CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

ANÁLISIS FUNCIONAL

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

NOTAS SOBRE LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER EN $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$

1. Espacios $\mathbf{L_p}$

El conjunto de funciones

$$\mathbf{L_p}(a,b) := \left\{ \varphi(x) : \int_a^b |\varphi(x)|^p < \infty \right\} , \tag{1.1}$$

para $p \geq 1$, constituye un espacio normado (de Banach) respecto de la norma

$$||\varphi(x)||_p := \left\{ \int_a^b |\varphi(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} , \tag{1.2}$$

que a su vez determina la distancia

$$\rho(\varphi, \psi) := ||\varphi - \psi||_p \, . \tag{1.3}$$

Desde luego que estas definiciones requieren la identificación de aquellas funciones que coinciden en casi todo punto con un mismo vector del espacio.

El teorema de Riesz y Fischer establece que $\mathbf{L_p}(a,b)$ es un espacio completo respecto de esa distancia.

Actualizado el 1 de octubre de 2005.

2. Transformación de Fourier en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$

Dada una función $\varphi \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, se define su **transformada de Fourier** como

$$\mathcal{F}[\varphi](\sigma) = \psi(\sigma) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}\, \varphi(x)\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{2.1}$$

que es una función acotada, continua y que tiende a 0 cuando $|\sigma| \to \infty$ (Lema de Riemann - Lebesgue).

En efecto:

- Para todo $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$|\psi(\sigma)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, ||\varphi||_1\,, \tag{2.2}$$

  de modo que la integral en (2.1) converge absoluta y uniformemente en σ.
- Si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ (es decir, si $||\varphi_n - \varphi||_1 \to 0$ para $n \to \infty$), entonces sus transformadas de Fourier satisfacen

$$|\psi_n(\sigma) - \psi(\sigma)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, ||\varphi_n - \varphi||_1 \to 0 \tag{2.3}$$

  para $n \to \infty$ y $\forall \sigma \in \mathbb{R}$. En consecuencia, la sucesión de transformadas de Fourier converge uniformemente en toda la recta a la transformada de Fourier de la función límite.
- Sea $\chi_{[a,b]}(x) \in \mathbf{L}_1(a,b)$ la **función característica** del intervalo $[a,b]$,

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, \ \text{para } -\infty < a \leq x \leq b < \infty, \\ 0, \ \text{en todo otro caso.} \end{cases} \tag{2.4}$$

  Su transformada de Fourier es

$$\psi(\sigma) = \int_a^b e^{-i\sigma x}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{i}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\sigma b} - e^{-i\sigma a} \right)\,, \tag{2.5}$$

  que es continua en toda la recta y tiende a 0 para $|\sigma| \to \infty$. Lo mismo vale para la transformada de Fourier de toda función escalonada en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ (combinación lineal de un número finito de funciones características).
- Puede demostrarse que el conjunto de las funciones escalonadas absolutamente integrables en la recta es denso en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, de modo que toda función $\varphi(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ es el límite de una secuencia de funciones escalonadas. En consecuencia, su transformada de Fourier es el límite de una secuencia uniformemente convergente de funciones continuas que tienden a 0 en el infinito.

  Por lo tanto, la transformada de Fourier de toda función en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ es continua y tiende a 0 para $\sigma \to \pm\infty$.

También puede demostrarse que si la transformada de Fourier $\psi(\sigma)$ de una función $\varphi(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ es nula para todo σ, $\psi(\sigma) \equiv 0$, entonces $\varphi(x) = 0$ en casi todo punto.

Esto hace que la transformación de Fourier sea unívoca. En efecto, si $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ tienen la misma transformada de Fourier $\psi(\sigma)$, entonces, por ser $\mathcal{F}$ lineal, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ en casi todo punto.

Así definida, la transformación de Fourier es una aplicación lineal de $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ en el espacio de las funciones continuas que se anulan en el infinito. Pero no toda función con esas características es la transformada de Fourier de una función en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ (es decir, $\mathcal{F}$ no es sobreyectiva en ese espacio).

La **transformación de Fourier inversa** corresponde a

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \varphi(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{i\sigma x}\, \psi(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{2.6}$$

definición que sólo vale bajo ciertas condiciones de regularidad sobre $\varphi(x)$.

Como la integral que define $\psi(\sigma)$ en (2.1) converge absoluta y uniformemente en σ, el teorema de Fubini permite escribir

$$\begin{aligned}\varphi_N(x) := \int_{-N}^{N} e^{i\sigma x}\, \psi(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-N}^{N} e^{i\sigma(x-y)}\, d\sigma \right\} \varphi(y)\, \frac{dy}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Nt)}{t}\, \varphi(x+t)\, dt = \\ &= \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Nt)}{t}\, [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\, dt\,,\end{aligned} \tag{2.7}$$

dado que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Nt)}{t}\, dt = 1\,. \tag{2.8}$$

La última integral en (2.7) puede escribirse como la suma $(A+B)$, donde

$$\begin{aligned} A &= \int_{|t|\leq T} \frac{\sin(N\,t)}{t}\, [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\, dt\,, \\ B &= \int_{|t|\geq T} \frac{\sin(Nt)}{t}\, \varphi(x+t)\, dt - \varphi(x) \int_{|t|\geq T} \frac{\sin(Nt)}{t}\, dt\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Es evidente que, para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|B| \leq \left| \int_{|t|\geq T} \frac{\sin(Nt)}{t}\, \varphi(x+t)\, dt \right| + \left| \varphi(x) \int_{|t|\geq T} \frac{\sin(Nt)}{t}\, dt \right| \tag{2.10}$$

resulta tan pequeño como se quiera con sólo tomar T suficientemente grande (dado que ambas integrales son convergentes sobre toda la recta), y eso $\forall\, N > N_0$ arbitrario.

Por su parte, $A \to 0$ cuando $N \to \infty$ si, por ejemplo, la función $\varphi(x)$ satisface la condición de Dini[1]:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\varphi(x+t) - \varphi(x)|}{|t|}\, dt < \infty\,, \tag{2.13}$$

para un $\delta > 0$. Esta condición es satisfecha, en particular, por las funciones diferenciables (en virtud del teorema del valor medio).

En esas condiciones, $\lim_{N\to\infty} \varphi_N(x) = \varphi(x)$ en casi todo punto.

3. Subespacios densos en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$

No toda función de $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ tiene una transformada de Fourier en el sentido antes descrito, ya que no toda función de ese espacio es absolutamente integrable en la recta. Por ejemplo, si

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,, \tag{3.1}$$

entonces $\varphi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ pero $\varphi \notin \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$.

---

[1] En efecto, si $f(t)$ es sumable en un intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\, \sin(Nt)\, dt \to 0$ cuando $N \to \infty$.

Para demostrarlo, consideremos primero la función característica de un intervalo $[c,d] \subset [a,b]$, que es una función sumable. Tenemos que

$$\int_a^b \chi_{[c,d]}(t)\, \sin(Nt)\, dt = \frac{\cos(Nd) - \cos(Nc)}{N} \to 0 \quad \text{cuando } N \to \infty\,. \tag{2.11}$$

Lo mismo vale para cualquier función escalonada $h(t) \in \mathbf{L}_1(a,b)$, por ser una combinación lineal de un número finito de funciones características.

Finalmente, si $f(t) \in \mathbf{L}_1(a,b)$, teniendo en cuenta que el conjunto de las escalonadas es denso en $\mathbf{L}_1(a,b)$, sabemos que $\forall\, \varepsilon > 0$ existe una función escalonada $h(t) \in \mathbf{L}_1(a,b)$ tal que $||f(t) - h(t)||_1 < \varepsilon/2$. Entonces,

$$\left| \int_a^b f(t)\, \sin(Nt)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - h(t)|\, dt + \left| \int_a^b h(t)\, \sin(Nt)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{2.12}$$

si N es suficientemente grande.

Pero sí es cierto que toda función de soporte compacto y cuadrado sumable tiene una transformada de Fourier en el sentido usual.

En efecto, si $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(a,b)$, con $-\infty < a < b < \infty$, y $\varphi(x) = 0\,, \forall\, x \notin [a,b]$, teniendo en cuenta que la función característica $\chi_{[a,b]}(x) \in \mathbf{L_2}(a,b)$, podemos escribir que

$$(3.2) \qquad ||\varphi||_1 = (\chi_{[a,b]}(x), |\varphi(x)|) \leq ||\chi_{[a,b]}(x)||_2\, ||\varphi(x)||_2 = \sqrt{b-a}\; ||\varphi(x)||_2\,,$$

en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

De hecho, las funciones de soporte compacto y cuadrado sumable forman un conjunto denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

En efecto, dada $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ definimos

$$(3.3) \qquad \varphi_N(x) := \begin{cases} \varphi(x), \ |x| \leq N\,, \\ \\ 0, \ |x| > N\,. \end{cases}$$

Evidentemente, $\varphi_N(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, $||\varphi_N||_2 \leq ||\varphi||_2$, y $||\varphi_N||_2 \to ||\varphi||_2$ cuando $N \to \infty$.

Además, $\varphi_N \to \varphi$ en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, ya que

$$(3.4) \qquad {||\varphi_N - \varphi||_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x) - \varphi(x)|^2\, dx = {||\varphi||_2}^2 - {||\varphi_N||_2}^2 \to 0\,.$$

Recordemos que el espacio formado por los polinomios de todo grado es un conjunto denso en $\mathbf{L_2}(-N,N)$.

Consideremos la función definida por

$$(3.5) \qquad \phi_\epsilon(x) := \begin{cases} e^{\left(\dfrac{-\epsilon}{N^2 - x^2}\right)}, \ |x| < N\,, \\ \\ 0, \ |x| \geq N\,, \end{cases}$$

con $\epsilon > 0$. Esta función es de soporte compacto (contenido en $[-N,N]$) y tiene derivadas continuas de todo orden: $\phi_\epsilon(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Además, toma valores entre 0 y 1 ($0 \leq \phi_\epsilon(x) < 1$) y converge uniformemente a 1 cuando $\epsilon \to 0$ en todo intervalo cerrado de la forma $[-N+\delta, N-\delta]$, con $\delta > 0$.

Sea $P(x)$ un polinomio y $M = \max\{|P(x)|\}$ para $-N \leq x \leq N$. Llamemos $P_\epsilon(x) = P(x)\phi_\epsilon(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. La distancia entre esas dos funciones de $\mathbf{L_2}(-N,N)$

es

$$||P(x) - P_\epsilon(x)||_2{}^2 = \int_{-N}^{N} |P(x) - P_\epsilon(x)|^2 \, dx \leq$$
(3.6)
$$\leq M^2 \left\{ \int_{-N}^{-N+\delta} 1 \, dx + \int_{-N+\delta}^{N-\delta} |1 - \phi_\epsilon(x)|^2 \, dx + \int_{N-\delta}^{N} 1 \, dx \right\},$$

que puede hacerse tan pequeña como se quiera con sólo tomar δ y ϵ suficientemente pequeños.

Por lo tanto, es posible encontrar en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ funciones tan próximas como se quiera a una dada función de soporte compacto y cuadrado sumable. Dado que éstas forman un conjunto denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, resulta que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

4. El espacio de Schwartz

El espacio de Schwartz $\mathcal{S}$ es el conjunto de las funciones con derivadas de todo orden continuas y de decrecimiento rápido (es decir, que se anulan en el infinito más rápido que cualquier potencia de x^{-1}),

$$\varphi(x) \in \mathcal{S} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,, \\ \\ \left| x^k \varphi^{(q)}(x) \right| \leq K_{k,q}[\varphi] \,, \quad \forall\, k, q \,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Nótese que, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, resulta de (4.1) que $x\,\varphi(x) \in \mathcal{S}$ y $\varphi'(x) \in \mathcal{S}$. Entonces, $\forall k, q$, $x^k \varphi^{(q)}(x) \in \mathcal{S}$.

Evidentemente, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$ y, en consecuencia, $\mathcal{S}$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

Además, $\mathcal{S} \subset \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, de modo que toda función en $\mathcal{S}$ tiene una transformada de Fourier en el sentido usual,

$$\mathcal{F}[\varphi](\sigma) = \psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \, \varphi(x) \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \,, \tag{4.2}$$

que es continua y tiende a 0 en el infinito.

Por otra parte, las funciones $x^k \varphi(x) \in \mathcal{S}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \, (-i\,x)^k \varphi(x) \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.3}$$

convergen absoluta y uniformemente en toda la recta $\sigma \in \mathbb{R}$, correspondiendo en consecuencia a las derivadas k-ésimas de $\psi(\sigma)$, $\psi^{(k)}(\sigma)$. En efecto, tenemos por ejemplo que

$$\left| x^{k+2} \varphi(x) \right| \leq K_{k+2,0} \Rightarrow \left| x^k \varphi(x) \right| \leq \frac{K_{k+2,0}}{x^2} \,. \tag{4.4}$$

Pero entonces $\psi^{(k)}(\sigma)$ es la transformada de Fourier de una función en $\mathcal{S}$, de donde resulta que es continua y tiende a 0 en el infinito.

En consecuencia, $\psi(\sigma)$ tiene derivadas de todo orden continuas, $\psi(\sigma) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Como las funciones $(-i\,x)^k\varphi(x) \in \mathcal{S}$, podemos integrar por partes para escribir

$$
\begin{aligned}
(i\,\sigma)^q\,\psi^{(k)}(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{-d}{dx}\right)^q e^{-i\sigma x}\right] (-i\,x)^k\varphi(x)\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}\,\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^q (-i\,x)^k\varphi(x)\right]\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Y como $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^q (-i\,x)^k\varphi(x)\right] \in \mathcal{S} \subset \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, resulta que su transformada de Fourier está acotada,

$$
\left|\sigma^q\,\psi^{(k)}(\sigma)\right| \leq K_{q,k}[\psi]\,, \tag{4.6}
$$

lo que es válido $\forall\, q, k \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, las derivadas de todo orden de $\psi(\sigma)$ son de decrecimiento rápido.

En conclusión, la transformación de Fourier es una aplicación de $\mathcal{S}$ en ese mismo espacio, $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Como las funciones en $\mathcal{S}$ son diferenciables y de decrecimiento rápido, satisfacen la condición de Dini y para ellas existe el límite doble en la expresión que define la transformada inversa (2.6),

$$
\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\,\psi(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi}}\,. \tag{4.7}
$$

La ecuación anterior sólo difiere de la definición de la transformación directa en el signo del argumento de la exponencial. En consecuencia, similares conclusiones se obtienen respecto de la transformación inversa, que también está definida sobre todo $\mathcal{S}$.

Finalmente, sean $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{S} \subset \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Su producto escalar es

$$
\begin{aligned}
(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)^* \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\,\psi_2(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right\}\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}\varphi_1(x)\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\right\}^* \psi_2(\sigma)\,d\sigma = (\psi_1(x), \psi_2(x))\,,
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

donde el cambio en el orden de integración está justificado por el teorema de Fubini, puesto que la integral doble converge absolutamente ya que ambas funciones están en $\mathcal{S} \subset \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$.

En consecuencia, la transformación de Fourier sobre $\mathcal{S}$ preserva los productos escalares. En particular, tomando ambas funciones iguales en la ecuación anterior, se tiene que $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{S}$

$$||\varphi(x)||_2 = ||\psi(x)||_2 \,, \tag{4.9}$$

es decir, la transformación de Fourier sobre $\mathcal{S}$ preserva la norma $||.||_2$.

Puesto que $\mathcal{F}$ es un operador acotado sobre $\mathcal{S}$, resulta continuo. En efecto, si $\varphi_N \to \varphi$ en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, con $\varphi_N, \varphi \in \mathcal{S}$, entonces sus transformadas de Fourier satisfacen

$$||\psi_N - \psi||_2 = ||\varphi_N - \varphi||_2 \to 0, \text{ para } N \to \infty \,. \tag{4.10}$$

Supongamos que $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{S}$ tienen la misma transformada de Fourier, $\mathcal{F}[\varphi_1](\sigma) = \mathcal{F}[\varphi_2](\sigma)$. Como la transformación es lineal, en virtud de (4.9) tenemos

$$\mathcal{F}[\varphi_1 - \varphi_2](\sigma) \equiv 0 \;\Rightarrow\; ||\varphi_1 - \varphi_2||_2 = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \,. \tag{4.11}$$

En consecuencia, $\mathcal{F}$ es una aplicación biunívoca de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$, cuya inversa es la transformación inversa (4.7).

Aunque $\mathcal{F}$ no es completamente continuo[2], tiene un conjunto completo de autofunciones en $\mathcal{S}$. Esto es así porque tiene los mismos autovectores que el operador de Sturm - Liouville no singular definido sobre $\mathcal{S}$ (denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$) como

$$L\varphi(x) := \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right\} \varphi(x) \,. \tag{4.13}$$

Los autovectores de L son las funciones de Hermite,

$$\begin{gathered} \varphi_n(x) = H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \,, \\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \,, \end{gathered} \tag{4.14}$$

[2]En efecto, supongamos que $\{\varphi_k \,, k \in \mathbb{N}\}$ es una secuencia de vectores ortonormales contenida en $\mathcal{S}$. Entonces, de 4.9 resulta que

$$||\psi_n - \psi_m||_2{}^2 = ||\varphi_n - \varphi_m||_2{}^2 = 2 \,, \qquad \text{para } n \neq m \,, \tag{4.12}$$

de modo que el conjunto de sus transformadas de Fourier, $\{\psi_k \,, k \in \mathbb{N}\}$, no contiene ninguna secuencia fundamental.

que forman un sistema ortogonal y completo, y satisfacen la ecuación

$$L\varphi_n(x) = -\varphi_n''(x) + x^2\,\varphi_n(x) = (2n+1)\varphi_n(x)\,, \tag{4.15}$$

donde los autovalores $(2n+1)$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$, son no degenerados.

En efecto, aplicando $\mathcal{F}$ a ambos miembros de la ecuación anterior, y teniendo en cuenta que integrando por partes resulta que $\mathcal{F}[\varphi^{(2)}(x)](\sigma) = -\sigma^2\psi(\sigma)$ y $\mathcal{F}[x^2\varphi(x)](\sigma) = -\psi^{(2)}(\sigma)$, tenemos

$$\sigma^2\,\psi_n(\sigma) - \psi_n''(\sigma) = (2n+1)\psi_n(\sigma)\,. \tag{4.16}$$

Esto significa que $\mathcal{F}$ deja invariantes los subespacios característicos del operador L. Y como éstos son unidimensionales, resulta que $\varphi_n(x)$ es un autovector de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}[\varphi_n(x)](\sigma) = \mu_n\,\varphi_n(\sigma)$.

Por otra parte, como $\mathcal{F}^2[\varphi(x)] = \varphi(-x)$, se tiene que $\mathcal{F}^4 = I$. En consecuencia, los autovalores de $\mathcal{F}$ son raíces cuartas de la unidad, $\mu_n^4 = 1$.

5. Teorema de Plancherel

Consideremos primero una función $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ de soporte compacto $[a, b]$. Como $\varphi(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, tiene una transformada de Fourier en el sentido usual, que es una función continua y que tiende a 0 cuando $|\sigma| \to \infty$.

La función $\varphi(x)$ puede ser aproximada (en media) por una secuencia de funciones $\varphi_n(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, con soporte también contenido en el intervalo $[a, b]$:

$$\varphi_n \to \varphi \text{ en } \mathbf{L_2}(a, b)\,,\ \text{ con } \varphi_n(x) = 0 \text{ para } x \notin (a, b)\,. \tag{5.1}$$

En esas condiciones, $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathbf{L_1}(a, b)$, puesto que

$$||\varphi_n - \varphi||_1 \leq \sqrt{b-a}\ ||\varphi_n - \varphi||_2 \to 0 \text{ para } n \to \infty\,. \tag{5.2}$$

Por lo tanto, (como esas funciones son nulas fuera del intervalo $[a, b]$) se tiene que $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ y, en consecuencia, sus transformadas de Fourier convergen uniformemente en toda la recta a la transformada del límite:

$$\psi_n(\sigma) \to \psi(\sigma) = \mathcal{F}[\varphi](\sigma),\ \text{ uniformemente en } \mathbb{R}\,. \tag{5.3}$$

Esto garantiza también la convergencia en media de $\psi_n(\sigma) \to \psi(\sigma)$ en todo compacto sobre la recta σ.

Por otra parte, como $\varphi_n(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$, entonces $\psi_n(\sigma) \in \mathcal{S}$ y se cumple que $\forall\, n, m$ es

$$||\psi_n||_2 = ||\varphi_n||_2,\ \text{ y } ||\psi_n - \psi_m||_2 = ||\varphi_n - \varphi_m||_2\,. \tag{5.4}$$

En consecuencia, las transformadas $\{\psi_n\}$ también forman una secuencia fundamental en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Como este espacio es completo, existe una función $\overline{\psi}(\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ que es el límite de esa secuencia, $\overline{\psi} = \lim_{n\to\infty} \psi_n$, y que (por la continuidad de la norma) satisface

$$||\overline{\psi}||_2 = \lim_{n\to\infty} ||\psi_n||_2 = \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_2 = ||\varphi||_2 \,. \tag{5.5}$$

Ahora bien, como la convergencia en media en toda la recta implica convergencia en media en todo compacto, y como el límite en media es único, la función $\overline{\psi}(\sigma)$ debe coincidir en todo compacto (salvo medida nula) con la transformada de Fourier de $\varphi(x)$ como función de $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, $\psi(\sigma)$, que es una función continua que tiende a 0 en el infinito. Por otra parte, como $\overline{\psi}(\sigma)$ es de cuadrado sumable, también debe tender a 0 en el infinito, por lo que $\overline{\psi}(\sigma)$ y $\psi(\sigma)$ coinciden en toda la recta.

En resumen, si $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ es de soporte compacto, su transformada de Fourier como función de $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ es una función de cuadrado sumable en toda la recta, $\mathcal{F}[\varphi](\sigma) = \psi(\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, cuya norma es $||\psi||_2 = ||\varphi||_2$.

Consideremos ahora el caso de una función arbitraria $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Ella puede ser representada como el límite (en media) de una secuencia convergente de funciones de soporte compacto $\varphi_N(x)$, como las definidas en (3.3).

Por el resultado anterior, sus transformadas de Fourier $\mathcal{F}[\varphi_N] = \psi_N \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, y sus normas son tales que $||\psi_N||_2 = ||\varphi_N||_2$. Por otra parte, ellas forman una secuencia fundamental en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, dado que

$$||\psi_{N+M} - \psi_N||_2 = ||\varphi_{N+M} - \varphi_N||_2 \to 0, \text{ para } N \to \infty, \ \forall\, M \,, \tag{5.6}$$

como consecuencia de la linealidad de $\mathcal{F}$ y de que la diferencia $(\varphi_{N+M} - \varphi_N)$ es de soporte compacto.

En esas condiciones, existe una función $\psi(\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ que es el límite de esa secuencia,

$$\psi(\sigma) := \lim_{N\to\infty} \psi_N(\sigma) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{-i\sigma x}\varphi(x)\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \,, \tag{5.7}$$

a la que se **define** como la transformada de Fourier de $\varphi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Por la continuidad de la norma, también se cumple que

$$||\psi||_2 = \lim_{N\to\infty} ||\psi_N||_2 = \lim_{N\to\infty} ||\varphi_N||_2 = ||\varphi||_2 \,. \tag{5.8}$$

Si además la función $\varphi(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, ella tiene una transformada de Fourier en el sentido usual, $\tilde{\psi}(\sigma)$, que es continua y tiende a 0 en el infinito. Por construcción (ver ecuación (3.3)), $\varphi_N(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})\ \forall\, N$, su norma $||\varphi_N||_1 \to ||\varphi||_1$, y se tiene que

$$(5.9) \qquad ||\varphi_N - \varphi||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x) - \varphi(x)|\, dx = ||\varphi||_1 - ||\varphi_N||_1 \to 0\,.$$

Entonces, $\varphi_N \to \varphi$ en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ y, por lo tanto, sus transformadas convergen uniformemente en toda la recta a la transformada del límite, $\psi_N(\sigma) \to \tilde{\psi}(\sigma)$. Pero ese límite uniforme coincide con el límite en media, $\psi(\sigma)$, en todo compacto sobre $\mathbb{R}$, resultando éste una función continua. Y como tanto $\psi(\sigma)$ como $\tilde{\psi}(\sigma)$ tienden a cero para $|\sigma| \to \infty$, ambas coinciden como elementos de $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

En resumen, si $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, existe en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ el límite

$$(5.10) \qquad \mathcal{F}[\varphi(x)](\sigma) := \psi(\sigma) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{-i\sigma x} \varphi(x)\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

que, por definición, es la transformada de Fourier de $\varphi(x)$. Así definido, $\mathcal{F} : \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \to \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ es un operador acotado que preserva la norma, $||\psi||_2 = ||\varphi||_2$.

Si además $\varphi(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, entonces existe el límite doble en la integral del segundo miembro de (5.10), que naturalmente coincide con la definición de la trasformada de Fourier en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$.

Un razonamiento similar al que conduce a la ecuación (4.11) muestra que esta aplicación es unívoca. En efecto, supongamos que $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ tienen la misma transformada de Fourier, entonces

$$(5.11) \qquad \mathcal{F}[\varphi_1 - \varphi_2](\sigma) = 0\,,\ a.e.\ \Rightarrow\ ||\varphi_1 - \varphi_2||_2 = 0\ \Rightarrow\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\,,\ a.e.$$

Consideremos un par de funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Entonces, $\forall\, \alpha \in C$ se tiene

$$(5.12) \qquad \begin{array}{c} ||\varphi_1 + \alpha\, \varphi_2||_2{}^2 = ||\psi_1 + \alpha\, \psi_2||_2{}^2\ \Rightarrow \\[1ex] \Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2) = (\mathcal{F}\, \varphi_1, \mathcal{F}\, \varphi_2) = \left(\varphi_1, \mathcal{F}^\dagger \mathcal{F}\, \varphi_2\right)\,. \end{array}$$

En consecuencia, $\mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} = I$, donde el operador adjunto $\mathcal{F}^\dagger$ está definido en todo $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ (por ser $\mathcal{F}$ acotado).

Por otra parte, el rango de $\mathcal{F}$ es todo el espacio de Hilbert, $\mathrm{Rank}(\mathcal{F}) = \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. En efecto, dada una función arbitraria $\psi(\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, ella puede ser representada como $\psi(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\sigma)$, con $\psi_n \in \mathcal{S},\ \forall\, n$. Teniendo en cuenta que (por (4.9)) la secuencia $\varphi_n = \mathcal{F}^{-1}[\psi_n] \in \mathcal{S}$ es fundamental, vemos que existe $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

Ahora bien, esta función $\varphi(x)$ tiene una transformada de Fourier que satisface

$$||\mathcal{F}[\varphi] - \psi_n||_2 = ||\varphi - \varphi_n||_2 \ \rightarrow \ 0 \tag{5.13}$$

cuando $n \to \infty$, de modo que

$$\mathcal{F}[\varphi] = \lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi\,. \tag{5.14}$$

Por lo tanto, $\psi \in \mathrm{Rank}(\mathcal{F})$.

En esas condiciones, para todo par de funciones $\psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ tenemos

$$\big(\psi_1, \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger\, \psi_2\big) = \big(\mathcal{F}\,\varphi_1, \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger\mathcal{F}\,\varphi_2\big) = (\mathcal{F}\,\varphi_1, \mathcal{F}\,\varphi_2) = (\psi_1, \psi_2) \tag{5.15}$$

y, en consecuencia, $\mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger = I$.

En conclusión, existe la inversa de $\mathcal{F}$, operador que está definido sobre todo $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ y coincide con el operador adjunto, $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^\dagger$.

6. Sistemas completos en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$

Sea $\varphi_0(x) \in \mathbf{L_2}(a,b)$, con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, tal que $\varphi_0(x) \neq 0$ a.e. y

$$|\varphi_0(x)| \leq K\, e^{-A|x|}, \ \forall\, x\,, \tag{6.1}$$

con $A > 0$. Entonces, el sistema de funciones

$$\varphi_n(x) = x^n \varphi_0(x), \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.2}$$

es completo en $\mathbf{L_2}(a,b)$.

Para ver que esto es así tengamos en cuenta que, para $\tau \in \mathbb{R}$, de (6.1) resulta

$$|x^n e^{\tau x} \varphi_0(x)| \leq K\, |x|^n\, e^{-(A-|\tau|)|x|}\,, \tag{6.3}$$

de modo que la función

$$x^n e^{\tau x} \varphi_0(x) \in \mathbf{L_2}(a,b), \ \forall\, \tau : |\tau| < A\,. \tag{6.4}$$

Entonces, $\forall\, f \in \mathbf{L_2}(a,b)$, la función

$$h(x) := f(x)^* x^n e^{\tau x} \varphi_0(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})\,, \ \forall\, \tau : |\tau| < A\,, \tag{6.5}$$

donde $f(x)$ y $\varphi_0(x)$ son entendidas como nulas fuera del intervalo $[a,b]$, en caso de que éste no fuese acotado.

La transformada de Fourier de $h(x)$ es una función continua de la variable compleja $s = \sigma + i\tau$ en la franja $|\Im(s)| = |\tau| \le \tau_0 < A$,

$$g(s) = g(\sigma + i\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\sigma+i\tau)x} f(x)^* \varphi_0(x)\, dx\,, \tag{6.6}$$

lo mismo que sus derivadas de todo orden, las que están dadas por

$$g^{(n)}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (-ix)^n f(x)^* \varphi_0(x)\, dx \tag{6.7}$$

dado que, en virtud de (6.3), esas integrales convergen absoluta y uniformemente en dicha región del plano complejo s:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, |e^{\tau x}\, x^n\, \varphi_0(x)|\; dx \le K \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, |x^n|\, e^{-(A-\tau_0)|x|}\, dx < \infty\,. \tag{6.8}$$

En consecuencia, $g(s)$ es una función analítica de la variable s en la región $|\Im(s)| \le \tau_0 < A$, con $\tau_0 > 0$.

Supongamos ahora que $f(x) \perp \varphi_n(x)$, $\forall\, n \ge 0$. Entonces, de (6.6) y (6.7) resulta que $g^{(n)}(0) = 0$, $\forall\, n \ge 0 \Rightarrow$ que la función analítica $g(s) \equiv 0$.

En particular,

$$g(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} f(x)^* \varphi_0(x)\, dx \equiv 0 \Rightarrow f(x)^* \varphi_0(x) = 0, \text{ a.e.} \tag{6.9}$$

Y como, por hipótesis, $\varphi_0(x) \ne 0$, a.e. $\Rightarrow f(x) = 0$, a.e.

Esto muestra que el sistema $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ es completo en $\mathbf{L_2}(a, b)$.

Ejemplos:

• Las funciones $\varphi_n(x) = x^n\, e^{-x/2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, forman un sistema completo en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$. Por ortogonalización se obtienen las funciones de Laguerre, $L_n(x)\, e^{-x/2}/n!$, con

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x}\right) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{pmatrix} n \\ n-m \end{pmatrix} \frac{x^m}{m!}\,. \tag{6.10}$$

• Similarmente, las funciones $\varphi_n(x) = x^n e^{-x^2/2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, forman un sistema completo en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Por ortogonalización se obtienen las funciones de Hermite de la ecuación (4.14).

Bibliografía:

- *Mathematical Analysis*, G. Ye. Shilov.

- *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin
- *Methods of Modern Mathematical Physics*, M. Reed y B. Simon.