.6}$$

Como $J_k^{(1/2)} = \frac{1}{2}\,\sigma_k$, vemos que la representación fundamental del grupo $SL(2,\mathbb{C})$ coincide con la representación irreducible $(1/2,0)$ de la ecuación (3.10).

La representación de (5.6) no es equivalente a su conjugada. En efecto, teniendo en cuenta que

$$\sigma_k{}^* = -\sigma_2\,\sigma_k\,\sigma_2, \tag{5.7}$$

vemos que la representación conjugada de $(1/2,0)$ es equivalente a la representación $(0,1/2)$ de la ec. (3.10):

$$\Lambda^*(\alpha,\beta) = e^{-i\,(\alpha+i\beta)^k\,\frac{1}{2}\,\sigma_k{}^*} = \sigma_2 e^{i\,(\alpha+i\beta)^k\,\frac{1}{2}\,\sigma_k}\sigma_2. \tag{5.8}$$

Los vectores de la representación $(1/2,0)$, ψ_L, son llamados **espinores de Weyl de polarización izquierda**, mientras que los de la representación $(0,1/2)$, ψ_R, son **espinores de Weyl de polarización derecha**. Los **espinores de Dirac** son vectores del espacio suma directa $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$,

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

los que, frente a transformaciones de Lorentz, cambian según

$$\Psi'_D = \begin{pmatrix} \Lambda(\alpha,\beta) & 0 \\ 0 & \sigma_2\Lambda^*(\alpha,\beta)\sigma_2 \end{pmatrix} \Psi_D. \tag{5.10}$$

La transformación de las coordenadas que induce (4.7), dada en la ecuación (4.8), es la que corresponde a las componentes de un tetravector. En consecuencia, éstos

[6]Nótese que (5.3) también admite la identificación

$$L_k \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}\,\sigma_k \qquad (5.4) \qquad K_k \longleftrightarrow \tfrac{i}{2}\,\sigma_k\,.$$

se transforman como vectores de una representación equivalente a la $(1/2, 1/2)$ (de dimensión $2 \times 2 = 4$). En efecto,

$$V'_{a\dot{b}} = \Lambda_{aa'}\, V_{a'\dot{b}'}\, (\Lambda^{\dagger})_{\dot{b}'\dot{b}} = \Lambda_{aa'}\, \Lambda^{*}_{\dot{b}\dot{b}'}\, V_{a'\dot{b}'}\,. \tag{5.11}$$

El producto directo de representaciones irreducibles de $SL(2,\mathbb{C})$ se descompone como suma directa de manera consistente con la descomposición de Clebsh - Gordan de productos directos de representaciones irreducibles de $SU(2)$. Por ejemplo, $(1/2, 0) \otimes (1/2, 0) = (1, 0) \oplus (0, 0)$.

Se verifica que la representación $(1, 0)$, de dimensión 3, corresponde a **tensores antisimétricos autoduales**,

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{5.12}$$

Bibliografía:

- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires.*
- P. Ramond, *Field Theory: a modern primer.*