CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

TEORÍA DE GRUPOS

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

NOTAS SOBRE ALGEBRAS Y GRUPOS DE LIE

1. Introducción a las Álgebras de Lie

Consideremos una función escalar a valores complejos definida sobre la variedad de un grupo de Lie conexo G de dimensión n, $F : G \to \mathbb{C}$. Referida a un sistema local de coordenadas establecido alrededor de un elemento genérico $b \in G$ (en el cual b tiene asignadas coordenadas $(\beta^1, ..., \beta^n)$), se tiene que

$$F(b) = f(\beta^1, ..., \beta^n), \tag{1.1}$$

que supondremos diferenciable.

Por multiplicación a izquierda por $a \in G$, el elemento $a^{-1} \cdot b$ es aplicado en el elemento b. Podemos entonces definir una función ***trasladada*** por a según

$$(T_a F)(b) := F(a^{-1} \cdot b), \tag{1.2}$$

donde T_a es definido como un operador lineal sobre el espacio lineal de las funciones sobre G. El conjunto de operadores $\{T_a, a \in G\}$ constituye una representación lineal del grupo G. En efecto,

$$(T_a T_b F)(c) = T_a \left(F(b^{-1} \cdot c) \right) \tag{1.3}$$

y, llamando $H(c) \equiv F(b^{-1} \cdot c)$,

$$\begin{aligned} (T_a H)(c) &= H(a^{-1} \cdot c) = F(b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot c) = \\ &= F((a \cdot b)^{-1} \cdot c) \equiv T_{a \cdot b} F(c), \end{aligned} \tag{1.4}$$

Actualizado el 1 de octubre de 2005.

cualesquiera que sean $a, b \in G$, y $\forall F(c)$. Por lo tanto,

$$T_a T_b = T_{a \cdot b}, \;\; \forall a, b \in G. \tag{1.5}$$

Supongamos ahora que el elemento a está en un entorno del elemento identidad, e, y que respecto de un sistema local de coordenadas tenemos la asignación

$$\begin{aligned} a &\to (\alpha^1, ..., \alpha^n), \\ e &\to (0, ..., 0), \end{aligned} \tag{1.6}$$

de modo que al elemento $c = a^{-1} \cdot b$, contenido en un entorno de b, le correspondan las coordenadas $c \to (\gamma^1, ..., \gamma^n)$, dadas por

$$\gamma^\mu = \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta), \tag{1.7}$$

donde las coordenadas $\bar{\alpha}^\mu$ corresponden al elemento a^{-1}.

En el sistema local de coordenadas establecido alrededor de e tenemos

$$\phi^\mu(\bar{\alpha}, \alpha) = \varepsilon^\mu = 0, \;\; \forall \alpha. \tag{1.8}$$

Como se trata de un grupo de Lie, esa función puede ser desarrollada en serie de potencias de sus argumentos, y teniendo en cuenta que $e \cdot a = a = a \cdot e$ para todo a, se ve fácilmente que[1]

$$\bar{\alpha}^\mu = -\alpha^\mu + \mathcal{O}(\alpha)^2, \;\; \mu = 1, 2, ..., n. \tag{1.12}$$

Desarrollando en serie de potencias el miembro de la derecha en (1.7), y teniendo en cuenta que necesariamente $\phi^\mu(0, \beta) = \beta^\mu$, resulta

$$\gamma^\mu = \beta^\mu - \alpha^\nu \left(\frac{\partial \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta)}{\partial \bar{\alpha}^\nu} \right)_{\bar{\alpha}=0} + \mathcal{O}(\alpha)^2. \tag{1.13}$$

Dado que existe la inversa de cada elemento en G, podemos escribir $a = b \cdot c^{-1}$, de modo que la relación entre $(\gamma - \beta)^\mu$ y α^μ establecida en la anterior ecuación debe ser invertible. Esto implica que

$$\det \left(\frac{\partial \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta)}{\partial \bar{\alpha}^\nu} \right)_{\bar{\alpha}=0} \neq 0. \tag{1.14}$$

---

[1] En efecto, para $\bar{a}$ y a genéricos en un entorno de la identidad podemos escribir

$$\phi^\mu(\bar{\alpha}, \alpha) = A^\mu + B^\mu_\nu \, \bar{\alpha}^\nu + B'^\mu_\nu \, \alpha^\nu + \ldots \tag{1.9}$$

Tomando $\bar{a} = e$ tenemos

$$\phi^\mu(0, \alpha) = \alpha^\mu \Rightarrow A^\mu = 0, \;\; B'^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu. \tag{1.10}$$

Similarmente, si $a = e \Rightarrow B^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$. Por lo tanto,

$$\phi^\mu(\bar{\alpha}, \alpha) = \bar{\alpha}^\mu + \alpha^\mu + \ldots \tag{1.11}$$

Reemplazando (1.13) en la expresión de la función trasladada T_aF,

$$T_aF(b) = F(a^{-1} \cdot b) = f(\gamma) =$$

$$f(\beta) - \alpha^\nu \left(\frac{\partial \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta)}{\partial \bar{\alpha}^\nu} \right)_{\bar{\alpha}=0} \frac{\partial f}{\partial \beta^\mu}(\beta) + \mathcal{O}(\alpha)^2 = \tag{1.15}$$

$$\left\{ 1 - \imath \alpha^\nu \left(\frac{\partial \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta)}{\partial \bar{\alpha}^\nu} \right)_{\bar{\alpha}=0} \left(-\imath \frac{\partial}{\partial \beta^\mu} \right) + \mathcal{O}(\alpha)^2 \right\} f(\beta),$$

de donde surge que los operadores diferenciales (con coeficientes dependientes de las coordenadas β)

$$\hat{X}_\nu(\beta) = \left(\frac{\partial \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta)}{\partial \bar{\alpha}^\nu} \right)_{\bar{\alpha}=0} \left(-\imath \frac{\partial}{\partial \beta^\mu} \right), \tag{1.16}$$

ofician de **generadores** de las traslaciones sobre la variedad en el espacio de las funciones escalares diferenciables definidas sobre el grupo G, obteniendo para los **operadores de traslación** T_a la realización

$$T_a = 1 - \imath \alpha^\nu \hat{X}_\nu(\beta) + \mathcal{O}(\alpha)^2 \,. \tag{1.17}$$

Teniendo en cuenta que los operadores diferenciales $(-\imath \partial/\partial \beta^\mu)$, generadores de las traslaciones a lo largo de los ejes coordenados, constituyen un conjunto de n operadores linealmente independientes, y que la matriz en el miembro derecho de (1.16) es invertible, vemos que los $\hat{X}_\mu$ conforman una base del espacio lineal (n-dimensional) de los operadores diferenciales de primer orden. Este espacio vectorial es isomorfo al espacio tangente, por lo que ambos suelen identificarse. En ese sentido puede decirse que, para elementos a próximos de la identidad y al más bajo orden en las coordenadas, los operadores T_a difieren del operador identidad en $(-\imath)$ veces un **vector del espacio tangente** a la variedad del grupo[2].

Consideremos ahora una representación matricial de dimensión r del grupo G, la que puede ser entendida como una función a valores matriciales definida sobre la variedad: $D(b), \forall\, b \in G$. Su trasladada por multiplicación a izquierda por a es

$$T_aD(b) := D(a^{-1} \cdot b) = D(a^{-1})D(b) = \left(D(a)\right)^{-1} D(b), \tag{1.18}$$

lo que nos provee de una **representación matricial** para los operadores de traslación en términos de ***matrices constantes*** (independientes del punto b sobre

[2]Nótese que, por multiplicación por un elemento fijo $b \in G$, un sistema local de coordenadas en un entorno de e es aplicado en un sistema local en un entorno de b. En consecuencia, el espacio tangente a la variedad en cualquier punto b es isomorfo al espacio tangente en e.

la variedad). En efecto,

$$
\begin{aligned}
T_a T_b D(c) = T_a D(b^{-1}\cdot c) = T_a \left(D(b)\right)^{-1} D(c) = \left(D(b)\right)^{-1} D(a^{-1}\cdot c) = \\
\left(D(b)\right)^{-1}\left(D(a)\right)^{-1} D(c) = \left(D(a\cdot b)\right)^{-1} D(c) = T_{a\cdot b} D(c).
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Para traslaciones infinitesimales, esto proporciona también una **representación matricial para los generadores** $\hat{X}_\nu$: por analogía con (1.17) escribimos

$$
\left(D(a)\right)^{-1} = \mathbf{1} - \imath\alpha^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\alpha^2),
\tag{1.20}
$$

o bien, al mismo orden en α,

$$
D(a) = \mathbf{1} + \imath\alpha^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\alpha^2),
\tag{1.21}
$$

donde ahora las X_μ son ***matrices constantes*** de dimensión $r\times r$. Es decir, las matrices que representan a elementos a próximos de e difieren de la matriz identidad (al más bajo orden en las coordenadas de a) en $\imath$ veces un vector del espacio lineal generado por las matrices $X_\mu,\ \mu = 1,2,...,n$.

Consideremos, como antes, dos elementos a y b en un entorno de la identidad e, con sus respectivas coordenadas, $(\alpha^1,...,\alpha^n)$ y $(\beta^1,...,\beta^n)$. El elemento $c = a\cdot b\cdot a^{-1}\cdot b^{-1}$ será en general diferente de e (a menos que el grupo sea Abeliano) y, para α^μ y β^μ suficientemente pequeños, estará contenido en el mismo entorno de e, pudiendo ser referido al mismo sistema local de coordenadas, $c\to(\gamma^1,...,\gamma^n)$. Tratándose de un grupo de Lie, las γ^μ son funciones analíticas de α^ν y de β^ν, pudiendo ser desarrolladas en serie de potencias:

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu = \psi^\mu(\alpha,\beta) = \mathbf{A}^\mu + \alpha^\nu \mathbf{B}_\nu{}^\mu + \beta^\nu \mathbf{B'}_\nu{}^\mu + \\
+\alpha^\nu\beta^\lambda \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu + \alpha^\nu\alpha^\lambda \mathbf{D}_{\nu\lambda}{}^\mu + \beta^\nu\beta^\lambda \mathbf{D'}_{\nu\lambda}{}^\mu + \mathcal{O}(\alpha,\beta)^3.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Pero si tomamos $a = e$ ($\alpha^\mu = 0$), entonces $c = e$ ($\gamma^\mu = 0$) para todo b ($\forall\beta$). Similarmente, con $b = e$ ($\beta^\mu = 0$), también tenemos $c = e$ ($\gamma^\mu = 0$) para todo a ($\forall\alpha$). De ello resulta que

$$
\mathbf{A}^\mu = \mathbf{B}_\nu{}^\mu = \mathbf{B'}_\nu{}^\mu = \mathbf{D}_{\nu\lambda}{}^\mu = \mathbf{D'}_{\nu\lambda}{}^\mu = 0.
\tag{1.23}
$$

En consecuencia, las coordenadas de c están dadas (al más bajo orden) por

$$
\gamma^\mu = \alpha^\nu\beta^\lambda \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu + \mathcal{O}(\alpha,\beta)^3,
\tag{1.24}
$$

donde las **constantes de estructura**, $\mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu$, son características de la ley de composición del grupo en un entorno de la identidad (si bien, evidentemente, dependen de la elección del sistema local de coordenadas).

Tomando $a = b$, resulta que $c = e$, o bien $\gamma^\mu = \varepsilon^\mu = 0$. Entonces, para coordenadas α^μ arbitrarias tenemos que $\alpha^\nu \alpha^\lambda \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu = 0$, lo que significa que las constantes de estructura son ***antisimétricas*** en el primer par de índices,

$$\mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu = -\,\mathbf{C}_{\lambda\nu}{}^\mu. \tag{1.25}$$

Los elementos contenidos en entornos de la identidad de dos grupos de Lie ***localmente isomorfos*** están en correspondencia biunívoca con el mismo conjunto de coordenadas locales, y como localmente tienen la misma ley de composición, resulta que tienen las mismas constantes de estructura. Por lo tanto, las constantes de estructura son una característica del ***grupo de cubrimiento universal*** de la clase a la que pertenece el grupo de Lie considerado.

Inversamente, se puede demostrar que dos grupos que tienen el mismo conjunto de constantes de estructura son localmente isomorfos y, en consecuencia, ambos homomorfos a un mismo grupo de Lie simplemente conexo. En ese sentido, las constantes de estructura determinan ***localmente*** las propiedades del grupo en un entorno del elemento neutro e, y ellas deben ser compatibles con las diferentes propiedades globales de los grupos en esa clase.

Consideremos nuevamente la representación matricial del grupo. Para los elementos a y b próximos de e podemos escribir

$$\begin{aligned} D(a) &= \mathbf{1} + A, \\ D(b) &= \mathbf{1} + B, \end{aligned} \tag{1.26}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \imath\alpha^\nu X_\nu + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ B &= \imath\beta^\nu X_\nu + \mathcal{O}(\beta^2). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Sus inversas son

$$\begin{aligned} (D(a))^{-1} &= \mathbf{1} - A + A^2 + ..., \\ (D(b))^{-1} &= \mathbf{1} - B + B^2 + ..., \end{aligned} \tag{1.28}$$

y, en consecuencia,

$$D(c) = D(a)D(b)\,(D(a))^{-1}\,(D(b))^{-1} =$$

$$(1.29) \qquad = \{\mathbf{1} + A + B + AB\}\,\{\mathbf{1} - B + B^2 + ... - A + AB + A^2 + ...\} =$$

$$= \mathbf{1} + (AB - BA) + ... = \mathbf{1} + C\,,$$

donde

$$(1.30) \qquad C = \imath\gamma^\mu X_\mu + ... = \imath\alpha^\nu\beta^\lambda \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\alpha,\beta)^3.$$

Por lo tanto

$$(1.31) \qquad \begin{array}{c} C = [A, B] + ... \Rightarrow \\ \imath\alpha^\nu\beta^\lambda \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu X_\mu = -\alpha^\nu\beta^\lambda\,[X_\nu, X_\lambda]\,,\ \forall\alpha,\beta, \end{array}$$

lo que implica que los generadores satisfacen el álgebra de conmutadores

$$(1.32) \qquad [X_\nu, X_\lambda] = -\imath\,\mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu X_\mu,$$

cualquiera que sea la representación del grupo considerada.

Similarmente, si tomamos el producto $T_c = T_a T_b T_{a^{-1}} T_{b^{-1}}$, a partir del desarrollo (1.17) se puede demostrar que

$$(1.33) \qquad \left[\hat{X}_\nu, \hat{X}_\lambda\right] = \imath\,\mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu \hat{X}_\mu,$$

(con un cambio de signo en el segundo miembro respecto de (1.32) - ver (1.17) y (1.21)). Cabe señalar que en esta igualdad aparecen las mismas ***constantes de estructura*** que en (1.32), a pesar de que los operadores diferenciales de primer orden $\hat{X}_\mu$ tienen coeficientes dependientes de las coordenadas (Teorema de Lie).

Como los generadores $\hat{X}_\mu$ constituyen una base del ***espacio tangente***, la operación de conmutación de (1.33) introduce en ese espacio una operación bilineal, antisimétrica y no asociativa entre vectores, que le confiere la estructura de un **álgebra de Lie**. El espacio vectorial generado por las matrices X_μ, que satisfacen las reglas de conmutación de la ec. (1.32), constituye una **representación matricial del álgebra de Lie**.

Como hemos dicho antes, el valor numérico de las constantes de estructura depende de la elección del sistema local de coordenadas en un entorno de e. A un cambio en el sistema de coordenadas, que haga que las nuevas coordenadas se obtengan de las anteriores mediante una transformación lineal homogénea,

$$
\begin{aligned}
a &\rightarrow (\alpha')^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\alpha^{\nu}, \\
b &\rightarrow (\beta')^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\beta^{\nu},
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

le corresponde un nuevo conjunto de generadores, $\hat{X}'_{\mu}$, con $\mu = 1, 2, ..., n$, que también es una base del espacio tangente.

Los elementos del álgebra de Lie pueden ser referidos a distintas bases de ese espacio vectorial, de modo que ***un mismo vector*** puede ser escrito como

$$
(\alpha')^{\mu}\hat{X}'_{\mu} = \alpha^{\mu}\hat{X}_{\mu}, \tag{1.35}
$$

lo que es cierto para todo α. Pero esto requiere que los generadores se transformen como

$$
\hat{X}'_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \hat{X}_{\nu}. \tag{1.36}
$$

De ese modo tenemos, por una parte,

$$
\left[\hat{X}'_{\lambda}, \hat{X}'_{\kappa}\right] = \imath\, \mathbf{C}'_{\lambda\kappa}{}^{\rho}\hat{X}'_{\rho} \tag{1.37}
$$

mientras que, empleando (1.36), resulta

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{X}_{\mu}, \hat{X}_{\nu}\right] &= \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\Lambda^{\kappa}{}_{\nu}\left[\hat{X}'_{\lambda}, \hat{X}'_{\kappa}\right] = \imath\, \Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\Lambda^{\kappa}{}_{\nu}\mathbf{C}'_{\lambda\kappa}{}^{\rho}\hat{X}'_{\rho} = \\
&= \imath\, \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\sigma}\hat{X}_{\sigma} = \imath\, \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma}\hat{X}'_{\rho}.
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

Como los generadores $\hat{X}'_{\mu}$ son linealmente independientes, se deduce que las constantes de estructura se transforman (frente a las transformaciones lineales de coordenadas como en (1.34)) como las componentes de un tensor dos veces covariante y una vez contravariante,

$$
\Lambda^{\lambda}{}_{\mu}\Lambda^{\kappa}{}_{\nu}\mathbf{C}'_{\lambda\kappa}{}^{\rho} = \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma}. \tag{1.39}
$$

La operación introducida en el álgebra de Lie no es asociativa, sino que satisface las **identidades de Jacobi**,

$$
\left[\left[\hat{X}_{\mu}, \hat{X}_{\nu}\right], \hat{X}_{\rho}\right] + \left[\left[\hat{X}_{\nu}, \hat{X}_{\rho}\right], \hat{X}_{\mu}\right] + \left[\left[\hat{X}_{\rho}, \hat{X}_{\mu}\right], \hat{X}_{\nu}\right] = 0, \tag{1.40}
$$

igualdades algebraicas que se verifican fácilmente desarrollando los conmutadores según su definición[3].

[3]Las identidades de Jacobi,

$$
\left[\hat{X}_{\rho}, \left[\hat{X}_{\mu}, \hat{X}_{\nu}\right]\right] = \left[\hat{X}_{\mu}, \left[\hat{X}_{\rho}, \hat{X}_{\nu}\right]\right] + \left[\left[\hat{X}_{\rho}, \hat{X}_{\mu}\right], \hat{X}_{\nu}\right],
$$

Reemplazando los conmutadores de los generadores, y teniendo en cuenta que éstos son linealmente independientes, se obtienen las **identidades de Bianchi** para las constantes de estructura,

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\mathbf{C}_{\sigma\gamma}{}^{\rho} + \mathbf{C}_{\beta\gamma}{}^{\sigma}\mathbf{C}_{\sigma\alpha}{}^{\rho} + \mathbf{C}_{\gamma\alpha}{}^{\sigma}\mathbf{C}_{\sigma\beta}{}^{\rho} = 0\,, \tag{1.41}$$

las que entonces no son todas independientes.

Introducimos ahora un conjunto de n matrices de dimension $n \times n$, M_μ, cuyos elementos son proporcionales a las constantes de estructura del grupo:

$$\left(M_\mu\right)_\nu{}^{\rho} := \imath\, \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\rho}. \tag{1.42}$$

El conmutador de dos cualesquiera de ellas está dado por

$$\begin{array}{c} \left[M_\mu, M_\nu\right]_\alpha{}^{\beta} = \left(M_\mu\right)_\alpha{}^{\rho}\left(M_\nu\right)_\rho{}^{\beta} - \left(M_\nu\right)_\alpha{}^{\rho}\left(M_\mu\right)_\rho{}^{\beta} = \\ -\mathbf{C}_{\mu\alpha}{}^{\rho}\mathbf{C}_{\nu\rho}{}^{\beta} + \mathbf{C}_{\nu\alpha}{}^{\rho}\mathbf{C}_{\mu\rho}{}^{\beta} = \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\rho}\mathbf{C}_{\rho\alpha}{}^{\beta} = -\imath\,\mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\rho}\left(M_\rho\right)_\alpha{}^{\beta}\,, \end{array} \tag{1.43}$$

donde hemos usado las identidades de Bianchi.

En consecuencia, las matrices así definidas constituyen una representación matricial de los generadores del álgebra de Lie del grupo, llamada **representación adjunta**,

$$\left[M_\mu, M_\nu\right] = -\imath\,\mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\rho} M_\rho. \tag{1.44}$$

Evidentemente, la representación adjunta contiene la misma información sobre la ley de composición del grupo que el conjunto de sus constantes de estructura[4].

---

tienen la misma forma que la derivada de un producto de funciones,

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right) = f(x)\,\frac{dg(x)}{dx} + \frac{df(x)}{dx}\,g(x),$$

razón por la cual la operación en el álgebra de Lie también es la llamada **derivada de Lie**

[4]Se define la **forma de Killing** de un álgebra de Lie como la matriz simétrica cuyos elementos están dados por

$$g_{\mu\,\nu} = \mathrm{tr}\left\{M_\mu\, M_\nu\right\} = -\,\mathbf{C}_{\mu\alpha}{}^{\beta}\,\mathbf{C}_{\nu\beta}{}^{\alpha} = g_{\nu\,\mu}. \tag{1.45}$$

Se puede demostrar que un álgebra de Lie es ***semi-simple*** (es decir, que corresponde a un grupo de Lie que no contiene subgrupos de Lie invariantes que sean Abelianos - ver Sección 8) si y sólo si su forma de Killing es regular (es decir, si $\det g \neq 0$). En esas condiciones, su inversa existe y satisface $g_{\mu\,\alpha}g^{\alpha\,\nu} = \delta_\mu{}^{\nu}$.

Las nuevas constantes definidas por

$$\mathbf{C}_{\mu\nu\lambda} \equiv \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\rho}\, g_{\rho\,\lambda} = -\,\mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\rho}\,\mathbf{C}_{\rho\alpha}{}^{\beta}\,\mathbf{C}_{\lambda\beta}{}^{\alpha} \tag{1.46}$$

Consideremos ahora una representación matricial del álgebra de Lie de G, en la cual los generadores estén representados por matrices X_μ que satisfacen (1.32). Las matrices correspondientes a elementos a próximos de e serán de la forma

$$D(a(\alpha)) = \mathbf{1} + \imath\, \alpha^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\alpha^2), \tag{1.48}$$

donde las α^μ son las coordenadas de a correspondientes a esa elección de una base para el álgebra de Lie.

Consideremos, en particular, los elementos correspondientes a matrices de la forma

$$\mathbf{1} + \imath \frac{\tau}{N}\, \alpha^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\frac{1}{N^2}), \tag{1.49}$$

donde los α^μ son parámetros finitos dados, τ toma valores continuos y $N \gg 1$. Estos elementos pueden ser multiplicados por sí mismos N veces para alcanzar otros que (para N grande) estarán ***alejados*** de e y representados por matrices

$$\begin{array}{c} \left(\mathbf{1} + \imath \frac{\tau}{N}\, \alpha^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})\right)^N = \\ \prod_{k=1}^N e^{\imath \frac{\tau}{N}\, \alpha^\mu X_\mu} \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})\right) = e^{\imath\tau\alpha^\mu X_\mu} \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{N})\right). \end{array} \tag{1.50}$$

En el límite $N \to \infty$ obtenemos la matriz

$$D(a(\tau\alpha)) := e^{\imath\tau\alpha^\mu X_\mu}, \tag{1.51}$$

relación que puede ser entendida como la ***asignación*** de los n parámetros $\tau\alpha^\mu$ al elemento que denotamos por $a(\tau\alpha) \in G$.

Como el parámetro τ es arbitrario, vemos que cada recta que pasa por el origen en el álgebra de Lie es aplicada en elementos de G que satisfacen

$$\begin{array}{c} D(a(\tau_1\alpha))D(a(\tau_2\alpha)) = e^{\imath\tau_1\alpha^\mu X_\mu}\, e^{\imath\tau_2\alpha^\mu X_\mu} = \\ e^{\imath(\tau_1 + \tau_2)\alpha^\mu X_\mu} = D(a(\tau_2\alpha))D(a(\tau_1\alpha)). \end{array} \tag{1.52}$$

Y como eso vale para toda representación matricial de G (incluso para las representaciones fieles), los elementos que hemos identificado como $a(\tau\alpha)$ (con α^μ fijo y para todo τ) pertenecen a un **subgrupo Abeliano unidimensional** de G.

---

son totalmente antisimétricas en sus tres índices. En efecto, empleando las identidades de Bianchi resulta que

$$\mathbf{C}_{\mu\nu\lambda} = \left\{\mathbf{C}_{\nu\alpha}{}^{\rho}\, \mathbf{C}_{\rho\mu}{}^{\beta} + \mathbf{C}_{\alpha\mu}{}^{\rho}\, \mathbf{C}_{\rho\nu}{}^{\beta}\right\} \mathbf{C}_{\lambda\beta}{}^{\alpha} = i\, \mathrm{tr}\left\{M_\mu\, M_\nu\, M_\lambda \,-\, M_\mu\, M_\lambda\, M_\nu\right\}, \tag{1.47}$$

donde el segundo miembro es antisimétrico debido a las propiedades de invarianza cíclica la traza.

Puede demostrarse que todo elemento de un grupo de Lie conexo ***compacto*** G pertenece a un subgrupo Abeliano unidimensional de G. Por lo tanto, la matriz que lo representa en una dada representación matricial del grupo siempre se puede obtener por ***exponenciación*** de un elemento (de la representación matricial) del álgebra de Lie.

En particular, por exponenciación de vectores en la representación adjunta del álgebra de Lie obtenemos las matrices de la **representación adjunta del grupo** G considerado,

$$D_{Adj}(a(\tau\alpha^1, ..., \tau\alpha^n)) = e^{\imath\,\tau\,\alpha^\mu M_\mu}, \tag{1.53}$$

que en general no es una representación fiel de G.

Nótese que τ puede ser tomado como uno de los parámetros independientes necesarios para identificar los elementos del grupo. Entonces, para un grupo de Lie ***compacto***, la curva sobre la variedad de G descrita por el subgrupo $a(\tau\alpha)$ debe ser necesariamente ***cerrada***. Dicho de otro modo, las matrices $D(a(\tau\alpha))$ deben ser funciones periódicas de τ para toda representación de un grupo de Lie compacto. Una vez determinado el rango de valores del parámetro τ, las representaciones fieles de G son aquellas para las cuales las matrices $D(a(\tau\alpha))$ no se repiten sobre cada subgrupo Abeliano.

En el caso de grupos de Lie conexos **no compactos**, existen elementos que no yacen sobre ningún subgrupo Abeliano unidimensional, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Consideremos el grupo conexo $SL(2, \mathbb{R})$. Este es un grupo no compacto, ya que contiene matrices de la forma

$$M(r) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}, \tag{1.54}$$

cuyo determinante es $\det M(r) = 1$ para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, conjunto no compacto sobre el cual $M(r)$ no es periódica.

Si $M \in SL(2,\mathbb{R})$ se puede escribir como $M = \exp(A)$, la condición $\det M = 1$ implica[5] que $\mathrm{tr}A = 0$. Por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \tag{1.59}$$

su determinante es

$$\det A = -\left(a^2 + bc\right), \tag{1.60}$$

y su cuadrado es

$$A^2 = (-\det A)\,\mathbf{1}_2. \tag{1.61}$$

De esto se deduce fácilmente que

$$M = e^{A} = \cosh(\sqrt{-\det A})\,\mathbf{1}_2 + \frac{\sinh(\sqrt{-\det A})}{\sqrt{-\det A}}\,A, \tag{1.62}$$

de modo que su traza

$$\mathrm{tr}M = 2\cosh(\sqrt{-\det A}). \tag{1.63}$$

Como A es una matriz real, $\det A \in \mathbb{R}$, y en cualquier caso $\mathrm{tr}M \geq -2$.

Pero, como hemos señalado antes, existen en $SL(2,\mathbb{R})$ matrices $M(r)$ como en (1.54), con $r > 2$, cuyas trazas son

$$\mathrm{tr}M(r) = -r - 1/r < -2, \tag{1.64}$$

y que, por lo tanto, no son de la forma e^{A}.

---

[5] Si M es una matriz (regular) de un grupo de matrices conexo, es posible trazar una curva continua sobre la variedad del grupo, $M(t)$ (que supondremos diferenciable), tal que $M(0) = \mathbf{1}$ y $M(1) = M$. Podemos escribir

$$M(t+\delta t) = M(t) + \delta M(t) = M(t)\left(\mathbf{1} + M^{-1}(t)\delta M(t)\right), \tag{1.55}$$

y para su determinante

$$\begin{aligned} \det M(t+\delta t) = \det M(t)\det\left(\mathbf{1} + M^{-1}(t)\delta M(t)\right) = \\ \det M(t)\left(1 + \mathrm{tr}\left[M^{-1}(t)\delta M(t)\right] + \ldots\right), \end{aligned} \tag{1.56}$$

a menos de términos de orden superior en $\delta M(t)$. Pero entonces,

$$\frac{d}{dt}\ln\det M(t) = \mathrm{tr}\left[M^{-1}(t)\frac{dM(t)}{dt}\right] \equiv \frac{d}{dt}\mathrm{tr}\ln M(t). \tag{1.57}$$

Y como $\ln\det M(0) = 0 = \mathrm{tr}\ln M(0)$, resulta que

$$\ln\det M = \mathrm{tr}\ln M. \tag{1.58}$$

No obstante, $M(r)$ puede ser escrita como[6]

$$M(r) = -\mathbf{1}_2 \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} = e^{\imath\pi\sigma_2} e^{\ln(r)\sigma_3}, \tag{1.66}$$

donde ambos factores en el miembro de la derecha son elementos del grupo $SL(2,\mathbb{R})$, puesto que son exponenciales de matrices reales y de traza nula.

Este resultado refleja el hecho de validez general de que todo elemento de un grupo de Lie conexo no compacto puede ser representado como el producto de un número finito (y pequeño) de elementos que yacen sobre subgrupos Abelianos unidimensionales. En consecuencia, las matrices de una dada representación del grupo pueden ser obtenidas como producto de un número finito de exponenciales de elementos en la correspondiente representación del álgebra de Lie del grupo.

De ese modo, el conocimiento de una representación matricial del álgebra de Lie de un grupo de Lie conexo permite reconstruir (mediante la aplicación exponencial) la correspondiente representación matricial del grupo.

2. Algebras de Lie de los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$

Consideremos la representación fundamental del grupo $SU(2)$. Sus elemento son matrices unitarias de determinante igual a 1. Siendo un grupo de Lie conexo compacto, todos sus elementos pueden escribirse como exponenciales de vectores en el álgebra de Lie,

$$U = e^{\imath A}$$

$$U^\dagger = e^{-\imath A^\dagger} = U^{-1} = e^{-\imath A} \Rightarrow A^\dagger = A \tag{2.1}$$

$$\ln\det U = \operatorname{tr}\ln U = \imath \operatorname{tr} A = 0.$$

Por lo tanto, el álgebra de Lie de $SU(2)$ es el espacio vectorial de las matrices de 2×2, autoadjuntas y de traza nula. Su dimensión es 3 (igual a la dimensión de $SU(2)$).

[6] Esta matriz también puede ser escrita como una única exponencial de la forma

$$M(r) = e^{\imath\pi\sigma_3} e^{\ln(r)\sigma_3} = e^{\imath\pi\sigma_3 + \ln(r)\sigma_3}, \tag{1.65}$$

pero en este caso ***el exponente no es una matriz real***, y por lo tanto no es el producto de $\imath$ por un elemento del álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{R})$.

Una base conveniente para ese espacio esta compuesta por las **matrices de Pauli**,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

que satisfacen

$$\sigma_k^\dagger = \sigma_k, \ \operatorname{tr} \sigma_k = 0, \ \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}\, \mathbf{1_2} + \imath\, \epsilon_{ijk}\, \sigma_k, \tag{2.3}$$

donde el símbolo ϵ_{ijk} es totalmente antisimétrico, con $\epsilon_{123} = 1$.

Suele tomarse como generadores a $X_k = \sigma_k/2$ de modo que, por cálculo directo, se obtienen (para esa elección) las constantes de estructura[7],

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = \imath\, \epsilon_{ijk}\, \frac{\sigma_k}{2} \Rightarrow \mathbf{C}_{ij}{}^{k} = -\epsilon_{ijk}. \tag{2.7}$$

Cada elemento en el álgebra de Lie (combinación lineal de las $\sigma_k/2$) genera un subgrupo Abeliano unidimensional. Tomemos un vector $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$, tal que $n^i n^i = 1$, y llamemos $\hat{\sigma} = n^i \sigma_i$. Su cuadrado es

$$\hat{\sigma}^2 = n^i n^j\, \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2} n^i n^j\, \{\sigma_i, \sigma_j\} = \frac{1}{2} n^i n^j\, 2\delta_{ij}\, \mathbf{1_2} = (\hat{n})^2\, \mathbf{1_2} = \mathbf{1_2}. \tag{2.8}$$

Entonces, empleando el desarrollo en serie de la exponencial, resulta de inmediato que las matrices en el subgrupo Abeliano generado por $\hat{\sigma}$ son de la forma

$$U(\theta\, \hat{n}) = e^{\imath\, \theta\, \frac{\hat{\sigma}}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{1}_2 + \imath\, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\sigma}. \tag{2.9}$$

Estas son funciones periódicas de la variable θ, de período 4π, para todo $\hat{n}$ (es decir, para toda recta que pasa por el origen del álgebra de Lie), lo que refleja el

---

[7] Los generadores en la representación adjunta (ver (1.42)) de $SU(2)$ son las matrices cuyos elementos son $(M_i)_{jk} = \imath\, \mathbf{C}_{ij}{}^{k} = -\imath\, \epsilon_{ijk}$,

$$M_1 = -\imath \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = -\imath \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = -\imath \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

las que también satisfacen

$$[M_i, M_j] = \imath\, \epsilon_{ijk}\, M_k. \tag{2.5}$$

Por otra parte, para esta elección de generadores la **forma de Killing** se reduce a

$$g_{ij} = -\, \epsilon_{ikl}\, \epsilon_{jlk} = 2\, \delta_{ij}. \tag{2.6}$$

Como g_{ij} es regular, $SU(2)$ es semi-simple.

hecho de que $SU(2)$ es compacto. En particular,

$$U(4\pi\,\hat{n}) = e^{\imath\, 4\pi\, \frac{\hat{\sigma}}{2}} = \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_2 = U(0\,\hat{n}), \tag{2.10}$$

para todo $\hat{n}$.

En esas condiciones, podemos describir la variedad (simplemente conexa) del grupo $SU(2)$ como los puntos de una esfera de radio 2π en $\mathbb{R}^3$, con todo su borde identificado con el elemento $-\mathbf{1}_2$. En efecto,

$$U(2\pi\,\hat{n}) = e^{\imath\, 2\pi\, \frac{\hat{\sigma}}{2}} = \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) \mathbf{1}_2 = -\mathbf{1}_2, \tag{2.11}$$

para todo $\hat{n}$. En esta variedad, los subgrupos Abelianos unidimensionales corresponden a diámetros de la esfera (que son líneas cerradas, ya que conectan dos puntos sobre el borde de la variedad).

El grupo $SU(2)/\mathbb{Z}_2$, homomorfo a $SU(2)$, tiene por elementos a los ***cosets*** $U\mathbb{Z}_2 \equiv \{+U, -U\}$, con $U \in SU(2)$. Dado que

$$-U(\theta\,\hat{n}) = U\left(2\pi(-\hat{n})\right)\, U(\theta\,\hat{n}) = U\left((2\pi-\theta)(-\hat{n})\right), \tag{2.12}$$

vemos que la variedad del grupo $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ puede ser descrita como una esfera de radio π en $\mathbb{R}^3$, con los puntos diametralmente opuestos sobre su borde identificados entre sí . En efecto, las matrices correspondientes a puntos diametralmente opuestos pertenecen al mismo coset,

$$U(\pi\,\hat{n}) = U(2\pi\,\hat{n})\, U(\pi\,(-\hat{n})) = -U(\pi\,(-\hat{n})), \tag{2.13}$$

y consecuentemente corresponden al mismo elemento de $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ que, de ese modo, resulta doblemente conexo.

Consideremos ahora el grupo $SO(3)$, de matrices ortogonales de 3×3 de determinante 1. Siendo un grupo (doblemente) conexo compacto, todos sus elemento yacen sobre algún subgrupo Abeliano unidimensional, y pueden ser representados como la exponencial de $\imath$ veces un vector del álgebra de Lie de este grupo. Si $R = e^{A}$, entonces

$$\begin{gathered} R^t = e^{A^t} = R^{-1} = e^{-A} \Rightarrow A^t = -A \\ \ln\det R = \operatorname{tr}\ln R = \operatorname{tr} A = 0. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Es decir, el ágebra de Lie de $SO(3)$ es el espacio vectorial de las matrices reales antisimétricas (y, en consecuencia, de traza nula) multiplicadas por $-\imath$. Se trata de un espacio de dimensión 3 (igual al número de parámetros independientes del grupo $SO(3)$), en el que podemos adoptar como base el conjunto de matrices

$$X_1 = -\imath \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = -\imath \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

$$X_3 = -\imath \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(coincidentes con los generadores de $SU(2)$ en la representación adjunta!, ver (2.4)) de modo que $A = \imath\alpha^k X_k$.

Las constantes de estructura de $SO(3)$ correspondientes a esta elección de generadores se obtienen fácilmente por cálculo directo de los conmutadores

$$[X_i, X_j] = \imath\, \epsilon_{ijk}\, X_k, \tag{2.16}$$

de modo que también para este grupo resulta que

$$\mathbf{C}_{ij}{}^{k} = -\epsilon_{ijk}. \tag{2.17}$$

Estas constantes de estructura son idénticas a las antes obtenidas para $SU(2)$, de modo que estos dos grupos son (localmente) isomorfos en un entorno de la identidad. Entonces $SU(2)$, simplemente conexo, es el ***grupo de cubrimiento universal*** de la clase de grupos localmente isomorfos a la que pertenece $SO(3)$.

Cada subgrupo Abeliano unidimensional de $SO(3)$ contiene las matrices de la forma $R(\theta\,\hat{n}) = e^{\imath\,\theta\,\hat{X}}$, donde $\hat{X} = n^k X_k$, con $\hat{n}$ un vector unitario en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, para $n^k = \delta^{k3}$, es fácil verificar que

$$(X_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (X_3)^3 = X_3. \tag{2.18}$$

Entonces,

$$R(\theta\,\hat{e}_3) = e^{\imath\,\theta X_3} = \mathbf{1}_3 + i\sin(\theta)\, X_3 + (\cos(\theta) - 1)\,(X_3)^2. \tag{2.19}$$

En particular, $R(2\pi\,\hat{n}_3) = \mathbf{1}_3 = R(0\,\hat{n}_3)$.

La matriz $R(\theta\,\hat{n}_3)$ es una función periódica de θ de período 2π, y lo mismo se verifica para $R(\theta\hat{n})$ cualquiera que sea el vector unitario $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$. De ese modo, la variedad del grupo $SO(3)$ puede ser descrita como una esfera de radio π en $\mathbb{R}^3$, con los puntos diametralmente opuestos sobre su borde identificados entre sí. En efecto,

$$R(\pi\,\hat{n}) = R(2\pi\,\hat{n})R(\pi\,(-\hat{n})) = R(\pi\,(-\hat{n})), \tag{2.20}$$

siendo $SO(3)$ doblemente conexo.

En resumen, $SO(3)$ es localmente isomorfo a $SU(2)$; pero mientras que éste es simplemente conexo, el ***primer grupo de homotopía*** de aquél es

$$\Pi_1\left(SO(3)\right) \approx \mathbb{Z}_2 \approx \Pi_1\left(SU(2)/\mathbb{Z}_2\right). \tag{2.21}$$

Dado que el ***centro*** de $SU(2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, $SO(3)$ sólo puede ser ***globalmente isomorfo*** a $SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

En consecuencia, $SO(3)$ es homomorfo a $SU(2)$ por un homomorfismo de núcleo $\{\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2\} \approx \mathbb{Z}_2$. Las representaciones de $SU(2)$ serán, en general, ***representaciones proyectivas*** (bivaluadas) de $SO(3)$. Sólo aquellas para las cuales

$$D(-U) = D(U), \forall U \in SU(2) \Rightarrow D(-\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_r = D(\mathbf{1}_2) \tag{2.22}$$

son representaciones ordinarias de $SO(3)$.

3. Algebras de Lie de otros grupos de matrices

Las representación fundamental de cada uno de los grupos de matrices que hemos definido ofrece una ***representación matricial (fiel)*** para el álgebra de Lie de esos grupos, a partir de la cual es posible deducir la operación entre vectores del álgebra de manera similar a como fue hecho antes para $SU(2)$ y $SO(3)$. Para ello, representamos elementos del grupo como $M = e^A$ y establecemos, en cada caso, las condiciones que debe satisfacer la matriz A.

Por ejemplo, para $GL(n, \mathbb{R})$, grupo lineal de matrices (regulares) reales de $n \times n$, A toma valores en el espacio lineal de las matrices reales $n \times n$. Una base de ese espacio vectorial está dada por las matrices cuyos elementos son todos nulos salvo uno, tomado igual a 1:

$$E_{kl} := |k\rangle\,\langle l| \equiv \hat{e}_k\,(\hat{e}_l, \cdot) \;\Rightarrow\; (E_{kl})_{rs} = \delta_{kr}\delta_{ls}, \tag{3.1}$$

donde los $\hat{e}_k,\ k = 1, 2, ..., n$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, $\langle k|l\rangle \equiv (\hat{e}_k, \hat{e}_l) = \delta_{kl}$.

Existen n^2 de tales matrices, que pueden ser tomadas como generadores. De ese modo, el álgebra de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ (y, por lo tanto, también el grupo $GL(n,\mathbb{R})$) es de dimensión n^2.

Para determinar las constantes de estructura asociadas con esta elección de generadores hay que calcular sus conmutadores. Teniendo en cuenta que

$$E_{kl}E_{rs} = |k\rangle\langle l|r\rangle\langle s| = \delta_{lr}\,|k\rangle\langle s|\,, \tag{3.2}$$

resulta de inmediato

$$[E_{kl}, E_{rs}] = \delta_{lr}E_{ks} - \delta_{sk}E_{rl}. \tag{3.3}$$

Para obtener matrices de $GL(n,\mathbb{C})$ sería necesario considerar combinaciones lineales complejas de los E_{kl}. Pero como debemos describir a los grupos de Lie en términos de parámentros reales, más bien debemos duplicar el número de generadores introduciendo nuevas matrices, definidas como $E'_{kl} = \imath E_{kl}$, en lo que se conoce como la **complexificación** del álgebra de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$. En consecuencia, el grupo $GL(n,\mathbb{C})$ tiene dimensión $2n^2$.

Para obtener el resto de las constantes de estructura, se deben calcular los conmutadores

$$\begin{aligned}
&[E_{kl}, E'_{rs}] = +\delta_{lr}E'_{ks} - \delta_{sk}E'_{rl},\\
&[E'_{kl}, E'_{rs}] = -\delta_{lr}E_{ks} + \delta_{sk}E_{rl}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Si se trata del grupo $SL(n,\mathbb{R})$, **subgrupo unimodular** de $GL(n,\mathbb{R})$, sus elementos son matrices reales de determinante 1. Entonces, si $M = e^{A}$, $\ln\det M = 0$ implica que A tiene traza nula, $\mathrm{tr}A = 0$.

Los generadores de este grupo son combinaciones lineales de los generadores de $GL(n,\mathbb{R})$ con traza nula. Para $k \neq l$, $\mathrm{tr}E_{kl} = 0$, pero $\mathrm{tr}E_{kk} = 1$. Entonces se pueden mantener los primeros, pero es necesario tomar combinaciones de los generadores ***diagonales*** que tengan traza nula. Por ejemplo, se puede tomar como base del álgebra de Lie de $SL(n,\mathbb{R})$ al conjunto de generadores

$$\begin{aligned}
&E_{kl},\ k \neq l,\\
&(E_{kk} - E_{nn})\,,\ k = 1, 2, ..., n-1,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

lo que corresponde a una dimensión $\dim SL(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1$. Similarmente, $\dim SL(n,\mathbb{C}) = 2(n^2 - 1)$.

Para los grupos unitarios, con $U = e^{\imath A}$, la condición $U^\dagger = U^{-1}$ implica $A^\dagger = A$. Es decir, el álgebra de Lie de $U(n)$ es el espacio vectorial de las matrices autoadjuntas de $n \times n$. Sus generadores son combinaciones lineales autoadjuntas de las matrices E_{kl}. Teniendo en cuenta que $E_{kl}^\dagger = (|k\rangle \langle l|)^\dagger = |l\rangle \langle k| = E_{lk}$, vemos que una elección posible es

$$\begin{aligned} M_{kl} &= E_{kl} + E_{lk}, \ k \geq l, \\ N_{kl} &= \imath \left(E_{kl} - E_{lk} \right), \ k > l, \end{aligned} \tag{3.6}$$

de donde resulta que $\dim U(n) = (n + n(n-1)/2) + n(n-1)/2 = n^2$. Las correspondientes constantes de estructura se calculan fácilmente a partir de (3.3)[8].

Para el grupo $SU(n)$ se debe imponer además la condición de que los generadores tengan traza nula, lo que requiere tomar, por ejemplo, las combinaciones de los generadores diagonales $M_{kk} - M_{nn}$, con $k = 1, 2, ..., n-1$. De ello resulta que $\dim U(n) = n^2 - 1$.

Para los grupos ortogonales, si $R = e^{A}$, la condición $R^t = R^{-1}$ implica $A^t = -A$, de donde resulta que el álgebra de Lie de $SO(n)$ es el espacio lineal de las matrices reales y antisimétricas de $n \times n$, multiplicadas por $(-\imath)$. Sus generadores pueden ser tomados como

$$N_{kl} = \imath \left(E_{kl} - E_{lk} \right), \ k > l, \tag{3.9}$$

de modo que $\dim SO(n) = n(n-1)/2$. Las constantes de estructura se calculan tomando los conmutadores de los generadores y empleando (3.3).

---

[8]Por ejemplo, para el grupo $U(2)$ tenemos

$$\begin{aligned} M_{11} &= \sigma_0 + \sigma_3, \quad M_{22} = \sigma_0 - \sigma_3, \\ M_{21} &= \sigma_1, \qquad\quad N_{21} = \sigma_2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $\sigma_0 = \mathbf{1}_2$. Pero también podemos tomar como base del álgebra de Lie de $U(2)$ directamente a $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, cuyos conmutadores son

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= 2\imath\, \epsilon_{ijk}\, \sigma_k, \\ [\sigma_i, \sigma_0] &= 0, \ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Esta álgebra se separa en dos subálgebras que conmutan entre sí, lo que refleja el hecho de que $U(2) = U(1) \otimes SU(2)$, de modo que el grupo no es semi-simple y su forma de Killing es singular: $g_{0\mu} = \mathrm{tr}\{M_0\, M_\mu\} = \mathrm{tr}\{O\, M_\mu\} = 0$, para $\mu = 0, 1, 2, 3$.

4. Medida de integración invariante

Las relaciones de ortogonalidad para grupos de orden finito, así como la equivalencia de toda representación con una representación unitaria, se demuestran haciendo uso de la siguiente propiedad de las sumas sobre los elementos del grupo:

$$\sum_{g\in G} \psi(g\cdot h^{-1}) = \sum_{g'\in G} \psi(g'),\ \forall h \in G. \tag{4.1}$$

Para sumas parciales, sobre subconjuntos de G, se tiene

$$\sum_{g\in S\subset G} \psi(g\cdot h^{-1}) = \sum_{g'\in S\cdot h^{-1}\subset G} \psi(g'),\ \forall h \in G. \tag{4.2}$$

De existir una propiedad similar para el caso de los grupos continuos, las sumas deberían ser consideradas como integrales sobre la variedad, con una ***medida de integración*** que dé cuenta de la densidad de elementos del grupo alrededor de cada punto,

$$\int_{S\subset G} d\mu(g)\, \psi(g\cdot h^{-1}) = \int_{S\cdot h^{-1}\subset G} d\mu(g')\, \psi(g'). \tag{4.3}$$

Pero, cambiando de ***variable de integración*** en el miembro de la izquierda, $g \to g'\cdot h$, también resulta

$$\int_{S\subset G} d\mu(g)\, \psi(g\cdot h^{-1}) = \int_{S\cdot h^{-1}\subset G} d\mu(g'\cdot h)\, \psi(g'). \tag{4.4}$$

Las igualdades (4.3) y (4.4) deberían valer $\forall\, S \subset G$, $\forall\, h \in G$, y para toda función $\psi(g)$ definida sobre el grupo, de modo que la medida de integración sobre la variedad debería ser invariante por multiplicación a derecha,

$$d\mu(g\cdot h) = d\mu(g),\ \forall g, h \in G. \tag{4.5}$$

Es decir, para el caso de grupos continuos se podrán demostrar propiedades similares a las que valen para grupos de orden finito siempre que se pueda construir una **medida de integración invariante por multiplicación a derecha** (que satisfaga (4.5)), tal que su integral sobre la variedad del grupo sea convergente.

Esta invarianza de la medida refleja el hecho de que la multiplicación a derecha por h establece una relación biunívoca (dada la existencia de $h^{-1} \in G$) entre los elementos de un entorno $\mathcal{U}_g$ de g y los de la imagen de ese entorno, $\mathcal{U}_{g\cdot h}$.

En el caso de grupos de Lie, una vez establecidos sistemas de coordenadas locales sobre la variedad del grupo, la medida de integración en el punto g puede ser referida a sus coordenadas β^μ,

$$d\mu(g) = \rho(\beta)\, d^n\beta. \tag{4.6}$$

Entonces, la ***densidad de elementos*** $\rho(\beta)$ debe tener en cuenta la variación que sufre el ***volumen*** de S_g cuando se lo multiplica a derecha por h para obtener $S_{g\cdot h}$, y esa variación puede ser determinada a partir de la ley de composición en el grupo.

En efecto, sea a un elemento próximo de la identidad, que tiene asignadas coordenadas α^μ en un sistema para el cual las coordenadas de e son $\varepsilon^\mu = 0$, y sea un segundo elemento b de coordenadas β^μ. Las coordenadas del producto $c = a\cdot b$, $\gamma^\mu = \phi^\mu(\alpha,\beta)$, son funciones analíticas de α^μ, de modo que

$$\gamma^\mu - \beta^\mu = \left(\frac{\partial \phi^\mu(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^\nu} \right)\Bigg|_{\alpha=0} \alpha^\nu + \mathcal{O}(\alpha)^2. \tag{4.7}$$

En consecuencia, la relación entre un volumen elemental alrededor de e y su imagen por multiplicación a derecha por b está dada por

$$d^n\beta = \left| \det \left(\frac{\partial \phi^\mu(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^\nu} \right)\Bigg|_{\alpha=0} \right| \; d^n\alpha, \tag{4.8}$$

donde $\det \left(\frac{\partial \phi^\mu(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^\nu} \right)\Big|_{\alpha=0} \neq 0$ (ver (1.14)).

Entonces, tomando $g = b$ y $h = b^{-1}$ en (4.5) y (4.6), tenemos para una medida invariante a derecha

$$\begin{gathered} d\mu(b\cdot b^{-1}) = d\mu(e) = d\mu(b) \Rightarrow \\ \rho(0)\, d^n\alpha = \rho(\beta)\, d^n\beta = \rho(\beta) \left| \det \left(\frac{\partial \phi^\mu(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^\nu} \right)\Bigg|_{\alpha=0} \right| \; d^n\alpha, \end{gathered} \tag{4.9}$$

de donde resulta que

$$\frac{\rho(\beta)}{\rho(0)} = \left| \det \left(\frac{\partial \phi^\mu(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^\nu} \right)\Bigg|_{\alpha=0} \right|^{-1}. \tag{4.10}$$

Esta densidad de elementos, determinada a menos de una constante multiplicativa, permite construir una medida de integración invariante a derecha.

La integral de esta medida invariante sobre una región de la variedad del grupo de Lie considerado permite definir un **volumen invariante a derecha** para dicha región. En particular, el volumen invariante a derecha de (toda) la variedad de un grupo de Lie ***compacto*** es finito.

En todo grupo de Lie puede construirse de manera similar una **medida de integración invariante por multiplicación a izquierda**, que distinguimos de la anterior introduciendo los subíndices R o L según el caso.

La densidad de elementos que aparece en la expresión de la medida invariante a izquierda está dada por

$$
\begin{gathered}
d\mu_L(b) = \rho_L(\beta)\, d^n\beta, \\
\frac{\rho_L(\beta)}{\rho_L(0)} = \left| \det \left(\frac{\partial \phi^\mu(\beta,\alpha)}{\partial \alpha^\nu} \right) \Big|_{\alpha=0} \right|^{-1}.
\end{gathered} \tag{4.11}
$$

En ambos casos suele definirse $\rho_L(0) = 1 = \rho_R(0)$.

En principio, las medidas invariantes a derecha e izquierda ***son diferentes***. Sin embargo, en ciertos casos (como el de los ***grupos de Lie compactos***) resultan ser iguales.

Si trasladamos un volumen elemental tomado alrededor de e, primero por multiplicación a ***derecha*** por b y luego por multiplicación a ***izquierda*** por b^{-1}, en general no se vuelve a la región de partida, sino que su imagen tendrá un volumen distorsionado por un factor de amplificación. En efecto,

$$
\begin{gathered}
d^n\alpha = d\mu_R(e) = d\mu_R(e\cdot b) = \rho_R(\beta) d^n\beta = \\
\left(\frac{\rho_R(\beta)}{\rho_L(\beta)}\right) \rho_L(\beta) d^n\beta = \left(\frac{\rho_R(\beta)}{\rho_L(\beta)}\right) d\mu_L(b) = \\
\left(\frac{\rho_R(\beta)}{\rho_L(\beta)}\right) d\mu_L(b_{-1}\cdot b) = \left(\frac{\rho_R(\beta)}{\rho_L(\beta)}\right) d\mu_L(e) = \left(\frac{\rho_R(\beta)}{\rho_L(\beta)}\right) d^n\alpha^{(1)},
\end{gathered} \tag{4.12}
$$

es decir,

$$
d^n\alpha^{(1)} = \left(\frac{\rho_L(\beta)}{\rho_R(\beta)}\right) d^n\alpha = f(\beta)\, d^n\alpha. \tag{4.13}
$$

Si sobre el elemento de volumen resultante se realizan nuevamente las traslaciones, a derecha por b y a izquierda por b^{-1}, el volumen resultante aparecerá corregido por el factor de amplificación $(f(\beta))^2$, y en general, tras realizar N veces esa operación,

$$
d^n\alpha^{(N)} = (f(\beta))^N\, d^n\alpha. \tag{4.14}
$$

Pero, dada la asociatividad del producto en G, ese factor es también el que corresponde a la traslación a derecha por b^N y a izquierda por b^{-N}.

Nótese que para todo N finito, esa transformación es ***inversible***, siendo su inversa la multiplicación a derecha por b^{-N} y a izquierda por b^N, a la que evidentemente corresponde el factor de amplificación de volumen $(f(\beta))^{-N}$.

Ahora bien, si $f(\beta) > 1$ entonces $(f(\beta))^N$ resulta mayor que cualquier número positivo con sólo tomar N suficientemente grande. Pero eso no es posible en un ***grupo de Lie compacto***, puesto que la transformación ha de ser inversible para todo N y el volumen de la variedad en ese caso es finito. En efecto, si $f(\beta) > 1$ en un abierto de volumen finito sobre la variedad, el volumen de la región imagen superaría al de la variedad toda con sólo tomar N suficientemente grande, y en ese caso la transformación no sería biunívoca.

Con un razonamiento similar se muestra que $f(\beta)$ no puede ser menor que 1. Por lo tanto $f(\beta) = 1$, lo que implica ***la igualdad de las medidas invariantes a derecha e izquierda para todo grupo de Lie compacto***,

$$\rho_L(\beta) = \rho_R(\beta) \Rightarrow d\mu_L(b) = d\mu_R(b), \ \forall\, b \in G. \tag{4.15}$$

El **volumen invariante** de un grupo de Lie compacto se define como la integral de la medida invariante (tanto a izquierda como a derecha) sobre su variedad,

$$V[G] := \int_G d\mu(g) < \infty. \tag{4.16}$$

Estos resultados permiten mostrar, en particular, que ***toda representación matricial de un grupo de Lie compacto es equivalente a una representación unitaria***.

5. Medida invariante para los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$

Para calcular la medida de integración invariante sobre el grupo $SO(3)$, primero notemos que su variedad (una esfera maciza de radio π en $\mathbb{R}^3$ con los puntos diametralmente opuestos sobre su borde identificados entre sí) es simétrica frente a rotaciones. Dos rotaciones ***en un mismo ángulo*** son conjugadas una de la otra, siendo el elemento que las relaciona la rotación que lleva el eje de rotación de la primera a coincidir con el de la segunda. De ese modo, la ***densidad de elementos*** de $SO(3)$ alrededor de una rotación particular dependerá del ángulo de la rotación, pero no de la dirección de su eje de rotación.

Entonces, sin pérdida de generalidad, consideraremos la medida de integración alrededor del elemento $b \to R(\theta\,\hat{e}_3) = e^{\imath\,\theta\,X_3}$. Para ello debemos trasladar por multiplicación a derecha por la matriz

$$R(\theta\,\hat{e}_3) = e^{\imath\,\theta\,X_3} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

elementos próximos de la identidad que tienen la forma

$$a \to S = e^{\imath \alpha^k X_k} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\alpha)^2. \tag{5.2}$$

Tenemos entonces

$$R' = S\, R(\theta\, \hat{e}_3) = e^{\imath\, \theta\, X_3} +$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha_3 \sin\theta & \alpha_3 \cos\theta & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 \cos\theta & -\alpha_3 \sin\theta & \alpha_1 \\ \alpha_1 \sin\theta + \alpha_2 \cos\theta & -\alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \sin\theta & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\alpha)^2, \tag{5.3}$$

donde R' también puede escribirse de la forma[9]

(5.7)

$$R' = e^{\imath\, (\varphi_1\, X_1 + \varphi_2\, X_2 + (\varphi_3 + \theta)\, X_3)} = e^{\imath\, \theta\, X_3} +$$

$$\begin{pmatrix} -\varphi_3 \sin\theta & \varphi_3 \cos\theta & -\varphi_1 \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\right) - \varphi_2 \frac{\sin\theta}{\theta} \\ -\varphi_3 \cos\theta & -\varphi_3 \sin\theta & \varphi_1 \frac{\sin\theta}{\theta} - \varphi_2 \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\right) \\ -\varphi_1 \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\right) + \varphi_2 \frac{\sin\theta}{\theta} & -\varphi_1 \frac{\sin\theta}{\theta} - \varphi_2 \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\mathcal{O}(\varphi)^2.$$

[9] Téngase en cuenta que, para $n_k\, n_k = 1$,

$$n_k\, X_k = -i \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

$$(n_k\, X_k)^2 = \begin{pmatrix} (n_2)^2 + (n_3)^2 & -n_1\, n_2 & -n_1\, n_3 \\ -n_1\, n_2 & (n_1)^2 + (n_3)^2 & -n_2\, n_3 \\ -n_1\, n_3 & -n_2\, n_3 & (n_1)^2 + (n_2)^2 \end{pmatrix} = \mathbf{1_3} - \hat{n} \otimes \hat{n}, \tag{5.5}$$

y que

$$(n_k\, X_k)\, \hat{n} = 0 \Rightarrow (n_k\, X_k)^3 = n_k\, X_k. \tag{5.6}$$

Entonces, a menos de términos de orden $(\alpha)^2$,

$$\varphi_3 = \alpha_3$$

$$\frac{2\sin\theta/2}{\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

de donde resulta que

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = M(\theta)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

siendo

$$M(\theta) = \frac{\theta}{2\sin\theta/2}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 & 0 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2\sin\theta/2}{\theta} \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

En consecuencia, la densidad $\rho(\theta)$, que sólo depende del ángulo θ, está dada por el Jacobiano de esa transformación,

$$\rho(\theta) = \left|\frac{1}{\det M(\theta)}\right| = \frac{4\sin^2(\theta/2)}{\theta^2}, \ \forall\hat{n}. \tag{5.11}$$

La medida invariante puede escribirse como

$$d\mu_{[SO(3)]}\left(R(\theta\,\hat{n})\right) = \rho(\theta)\,\theta^2\,d\theta\,d\Omega_2 = 4\sin^2(\theta/2)\,d\theta\,d\Omega_2, \tag{5.12}$$

donde $d\Omega_2$ es el elemento de integración sobre la esfera $\mathcal{S}_2$.

El volumen invariante de este grupo es

$$\begin{aligned} V[SO(3)] &= \int_0^\pi \int_{S^2} 4\sin^2(\theta/2)\,d\theta\,d\Omega_2 = \\ &= 16\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos\theta}{2}\,d\theta = 8\pi^2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Para hallar la medida invariante para el grupo $SU(2)$, tengamos en cuenta que $SO(3) \approx SU(2)/\mathbb{Z}_2$, y que su variedad es una esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio 2π con su borde identificado con el elemento $-\mathbf{1_2}$.

Por lo tanto, para $\theta < \pi$ la medida invariante de $SU(2)$ coincide con la de $SO(3)$, siendo entonces sólo función de θ. Pero como los elementos de $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ son cosets de la forma $\{U, -U\}$, y están en correspondencia biunívoca con los elementos de

$SO(3)$, la medida de integración alrededor de $-U(\theta\,\hat{n}) = U((2\pi-\theta)(-\hat{n}))$ debe ser la misma que alrededor de $U(\theta\,\hat{n})$. En consecuencia, para $\theta > \pi$

$$\begin{aligned} & d\mu(U(\theta\,\hat{n})) = d\mu(U((2\pi-\theta)(-\hat{n}))) = \\ & = 4\left(\sin\left(\frac{2\pi-\theta}{2}\right)\right)^2 d\theta\, d\Omega_2 = 4\sin^2(\theta/2)\, d\theta\, d\Omega_2. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Por lo tanto, la medida de integración invariante (tanto a izquierda como a derecha) sobre el grupo $SU(2)$ está dada por

$$d\mu_{[SU(2)]}\left(U(\theta\,\hat{n})\right) = 4\sin^2(\theta/2)\, d\theta\, d\Omega_2,\ 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{5.15}$$

y el volumen invariante de este grupo es

$$\begin{aligned} & V[SU(2)] = \int_0^{2\pi}\int_{S^2} 4\sin^2(\theta/2)\, d\theta\, d\Omega_2 = \\ & = 16\pi\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos\theta}{2}\, d\theta = 16\pi^2. \end{aligned} \tag{5.16}$$

6. Representaciones unitarias irreducibles del grupo $SU(2)$

Como $SU(2)$ es un grupo de Lie compacto, toda representación matricial es equivalente a una representación unitaria. Entonces, basta con considerar representaciones matriciales del álgebra de Lie de $SU(2)$ cuyos generadores sean matrices autoadjuntas. En efecto, si las matrices J_k satisfacen

$$\begin{aligned} & J_k^\dagger = J_k,\ k = 1,2,3, \\ & [J_i, J_j] = \imath\,\epsilon_{ijk}\,J_k,\ \forall\, i,j,k, \end{aligned} \tag{6.1}$$

entonces las matrices de la representación (obtenidas mediante la aplicación exponencial) son unitarias,

$$\begin{aligned} & \left[D\left(U(\theta\,\hat{n})\right)\right]^\dagger = \left[e^{\imath\,\theta\,n^k J_k}\right]^\dagger = e^{-\imath\,\theta\,n^k J_k^\dagger} = \\ & e^{-\imath\,\theta\,n^k J_k} = \left[D\left(U(\theta\,\hat{n})\right)\right]^{-1},\ \forall\, U(\theta\,\hat{n}) \in SU(2). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Por otra parte, el **operador de Casimir**[10] $\mathbf{J}^2 := (J_1)^2 + (J_2)^2 + (J_3)^2$ conmuta con los generadores,

$$[\mathbf{J}^2, J_j] = J_i\,[J_i, J_j] + [J_i, J_j]\,J_i = \imath\,\epsilon_{ijk}\,(J_iJ_k + J_kJ_i) = 0, \tag{6.5}$$

por lo que $\mathbf{J}^2$ $(= (\mathbf{J}^2)^\dagger)$ conmuta con todos los elementos de la representación matricial considerada,

$$\left[\mathbf{J}^2, e^{\imath\,\theta\,n^k J_k}\right] = 0, \ \forall\,\theta, \hat{n}. \tag{6.6}$$

En consecuencia, si se trata de una representación ***irreducible***, el Lema de Schur requiere que sea proporcional a la matriz identidad,

$$\mathbf{J}^2 = \lambda\mathbf{1}, \tag{6.7}$$

donde el valor de λ (≥ 0 puesto que $\mathbf{J}^2$ es suma de cuadrados de matrices autoadjuntas) caracteriza la representación.

Se trata entonces de construir el espacio de representación correspondiente a una representación unitaria irreducible, caracterizada por un autovalor de $\mathbf{J}^2$ que, por conveniencia, escribiremos como $\lambda = j(j+1)$, con $j \geq 0$.

Podemos elegir una base para ese espacio formada por autovectores simultáneos de $\mathbf{J}^2$ y de J_3[11],

$$\begin{gathered} \mathbf{J}^2\,|j\,m\rangle = j(j+1)\,|j\,m\rangle\,, \\ J_3\,|j\,m\rangle = m\,|j\,m\rangle\,, \end{gathered} \tag{6.8}$$

que supondremos normalizados, $\langle j\,m'\,|j\,m\rangle = \delta_{m'\,m}$ (donde hemos empleado la notación de Dirac para vectores y formas lineales).

[10] Casimir ha mostrado que toda álgebra de Lie semi-simple posee un **invariante fundamental cuadrático** dado por

$$K = g^{\mu\nu}\,X_\mu\,X_\nu, \tag{6.3}$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la inversa de la forma de Killing. En efecto,

$$\begin{gathered} [K, X_\lambda] = g^{\mu\nu}\ [X_\mu, X_\lambda]\ X_\nu + g^{\mu\nu}\,X_\mu\ [X_\nu, X_\lambda] = \\ = -\imath\,\mathbf{C}_{\mu\lambda\sigma}\,g^{\sigma\rho}\,g^{\mu\nu}\,(X_\rho\,X_\nu + X_\nu\,X_\rho) = 0, \end{gathered} \tag{6.4}$$

dado que las constantes $\mathbf{C}_{\mu\lambda\sigma}$ son totalmente antisimétricas.

[11] El **rango** de un álgebra de Lie es el máximo número de generadores que conmutan entre sí. En el caso del grupo $SU(2)$ el rango es 1, de acuerdo a la ec. (6.1).

Tomando las combinaciones $J_\pm = J_1 \pm \imath J_2$, las reglas de conmutación (6.1) se reducen a

$$(6.9)\qquad \begin{aligned} &[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \\ &[J_+, J_-] = 2J_3, \end{aligned}$$

mientras que por cálculo directo resulta que

$$(6.10)\qquad \begin{aligned} &J_- J_+ = \mathbf{J}^2 - J_3\,(J_3 + 1) \\ &J_+ J_- = \mathbf{J}^2 - J_3\,(J_3 - 1)\,. \end{aligned}$$

Entonces,

$$(6.11)\qquad \begin{aligned} &J_- J_+ \left|j\,m\right\rangle = \{j(j+1) - m(m+1)\} \left|j\,m\right\rangle, \\ &J_+ J_- \left|j\,m\right\rangle = \{j(j+1) - m(m-1)\} \left|j\,m\right\rangle. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $(J_\pm)^\dagger = J_\mp$, las anteriores igualdades implican que

$$(6.12)\qquad \begin{aligned} &\parallel J_+ \left|j\,m\right\rangle \parallel^2 = \left\langle j\,m\right| J_- J_+ \left|j\,m\right\rangle = (j-m)\,(j+m+1) \geq 0, \\ &\parallel J_- \left|j\,m\right\rangle \parallel^2 = \left\langle j\,m\right| J_+ J_- \left|j\,m\right\rangle = (j+m)\,(j-m+1) \geq 0, \end{aligned}$$

de donde

$$(6.13)\qquad \left(j^2 - m^2\right)\left((j+1)^2 - m^2\right) \geq 0.$$

Esas desigualdades son satisfechas sólo si $j^2 \geq m^2$, es decir, si los autovalores de J_3

$$(6.14)\qquad -j \leq m \leq j.$$

Por otra parte, de (6.9) resulta que

$$(6.15)\qquad J_3\left(J_\pm \left|j\,m\right\rangle\right) = J_\pm\left(J_3 \pm 1\right)\left|j\,m\right\rangle = (m \pm 1) J_\pm \left|j\,m\right\rangle.$$

Por lo tanto, por aplicación del operador J_+ (J_-) al vector $\left|j\,m\right\rangle$ resulta un nuevo autovector de J_3 con autovalor aumentado (disminuido) en 1:

$$(6.16)\qquad \begin{aligned} &J_+ \left|j\,m\right\rangle = \{(j-m)\,(j+m+1)\}^{1/2} \left|j\,(m+1)\right\rangle, \\ &J_- \left|j\,m\right\rangle = \{(j+m)\,(j-m+1)\}^{1/2} \left|j\,(m-1)\right\rangle, \end{aligned}$$

donde los factores de proporcionalidad han sido fijados de acuerdo con (6.12).

Pero como m no puede tomar valores superiores a j, debe existir un valor máximo para el autovalor de J_3, $-j \leq M \leq j$, tal que

$$J_+ \left| j\, M \right\rangle = \mathbf{0}, \tag{6.17}$$

de modo que

$$\begin{array}{c} \parallel J_+ \left| j\, M \right\rangle \parallel^2 = (j-M)\,(j+M+1) = 0 \\ \\ \Rightarrow M = j. \end{array} \tag{6.18}$$

A partir de ese vector, por aplicación de J_-, se puede generar el resto de los vectores de la base del espacio de la representación,

$$(J_-)^n \left| j\, M \right\rangle \sim \left| j\,(M-n) \right\rangle, \text{ con } n \in \mathbb{N}. \tag{6.19}$$

Pero este espacio es de ***dimensión finita*** (por tratarse de una representación matricial) y, como hemos visto, los autovalores de J_3 deben ser mayores que $-j$. Esto significa que ese proceso debe terminar para algún entero $n \geq 0$, es decir,

$$J_- \left| j\,(M-n) \right\rangle = \mathbf{0}. \tag{6.20}$$

Igualando la norma de este vector a cero,

$$\parallel J_- \left| j\,(M-n) \right\rangle \parallel^2 = (j+M-n)\,(j-M+n+1) = 0, \tag{6.21}$$

obtenemos $M = j = n - j$. Es decir, $j = n/2$, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

En consecuencia, el espacio de la representación unitaria irreducible de $SU(2)$ caracterizada por el ***semientero*** $j = n/2$, con $n = 0, 1, \ldots$, está generado por los vectores $\{\left| j\, m \right\rangle,\ m = -j, -j+1, ..., j-1, j\}$, siendo su dimensión $n+1 = 2j+1$.

Referidos a esa base, los generadores tienen por elementos de matriz a

$$\begin{array}{c} \left\langle j\, m' \right| \mathbf{J}^2 \left| j\, m \right\rangle = j(j+1)\, \delta_{m',m}, \\ \\ \left\langle j\, m' \right| J_3 \left| j\, m \right\rangle = m\, \delta_{m',m}, \\ \\ \left\langle j\, m' \right| J_+ \left| j\, m \right\rangle = \left\{(j-m)\,(j+m+1)\right\}^{1/2}\, \delta_{m',m+1}, \\ \\ \left\langle j\, m' \right| J_- \left| j\, m \right\rangle = \left\{(j+m)\,(j-m+1)\right\}^{1/2}\, \delta_{m',m-1}. \end{array} \tag{6.22}$$

Por lo dicho anteriormente, vemos que ***es posible construir representaciones irreducibles del grupo*** $SU(2)$ ***de cualquier dimensión***.

Para $j=0$, la dimensión del espacio de representación es $2j+1=1$, las matrices que representan a los generadores son todas nulas, y se obtiene la representación trivial del grupo.

Para $j=1/2$, la dimensión es $2j+1=2$, los generadores están dados por

$$\mathbf{J}^2=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ J_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ J_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\tag{6.23}$$

es decir,

$$J_1=\frac{1}{2}\,\sigma_1,\ J_2=\frac{1}{2}\,\sigma_2,\ J_3=\frac{1}{2}\,\sigma_3,\tag{6.24}$$

y se obtiene la ***representación fundamental*** del grupo.

Para $j=1$, la dimensión es $2j+1=3$, $\mathbf{J}^2=2\,\mathbf{1}_3$, y los generadores están dados por

$$J_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ J_+=\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix},\tag{6.25}$$

obteniéndose una ***representación equivalente a la adjunta***[12].

En el caso general, $J_3=\mathrm{diag}(j,j-1,...,-j+1,-j)$. Entonces, la matriz que corresponde al elemento $-\mathbf{1}_2\in SU(2)$ se expresa, por ejemplo, como

$$D(U(2\pi\hat{e}_3))=e^{\imath 2\pi J_3}=$$

$$=\mathrm{diag}\left(e^{\imath 2\pi j},e^{\imath 2\pi(j-1)},...,e^{\imath 2\pi(j-2j+1)},e^{\imath 2\pi(j-2j)}\right)=\tag{6.27}$$

$$=e^{\imath 2\pi j}\,\mathbf{1}_{2j+1}.$$

En esas condiciones (ver (2.22)), las representaciones unitarias irreducibles de $SU(2)$ son ***representaciones ordinarias*** de $SO(3)$ sólo si $e^{\imath 2\pi j}=1$, es decir, ***sólo si j es un entero***: $j=0,1,2,...$

Por lo tanto, ***las representaciones irreducibles del grupo*** $SO(3)$ ***son de dimensión impar***.

[12]En efecto,

$$J_3=A^{-1}\,X_3\,A\,,\quad \text{con } A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\imath&0&\imath\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.\tag{6.26}$$

Similarmente a lo que ocurre con el grupo de rotaciones, $SO(3)$, se puede demostrar que dos elementos de $SU(2)$, $U(\theta'\,\hat{n'})$ y $U(\theta\,\hat{n})$, son conjugados si y sólo si $\theta'=\theta$, cualesquiera que sean los vectores unitarios $\hat{n}$, $\hat{n}'\in\mathbb{R}^3$.

Los caracteres de la representación irreducible j (***caracteres simples***),

$$\chi^{(j)}(\theta)=\operatorname{tr}\left\{D^{(j)}(U(\theta\,\hat{n}))\right\}, \tag{6.28}$$

son una propiedad de cada clase de elementos conjugados en el grupo, de modo que pueden ser calculados tomando $\hat{n}$ en la dirección más conveniente. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\chi^{(j)}(\theta)&=\operatorname{tr}\left\{e^{\imath\theta J_3}\right\}=\textstyle\sum_{m=-j}^{j}e^{\imath m\theta}=e^{-\imath j\theta}\sum_{m=0}^{2j}e^{\imath m\theta}\\ &=e^{-\imath j\theta}\left(\frac{1-e^{\imath(2j+1)\theta}}{1-e^{\imath\theta}}\right)=\frac{\sin[(j+1/2)\theta]}{\sin[\theta/2]}.\end{aligned} \tag{6.29}$$

Recurriendo a la medida de integración invariante antes calculada se puede verificar la ***ortogonalidad de los vectores de caracteres***,

$$\begin{gathered}\frac{1}{V[SU(2)]}\int d\mu_{SU(2)}\,\left(\chi^{(j')}(\theta)\right)^*\chi^{(j)}(\theta)=\\ \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{2\pi}4\sin^2[\theta/2]\,d\theta\,d\Omega_2\,\frac{\sin[(j'+1/2)\theta]\sin[(j+1/2)\theta]}{\sin^2[\theta/2]}=\\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{1}{2}\left\{\cos[(j'-j)\theta]-\cos[(j'+j)\theta]\right\}=\delta_{j',j}.\end{gathered} \tag{6.30}$$

7. Producto directo de representaciones. Descomposición de Clebsh - Gordan

Tomando el producto directo de dos representaciones unitarias irreducibles de $SU(2)$, $D^{(j_1)}$ y $D^{(j_2)}$, se obtiene una nueva representación, que puede a su vez descomponerse como suma directa de representaciones irreducibles,

$$D^{(j_1\otimes j_2)}:=D^{(j_1)}\otimes D^{(j_2)}=\bigoplus_j a_j\,D^{(j)}, \tag{7.1}$$

donde $a_j\in\mathbb{Z}_+$.

Por otra parte, los caracteres de la representación producto directo, $\chi^{(j_1 \otimes j_2)}(\theta)$, son el producto de los caracteres simples $\chi^{(j_1)}(\theta)$ y $\chi^{(j_2)}(\theta)$,

$$\begin{aligned}\chi^{(j_1 \otimes j_2)}(\theta) = \chi^{(j_1)}(\theta)\chi^{(j_2)}(\theta) = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} e^{\imath m_1 \theta} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{\imath m_2 \theta} = \\ = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^{j} e^{\imath m \theta} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \chi^{(j)}(\theta).\end{aligned} \tag{7.2}$$

Es decir, $a_j = 1$ para $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$, y $a_j = 0$ en todo otro caso[13].

El espacio de la representación $D^{(j_1 \otimes j_2)}$ está generado por los vectores

$$|j_1\ j_2\ m_1\ m_2\rangle := |j_1\ m_1\rangle \otimes |j_2\ m_2\rangle\,, \tag{7.4}$$

pero los subespacios invariantes correspondientes a las representaciones irreducibles que contiene están generados por las combinaciones

$$|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1\ j_2\ m_1\ m_2\rangle\, \langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2 | j_1\ j_2;\ j\ m\rangle\,, \tag{7.5}$$

donde los coeficientes de la transformación, $\langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2 | j_1\ j_2;\ j\ m\rangle$, son llamados **coeficientes de Clebsh - Gordan** (cuando los distintos vectores están todos normalizados a 1 y de modo tal que los coeficientes sean reales).

[13] Este resultado puede obtenerse reordenando las sumas en (7.2), o bien empleando la ortogonalidad de caracteres, ecuación (6.30),

$$\begin{aligned}\frac{1}{V[SU(2)]} \int d\mu_{SU(2)} \left(\chi^{(j)}(\theta)\right)^* \chi^{(j_1 \otimes j_2)}(\theta) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta\ \frac{\sin[(j+1/2)\theta] \sin[(j_1+1/2)\theta] \sin[(j_2+1/2)\theta]}{\sin[\theta/2]} = \\ = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ para } |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \\ \\ 0, \text{ para } j < |j_1 - j_2| \text{ o } j > j_1 + j_2 \end{array} \right. .\end{aligned} \tag{7.3}$$

Referidas a esa base, las matrices de la representación $D^{(j_1\otimes j_2)}$ son llevadas a la forma diagonal en bloques

$$D^{(j_1\otimes j_2)} \rightharpoonup \begin{pmatrix} D^{(j_1+j_2)} & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & D^{(j_1+j_2-1)} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & D^{(|j_1-j_2|)} \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Nótese que

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1). \tag{7.7}$$

Si consideramos elementos cerca de la identidad del grupo,

$$\begin{aligned} D^{(j_1\otimes j_2)} &= \mathbf{1}^{(j_1\otimes j_2)} + \imath\alpha^k J_k^{(j_1\otimes j_2)} + \mathcal{O}(\alpha)^2 = \\ &= \left\{\mathbf{1}^{(j_1)} + \imath\alpha^k J_k^{(j_1)} + \mathcal{O}(\alpha)^2\right\} \otimes \left\{\mathbf{1}^{(j_2)} + \imath\alpha^k J_k^{(j_2)} + \mathcal{O}(\alpha)^2\right\} = \\ &= \mathbf{1}^{(j_1)} \otimes \mathbf{1}^{(j_2)} + \imath\alpha^k \left\{J_k^{(j_1)} \otimes \mathbf{1}^{(j_2)} + \mathbf{1}^{(j_1)} \otimes J_k^{(j_2)}\right\} + \mathcal{O}(\alpha)^2. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Pero también

$$\begin{aligned} D^{(j_1\otimes j_2)} &= \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \left\{\mathbf{1}^{(j)} + \imath\alpha^k J_k^{(j)} + \mathcal{O}(\alpha)^2\right\} = \\ &= \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathbf{1}^{(j)} + \imath\alpha^k \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} J_k^{(j)} + \mathcal{O}(\alpha)^2, \end{aligned} \tag{7.9}$$

de donde resulta que

$$\begin{aligned} J_k^{(j_1\otimes j_2)} &= J_k^{(j_1)} \otimes \mathbf{1}^{(j_2)} + \mathbf{1}^{(j_1)} \otimes J_k^{(j_2)} = \\ &= \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} J_k^{(j)}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

para $k = 1, 2, 3$.

Entonces, aplicado a los vectores de la base (7.5),

$$
\begin{aligned}
& J_k^{(j_1\otimes j_2)}\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
& = \left\{\bigoplus_{j'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} J_k^{(j')}\right\}|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = J_k^{(j)}\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
& = \left\{J_k^{(j_1)}\otimes \mathbf{1}^{(j_2)} + \mathbf{1}^{(j_1)}\otimes J_k^{(j_2)}\right\}|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
& = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle \\
& \times\left\{J_k^{(j_1)}\,|j_1\ m_1\rangle\otimes|j_2\ m_2\rangle + |j_1\ m_1\rangle\otimes J_k^{(j_2)}\,|j_2\ m_2\rangle\right\}.
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

En particular,

$$
\begin{aligned}
& J_3^{(j_1\otimes j_2)}\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
& = J_3^{(j)}\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = m\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
& = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle \\
& \times\left\{J_3^{(j_1)}\,|j_1\ m_1\rangle\otimes|j_2\ m_2\rangle + |j_1\ m_1\rangle\otimes J_3^{(j_2)}\,|j_2\ m_2\rangle\right\} = \\
& = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}(m_1+m_2)\,|j_1\ j_2\ m_1\ m_2\rangle\,\langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

y

$$J_-^{(j_1 \otimes j_2)} \left| j_1\ j_2;\ j\ m \right\rangle =$$

$$= J_-^{(j)} \left| j_1\ j_2;\ j\ m \right\rangle = \left[(j+m)(j-m+1) \right]^{1/2} \left| j_1\ j_2;\ j\ (m-1) \right\rangle =$$

$$= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left\langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2 | j_1\ j_2;\ j\ m \right\rangle$$

$$\times \left\{ J_-^{(j_1)} \left| j_1\ m_1 \right\rangle \otimes \left| j_2\ m_2 \right\rangle + \left| j_1\ m_1 \right\rangle \otimes J_-^{(j_2)} \left| j_2\ m_2 \right\rangle \right\} = \tag{7.13}$$

$$= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left\langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2 | j_1\ j_2;\ j\ m \right\rangle$$

$$\times \left\{ \left[(j_1+m_1)(j_1-m_1+1) \right]^{1/2} \left| j_1\ (m_1-1) \right\rangle \otimes \left| j_2\ m_2 \right\rangle \right.$$

$$\left. + \left[(j_2+m_2)(j_2-m_2+1) \right]^{1/2} \left| j_1\ m_1 \right\rangle \otimes \left| j_2\ (m_2-1) \right\rangle \right\}.$$

Consideremos el caso $j_1 = 1/2 = j_2$. De lo anterior sabemos que el producto directo de esas dos representaciones se descompone en la suma directa de las representaciones con $j = 0, 1$, y que los generadores pueden expresarse como

$$J_k^{(1/2 \otimes 1/2)} = J_k^{(1/2)} \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_2 \otimes J_k^{(1/2)} = J_k^{(1)} \oplus J_k^{(0)}. \tag{7.14}$$

Notemos que

$$J_3^{(1/2 \otimes 1/2)} \left| 1/2\ 1/2 \right\rangle \otimes \left| 1/2\ 1/2 \right\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left| 1/2\ 1/2 \right\rangle \otimes \left| 1/2\ 1/2 \right\rangle, \tag{7.15}$$

y que ése es el único vector del espacio de la representación $(1/2 \otimes 1/2)$ con autovalor $m = 1$, por lo que necesariamente

$$\left| 1/2\ 1/2;\ 1\ 1 \right\rangle = \left| 1/2\ 1/2 \right\rangle \otimes \left| 1/2\ 1/2 \right\rangle. \tag{7.16}$$

Por aplicación de $J_-^{(1/2 \otimes 1/2)}$ sobre ese vector se puede generar el resto de la base correspondiente a la representación irreducible $j = 1$:

$$J_-^{(1/2 \otimes 1/2)} \left| 1/2\ 1/2;\ 1\ 1 \right\rangle = \left[(1+1)(1-1+1) \right]^{1/2} \left| 1/2\ 1/2;\ 1\ 0 \right\rangle =$$

$$\left[(1/2+1/2)(1/2-1/2+1) \right]^{1/2} \left| 1/2\ (1/2-1) \right\rangle \otimes \left| 1/2\ 1/2 \right\rangle \tag{7.17}$$

$$+ \left[(1/2+1/2)(1/2-1/2+1) \right]^{1/2} \left| 1/2\ 1/2 \right\rangle \otimes \left| 1/2\ (1/2-1) \right\rangle,$$

es decir

$$
\begin{aligned}
&|1/2\ 1/2;\ 1\ 0\rangle = \\
(7.18)\qquad &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1/2\ \ -1/2)\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle + |1/2\ 1/2\rangle \otimes |1/2\ \ -1/2\rangle\right\}.
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
&J_-^{(1/2\otimes 1/2)}\,|1/2\ 1/2;\ 1\ 0\rangle = [(1+0)(1-0+1)]^{1/2}\,|1/2\ 1/2;\ 1\ \ -1\rangle = \\
(7.19)\qquad &\frac{2}{\sqrt{2}}\,[(1/2+1/2)(1/2-1/2+1)]^{1/2}\,|1/2\ \ -1/2\rangle \otimes |1/2\ \ -1/2\rangle\,,
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
(7.20)\qquad |1/2\ 1/2;\ 1\ \ -1\rangle = |1/2\ \ -1/2\rangle \otimes |1/2\ \ -1/2\rangle\,.
$$

Ahora bien, el vector que genera el espacio (unidimensional) de la representación irreducible $j = 0$ debe ser ortogonal a los anteriores, y corresponder al autovalor $m = 0$ de $J_3^{(1/2\otimes 1/2)}$, por lo que (una vez normalizado) necesariamente es

$$
\begin{aligned}
&|1/2\ 1/2;\ 0\ 0\rangle = \\
(7.21)\qquad &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1/2\ \ -1/2)\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle - |1/2\ 1/2\rangle \otimes |1/2\ \ -1/2\rangle\right\}.
\end{aligned}
$$

De las igualdades (7.16), (7.18), (7.20) y (7.21) resulta inmediato determinar los coeficientes de Clebsh - Gordan:

$$
(7.22)\qquad \begin{cases}
\langle 1/2\ 1/2\ 1/2\ 1/2|1/2\ 1/2;\ 1\ 1\rangle = 1, \\[2ex]
\langle 1/2\ 1/2\ (\pm 1/2)\ (\mp 1/2)|1/2\ 1/2;\ 1\ 0\rangle = 1/\sqrt{2}, \\[2ex]
\langle 1/2\ 1/2\ (-1/2)\ (-1/2)|1/2\ 1/2;\ 1\ (-1)\rangle = 1, \\[2ex]
\langle 1/2\ 1/2\ (\mp 1/2)\ (\pm 1/2)|1/2\ 1/2;\ 0\ 0\rangle = \pm 1/\sqrt{2},
\end{cases}
$$

con los demás coeficientes nulos.

El producto directo de las representaciones $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$ se descompone en la suma directa de las representaciones irreducibles $j = 3/2, 1/2$. Sus generadores pueden expresarse como

$$
(7.23)\qquad J_k^{(1\otimes 1/2)} = J_k^{(1)} \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_3 \otimes J_k^{(1/2)} = J_k^{(3/2)} \oplus J_k^{(1/2)}.
$$

El (único) vector correspondiente al máximo autovalor posible de $J_3^{(1\otimes 1/2)}$, $m = 3/2$, es

$$|1\ 1/2;\ 3/2\ 3/2\rangle = |1\ 1\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle\,, \tag{7.24}$$

y a partir de él, aplicacndo reiteradamente el operador $J_-^{(1\otimes 1/2)}$, se obtienen los demás vectores de la base del espacio de la representación $j = 3/2$:

$$\begin{gathered} |1\ 1/2;\ 3/2\ 1/2\rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{2}\,|1\ 0\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle + |1\ 1\rangle \otimes |1/2\ -1/2\rangle\right\}, \\ |1\ 1/2;\ 3/2\ -1/2\rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{2}\,|1\ 0\rangle \otimes |1/2\ -1/2\rangle + |1\ -1\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle\right\}, \\ |1\ 1/2;\ 3/2\ -3/2\rangle = |1\ -1\rangle \otimes |1/2\ -1/2\rangle\,. \end{gathered} \tag{7.25}$$

Ahora bien, existen en el espacio producto directo dos vectores linealmente independientes que corresponden al mismo autovalor $m = 1/2$ de $J_3^{(1\otimes 1/2)}$. Una combinación lineal particular de ellos da el vector $|1\ 1/2;\ 3/2\ 1/2\rangle$ de (7.25), mientras que una combinación ortogonal a ella debe ser proporcional al vector de máximo m $(= 1/2)$ de la representación $j = 1/2$,

$$\begin{gathered} |1\ 1/2;\ 1/2\ 1/2\rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|1\ 0\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle - \sqrt{2}\,|1\ 1\rangle \otimes |1/2\ -1/2\rangle\right\}. \end{gathered} \tag{7.26}$$

Por aplicación de $J_-^{(1\otimes 1/2)}$ se completa la base,

$$\begin{gathered} |1\ 1/2;\ 1/2\ -1/2\rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|1\ 0\rangle \otimes |1/2\ -1/2\rangle - \sqrt{2}\,|1\ -1\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle\right\}, \end{gathered} \tag{7.27}$$

y de (7.24), (7.25), (7.26) y (7.27) se determinan los coeficientes de Clebsh - Gordan para este producto directo de representaciones.

8. Clasificación de las álgebras de Lie simples

Un subespacio $\mathcal{F}$ del álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie G, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, constituye una **subálgebra de Lie** si $[Y_1, Y_2] \subset \mathcal{F}$ para todo $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$. Esta subálgebra corresponde a un subgrupo de Lie $H \subset G$.

El subgrupo H es ***invariante*** si además $[X, Y] \subset \mathcal{F}$ para todo $X \in \mathcal{G}$ y para todo $Y \in \mathcal{F}$. En ese caso se dice que el subespacio $\mathcal{F}$ es un **ideal**.

Un álgebra de Lie $\mathcal{G}$ se dice **simple** si tiene dimensión $\dim \mathcal{G} \geq 2$ y no contiene ideales propios (distintos de $\mathcal{G}$ y de $\{\mathbf{0}\}$)[14].

Un álgebra de Lie $\mathcal{G}$ se dice **semi-simple** si es la suma directa de álgebras de Lie simples[15].

E. Cartan ha dado una clasificación completa para las álgebras de Lie simples empleando las propiedades de su representación adjunta.

Definición 8.1. El **rango** $r < n$ de un álgebra de Lie semi-simple de dimensión n es el máximo número de vectores linealmente independientes de ese espacio que pueden ser seleccionados de modo que conmuten entre sí.

Un conjunto de tales vectores generan una ***subálgebra abeliana*** del álgebra de Lie, llamada **subálgebra de Cartan**,

$$[H_i, H_j] = 0\,, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \ldots, r\,. \tag{8.1}$$

En esas condiciones, Cartan ha demostrado que siempre es posible seleccionar un conjunto de $n - r$ combinaciones lineales (en general complejas) de generadores linealmente independientes de los anteriores, $E_{\bar{\alpha}}$, de modo que ellas resulten ser ***vectores propios simultáneos*** de las operaciones de conmutación con los H_i,

$$[H_i, E_{\bar{\alpha}}] = \alpha_i\, E_{\bar{\alpha}}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r\,, \tag{8.2}$$

correspondientes a autovalores no todos nulos. Además, siempre es posible elegir los generadores H_i de manera tal que los autovalores α_i sean reales.

De ese modo, el conjunto de los r autovalores α_i correspondientes al generador $E_{\bar{\alpha}}$ forman un vector de un espacio real r-dimensional, $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^r$, llamado **raíz**

[14] Un álgebra de Lie simple corresponde a un **grupo de Lie simple**, es decir, un grupo que no contiene subgrupos de Lie propios invariantes.

[15] Un álgebra de Lie semi-simple corresponde a un grupo de Lie que es producto directo de grupos de Lie simples. En particular, un grupo de Lie semi-simple no contiene subgrupos de Lie invariantes abelianos.

correspondiente a $E_{\bar{\alpha}}$. Similarmente, de (8.1) podemos decir que los generadores H_i corresponden a ***raíces nulas***.

Cartan ha demostrado que las raíces son ***no degeneradas***, a excepción de la raíz nula. Además, si $\bar{\alpha}$ es una raíz, entonces $-\bar{\alpha}$ también lo es.

Por otra parte, de la identidad de Jacobi resulta que

$$\begin{aligned} \left[H_i, \left[E_{\bar{\alpha}}, E_{\bar{\beta}}\right]\right] &= \left[E_{\bar{\alpha}}, \left[H_i, E_{\bar{\beta}}\right]\right] + \left[\left[H_i, E_{\bar{\alpha}}\right], E_{\bar{\beta}}\right] = \\ &= (\alpha_i + \beta_i) \left[E_{\bar{\alpha}}, E_{\bar{\beta}}\right] \ , \end{aligned} \tag{8.3}$$

de modo que pueden presentarse dos situaciones:

- Si $\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta}\right)$ es una raíz, entonces $\left[E_{\bar{\alpha}}, E_{\bar{\beta}}\right] \sim E_{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}$. En particular, para $\bar{\beta} = -\bar{\alpha}$ el conmutador $[E_{\bar{\alpha}}, E_{-\bar{\alpha}}]$ está contenido en la subálgebra de Cartan.
- Si $\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta}\right)$ no es una raíz, entonces $\left[E_{\bar{\alpha}}, E_{\bar{\beta}}\right] = \mathbf{0}$.

Para esta elección de generadores, las constantes de estructura satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} &{C_{ij}}^{k} = {C_{ij}}^{\bar{\alpha}} = {C_{i\bar{\alpha}}}^{j} = 0\,, \\ &{C_{i\bar{\alpha}}}^{\bar{\beta}} = \imath\, \alpha_i\, \delta_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}\,, \\ &\left(\bar{\alpha} + \bar{\beta}\right) {C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}^{i} = 0\,, \\ &\left(\bar{\gamma} - \bar{\alpha} - \bar{\beta}\right) {C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}^{\bar{\gamma}} = 0\,. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Se puede mostrar que las únicas componentes no nulas de la forma de Killing son $g_{(-\bar{\alpha})\bar{\alpha}} = g_{\bar{\alpha}(-\bar{\alpha})}$ y

$$g_{ij} = \sum_{\bar{\alpha}} \alpha_i \alpha_j \ \Rightarrow \ (g_{ij}) = \sum_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} \otimes \bar{\alpha}^t\,. \tag{8.5}$$

Normalizando adecuadamente los generadores podemos además fijar $g_{\bar{\alpha}(-\bar{\alpha})} = 1$.

Como el álgebra de Lie considerada es semi-simple, $\det\left(g_{\mu\nu}\right) \neq 0 \Rightarrow \det\left(g_{ij}\right) \neq 0$, de donde resulta que las raíces $\bar{\alpha}$ generan el espacio euclídeo $\mathbb{R}^r$ (Eligiendo convenientemente los generadores H_i podríamos hacer también $g_{ij} = \delta_{ij}$).

En esas condiciones, el álgebra de Lie semi-simple queda descrita por los conmutadores de los generadores de la **base estándar de Cartan**,

$$\left\{ \begin{array}{l} [H_i, H_j] = 0 \,, \quad i,j = 1,2,\ldots,r \,, \\ \\ [H_i, E_{\bar\alpha}] = \alpha_i \, E_{\bar\alpha} \,, \quad i = 1,2,\ldots,r \,, \forall\, \bar\alpha \,, \\ \\ [E_{\bar\alpha}, E_{-\bar\alpha}] = \alpha^i \, H_i \,, \quad \forall\, \bar\alpha \,, \\ \\ \left[E_{\bar\alpha}, E_{\bar\beta}\right] = N_{\bar\alpha\bar\beta} \, E_{\bar\alpha+\bar\beta} \,, \quad \bar\alpha + \bar\beta \neq \mathbf{0} \,, \end{array} \right. \tag{8.6}$$

donde $\alpha^i = g^{ij}\alpha_j$, y $N_{\bar\alpha\bar\beta} = 0$ si $\bar\alpha + \bar\beta$ no es una raíz.

Es posible demostrar que las raíces $\bar\alpha$ de un ***álgebra de Lie simple*** pueden ser obtenidas a partir de un conjunto de r **raíces simples** (linealmente independientes) por aplicación de un grupo de orden finito de transformaciones discretas llamado **grupo de Weyl** del álgebra.

Por su parte, esas raíces simples satisfacen un conjunto de restricciones que hacen que sólo puedan tener dos longitudes distintas y formar entre sí ciertos ángulos particulares. De acuerdo a esas características es posible clasificar las álgebras simples en cuatro series infinitas, correspondientes a los grupos $SU(r+1)$, con $r \geq 1$, $SO(2r+1)$, con $r \geq 2$, $Sp(2r)$, con $r \geq 3$, y $SO(2r)$, con $r \geq 4$, y en cinco **álgebras excepcionales** no incluidas en las anteriores series, llamadas F_4, G_2, E_6, E_7, E_8, donde el subíndice indica el rango. Para más detalles, ver la bibliografía sugerida.

Bibliografía:

- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires.*
- R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications.*