CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

ANÁLISIS FUNCIONAL

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

NOTAS SOBRE ESPACIOS EUCLÍDEOS

1. Espacios euclídeos

Un espacio lineal **E** (sobre el cuerpo de los complejos o los reales) se dice **euclídeo** si tiene definida una regla que a todo par de vectores de **E** le asigna un número complejo (real en el segundo caso), llamado **producto escalar**, que satisface los siguientes axiomas: $\forall\, x, y, z \in \mathbf{E}$ y $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), el producto escalar es

- **lineal** respecto del segundo argumento,

$$(z, \alpha\, x + \beta\, y) = \alpha(z, x) + \beta(z, y)\,, \tag{1.1}$$

- **Hermítico** (**simétrico** en un espacio real),

$$(y, x) = (x, y)^* \tag{1.2}$$

  (donde A^* indica el complejo conjugado de A),

- **positivo definido**,

$$(x, x) \geq 0, \text{ y } (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}\,, \tag{1.3}$$

  donde $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$ es el vector nulo de ese espacio.

Actualizado el 1 de octubre de 2005.

Nótese que los primeros dos axiomas implican que el producto escalar en un espacio complejo es **antilineal** respecto de su primer argumento,

$$(\alpha\, x + \beta\, y, z) = (z, \alpha\, x + \beta\, y)^* = \alpha^*(x, z) + \beta^*(y, z)\,, \tag{1.4}$$

mientras que en un espacio real es **bilineal**.

Toda forma cuadrática definida sobre un espacio vectorial $\mathbf{E}$, que sea lineal, Hermítica y positiva definida puede ser tomada como producto escalar, para así darle a $\mathbf{E}$ la estructura de un espacio euclídeo.

Ejemplos:

• Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\,, \tag{1.5}$$

y para $x, y \in \mathbb{C}^n$,

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i^*\, y_i\,. \tag{1.6}$$

En ambos casos se verifican los anteriores axiomas.

• Se denomina $\mathcal{C}(a, b)$ al conjunto de las **funciones continuas** $x(t)$ definidas en el intervalo $-\infty < a \leq t \leq b < \infty$. Este conjunto se estructura como un espacio vectorial respecto de las operaciones usuales de suma de funciones y de producto de funciones por números, cuyo elemento neutro $\mathbf{0}(t)$ es la función idénticamente nula. Puede definirse en $\mathcal{C}(a, b)$ el siguiente producto escalar: para $x(t), y(t) \in \mathcal{C}(a, b)$,

$$(x, y) := \int_a^b x(t)^*\, y(t)\, dt\,, \tag{1.7}$$

que satisface todos los axiomas necesarios. En particular,

$$(x, x) := \int_a^b |x(t)|^2\ dt \geq 0\,, \tag{1.8}$$

y si $(x, x) = 0$, entonces

$$0 = \int_a^b |x(t)|^2\ dt \geq \int_{a_1}^{b_1} |x(t)|^2\ dt \geq 0\,, \tag{1.9}$$

para todo $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$. En consecuencia, $x(t) \equiv 0$. En efecto, como $x(t)$ es continua, si fuese distinta de cero en un punto también lo sería en todo un entorno de dicho punto, en contradicción con (1.9).

Estructurado con ese producto escalar, el espacio euclídeo de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ se denota por $\mathcal{C}_2(a, b)$. ◇

Los dos primeros axiomas implican que, dadas dos combinaciones lineales de vectores, $x = \alpha_1\, x_1 + \cdots + \alpha_k\, x_k$, $y = \beta_1\, y_1 + \cdots + \beta_l\, y_l$, donde $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l \in$ **E**, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{C}$, tenemos

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \alpha_i^*\, \beta_j\, (x_i, y_j)\,. \tag{1.10}$$

Además, el producto escalar por el vector nulo es siempre cero,

$$(x, y) = (x + \mathbf{0}, y) = (x, y) + (\mathbf{0}, y) \Rightarrow (\mathbf{0}, y) = 0\,,\ \forall\, y \in \mathbf{E}\,. \tag{1.11}$$

Definición 1.1. El axioma de positividad permite definir una **norma** o longitud para cada vector de un espacio euclídeo:

$$\parallel x \parallel := +\sqrt{(x, x)} \geq 0\,. \tag{1.12}$$

En particular, $\parallel x \parallel = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$.

Por otra parte, si $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\parallel \lambda\, x \parallel = \sqrt{|\lambda|^2 (x, x)} = |\lambda| \parallel x \parallel\ . \tag{1.13}$$

Esto permite **normalizar** todo vector de longitud no nula. En efecto, si $x \neq \mathbf{0}$ entonces $\parallel x \parallel > 0$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = \parallel x \parallel^{-1}$, y sea $y = \lambda\, x$. Entonces,

$$\parallel y \parallel = |\lambda| \parallel x \parallel = 1\,. \tag{1.14}$$

Ejemplos:

• Para $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$\parallel x \parallel = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}\,. \tag{1.15}$$

• Para $x(t) \in \mathcal{C}_2(a, b)$

$$\parallel x \parallel = \left\{ \int_a^b |x(t)|^2\, dt \right\}^{\frac{1}{2}}\ . \tag{1.16}$$

◇

Definición 1.2. Un subconjunto $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ se dice **acotado** si la longitud de todos los vectores $x \in \mathbf{F}$ está acotada por una misma constante, $\| x \| \leq K$.

Ejemplo:

• La esfera de radio 1 en $\mathbf{E}$, que contiene a todos los vectores de longitud $\| x \| \leq 1$, es un conjunto acotado. ◇

Consideremos dos vectores no nulos $x, y \in \mathbf{E}$ para los cuales $(x, y) = e^{i\theta}\, |(x, y)|$, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, el cuadrado de la norma de la combinación lineal $\lambda\, e^{i\theta}\, x - y$,

$$P(\lambda) := \| \lambda\, e^{i\theta}\, x - y \|^2 = \left(\lambda\, e^{i\theta}\, x - y, \lambda\, e^{i\theta}\, x - y\right) =$$

$$\lambda^2 (x, x) - \lambda\, e^{-i\theta} (x, y) - \lambda\, e^{i\theta} (y, x) + (y, y) = \tag{1.17}$$

$$= \lambda^2 \| x \|^2 - 2\lambda\, |(x, y)| + \| x \|^2 \geq 0\,,$$

es un polinomio cuadrático en λ que no toma valores negativos. En consecuencia, $P(\lambda)$ no puede tener dos raíces reales distintas, lo que requiere que el discriminante de la ecuación $P(\lambda) = 0$ sea no positivo,

$$\left(-\, 2\, |(x, y)|\, \right)^2 - 4 \| x \|^2 \| y \|^2 \leq 0\,.$$

De aquí se deduce la siguiente

Propiedad 1.3.

$$\big|(x, y)\big| \leq \| x \| \| y \| \ . \tag{1.18}$$

Esta es la **desigualdad de Cauchy - Schwarz**, que vale para todo par de vectores de un espacio euclídeo.

Ejemplos:

• Para $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, la desigualdad de Cauchy - Schwarz se reduce a

$$\big|(x, y)\big| = \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k^* \, \eta_k \right| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \tag{1.19}$$

• Para $x(t), y(t) \in \mathcal{C}_2(a, b)$ tenemos

$$\big|(x, y)\big| = \left| \int_a^b x(t)^* \, y(t)\, dt \right| \leq \left\{ \int_a^b |x(t)|^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b |y(t)|^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} . \tag{1.20}$$

$\diamond$

Supongamos que para un dado par de vectores $x, y \in \mathbf{E}$ la desigualdad (1.18) se reduce a una igualdad, es decir, $\big|(x, y)\big| =\parallel x \parallel \parallel y \parallel$. En ese caso el discriminante de la ecuación $P(\lambda) = 0$ es cero, y $P(\lambda)$ tiene una raíz real doble: $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$P(\lambda_0) =\parallel \lambda_0\, e^{i\theta}\, x - y \parallel^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = \left(\lambda_0\, e^{i\theta}\right) x\,. \tag{1.21}$$

Dos vectores no nulos proporcionales entre sí se dicen **colineales**.

En un espacio euclídeo real, la desigualdad de Cauchy - Schwarz permite definir el **ángulo** entre dos vectores mediante la relación

$$\cos \widehat{x\, y} := \frac{(x, y)}{\parallel x \parallel \parallel y \parallel}\,. \tag{1.22}$$

Dos vectores $x, y \in \mathbf{E}$ se dicen **ortogonales** si $(x, y) = 0$, lo que se denota por $x \perp y$. En particular, el vector nulo es ortogonal a todo vector de $\mathbf{E}$.

En un espacio euclídeo real, el ángulo entre dos vectores no nulos ortogonales entre sí es $\pi/2$ ($\cos \widehat{x\, y} = 0$).

Ejemplos:

• En $\mathbb{R}^n$, los vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ son ortogonales entre sí.

• En $\mathcal{C}_2(a, b)$,

$$x(t) \perp y(t) \;\Rightarrow\; \int_a^b x(t)^*\, y(t)\, dt = 0\,. \tag{1.23}$$

$\diamond$

El **sistema trigonométrico**,

$$\big\{\cos(k\,t), k = 0, 1, \ldots;\ \sin(l\,t), l = 1, 2, \ldots\big\} \subset \mathcal{C}_2(-\pi, \pi)\,, \tag{1.24}$$

es un conjunto infinito de vectores ortogonales entre sí (demostrarlo!).

Lema 1.4. *Si los vectores no nulos $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ son ortogonales entre sí, entonces son linealmente independientes.*

En efecto, supongamos que, por el contrario, son linealmente dependientes. Entonces existen k números C_i, no todos nulos, tales que $C_1\, x_1 + C_2\, x_2 + \cdots + C_k\, x_k = \mathbf{0}$.

Supongamos, por ejemplo, que $C_1 \neq 0$, y tomemos el producto escalar de esa combinación lineal nula con el vector x_1. Como $x_i \perp x_j$ para $i \neq j$, tenemos que

$$0 = (x_1, \mathbf{0}) = C_1(x_1, x_1) = C_1 \parallel x_1 \parallel^2 \Rightarrow \; x_1 = \mathbf{0}\,, \tag{1.25}$$

en contradicción con la hipótesis. En consecuencia, $C_i = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, k$, y los vectores son linealmente independientes. □

Del Lema 1.4 se desprende que si una suma de vectores ortogonales entre sí es el vector nulo, entonces cada sumando es $\mathbf{0}$.

Se define la **dimensión** de un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ como el máximo número de vectores linealmente independientes que es posible seleccionar en $\mathbf{E}$. Por ejemplo, la dimensión de $\mathbb{C}^n$ es n.

La existencia del sistema trigonométrico, ec. (1.24), muestra que los espacios de funciones $\mathcal{C}_2(a, b)$ no tienen dimensión finita.

Lema 1.5. *Si los vectores* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *son ortogonales a* $y \in \mathbf{E}$*, entonces toda combinación lineal de ellos es también ortogonal a* y*,*

$$\left(y, \sum_{i=1}^{k} C_i\, x_i \right) = \sum_{i=1}^{k} C_i\, (y, x_i) = 0\,. \tag{1.26}$$

□

El conjunto de todas las combinaciones lineales de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ constituye un subespacio lineal $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$. Se dice que el vector y es ortogonal a dicho subespacio, lo que se denota por $y \perp \mathbf{F}$.

En general, se dice que x es ortogonal a un subconjunto $\mathbf{G} \in \mathbf{E}$ si x es ortogonal a todo vector de dicho subconjunto,

$$x \perp \mathbf{G} \;\Leftrightarrow\; x \perp y,\; \forall\, y \in \mathbf{G}\,. \tag{1.27}$$

Definición 1.6. Del Lema 1.5 resulta que el conjunto de todos los vectores ortogonales a un subconjunto $\mathbf{G} \subset \mathbf{E}$ forman un subespacio $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$. Si $\mathbf{G}$ es él mismo un subespacio de $\mathbf{E}$, se dice que $\mathbf{F}$ es su **complemento ortogonal**.

Los espacios euclídeos comparten ciertas **propiedades métricas** conocidas de la geometría en el plano y el espacio, como lo muestran los siguientes teoremas.

Teorema 1.7. *(de Pitágoras) Si* $x, y \in \mathbf{E}$ *son ortogonales entre sí,* $x \perp y$*, entonces*

$$\parallel x + y \parallel^2 = \; (x + y, x + y) \; = \parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2 \tag{1.28}$$

(en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos). □

Su generalización: Si los vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *son ortogonales entre sí,* $x_i \perp x_j$ *para* $i \neq j$*, entonces*

$$\| x_1 + \cdots + x_k \|^2 = \| x_1 \|^2 + \cdots + \| x_k \|^2 \; . \tag{1.29}$$

Teorema 1.8. *(desigualdades triangulares) Dados* $x, y \in \mathbf{E}$*, se tiene que*

$$\Big| \, \| x \| - \| y \| \, \Big| \; \leq \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \tag{1.30}$$

(la longitud de un lado de un triángulo no supera a la suma de las longitudes de los otros dos lados, ni es menor que su diferencia en valor absoluto).

En efecto, consideremos el producto escalar

$$\| x + y \|^2 = \; (x + y, x + y) \; = \| x \|^2 + 2\,\Re(x, y) + \| y \|^2 \; . \tag{1.31}$$

La desigualdad de Cauchy - Schwarz permite escribir

$$\begin{gathered} |\,\Re(x, y)| \; \leq \; |(x, y)| \; \leq \| x \| \, \| y \| \Rightarrow \\ \Big(\| x \| - \| y \| \Big)^2 \; \leq \| x + y \|^2 \leq \; \Big(\| x \| + \| y \| \Big)^2, \end{gathered} \tag{1.32}$$

de donde resulta (1.30). □

Por otra parte, es sabido que en un espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$ de dimensión finita n siempre es posible seleccionar un **sistema completo** de n vectores **ortonormales**,

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \;\; | \;\; (e_i, e_j) = \delta_{ij} \; , \tag{1.33}$$

respecto del cual todo vector $x \in \mathbf{E}_n$ puede ser representado como una combinación lineal de la forma

$$x = \xi_1 \, e_1 + \cdots + \xi_n \, e_n \; , \tag{1.34}$$

donde los ξ_i son llamados **coeficientes de Fourier** de x relativos a la base considerada. Ellos están dados por

$$\xi_i = (e_i, x), \;\; i = 1, \ldots, n. \tag{1.35}$$

Similarmente, dado $y \in \mathbf{E}_n$, $y = \eta_1 \, e_1 + \cdots + \eta_n \, e_n$, tenemos para el producto escalar

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i^* \, \eta_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \, \eta_i \; , \tag{1.36}$$

y para la norma

$$\| x \| = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}\,. \tag{1.37}$$

Nótese que en estos resultados nada nos permite distinguir entre el espacio $\mathbf{E}_n$ considerado y el espacio $\mathbb{C}^n$, en el cual hubiéramos seleccionado los vectores $\bar{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ e $\bar{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$. En efecto,

$$(\bar{x}, \bar{y})_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \, \eta_i\,, \qquad \| \bar{x} \|_{\mathbb{C}^n} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}\,. \tag{1.38}$$

Definición 1.9. Dos espacios euclídeos, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$, se dicen **isomorfos** si es posible establecer entre sus elementos una correspondencia biunívoca que preserve las operaciones lineales y los productos escalares:

$$\forall\, x, y \in \mathbf{E}\ \exists\, x', y' \in \mathbf{E}' \text{ tal que si } x \leftrightarrow x',\ y \leftrightarrow y' \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\, x + \beta\, y \leftrightarrow \alpha\, x' + \beta\, y'\,,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ (o } \mathbb{R})\,, \\ \\ (x, y)_{\mathbf{E}} = (x', y')_{\mathbf{E}'}\,. \end{cases} \tag{1.39}$$

Evidentemente, el isomorfismo de espacios euclídeos establece una relación de equivalencia.

Ejemplos:

• Dos espacios euclídeos reales, de dimensión finita n, cualesquiera son isomorfos entre sí (y, por lo tanto, isomorfos a $\mathbb{R}^n$). Para mostrarlo basta con establecer una correspondencia uno a uno entre los n vectores de dos de sus respectivas bases ortonormales.

• Similarmente, todo espacio euclídeo complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$.

$\diamond$

2. Formas lineales sobre espacios euclídeos

Una función escalar (a valores numéricos) definida sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, $f : \mathbf{E} \to \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), es llamada **forma** o **funcional lineal** si satisface

$$f(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, f(x) + \beta\, f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbf{E},\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ (o } \mathbb{R})\,. \tag{2.1}$$

Evidentemente, para una forma lineal tenemos que $f(\mathbf{0}) = 0$, y

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_k\, x_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_k\, f(x_k)\,. \tag{2.2}$$

Ejemplos:

• En un espacio n-dimensional $\mathbf{E}_n$, generado por la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, y para $x = \xi_1\, x_1 + \cdots + \xi_n\, e_n$, tenemos

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^*\, \xi_i\,, \ \text{con } c_i = f(e_i)^*\,. \tag{2.3}$$

Por lo tanto, una funcional lineal en un espacio de dimensión finita queda determinada por los valores que ella toma sobre los vectores de un sistema completo. Además, del isomorfismo entre $\mathbf{E}_n$ y el espacio de las n-uplas de números complejos, resulta que f está representada en este último espacio por el producto escalar por un vector fijo, $\bar{c} := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

• El producto escalar por un vector fijo de un espacio euclídeo arbitrario define una funcional lineal sobre ese espacio. En efecto, si $z \in \mathbf{E}$,

$$f(x) := (z, x), \ \forall\, x \in \mathbf{E} \tag{2.4}$$

define una forma lineal como consecuencia de la linealidad del producto escalar.

• En particular, si $z(t)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$f(x) := \int_a^b z(t)^*\, x(t)\, dt \tag{2.5}$$

define una funcional lineal sobre $\mathcal{C}_2(a, b)$.

• Pero no toda funcional lineal en un espacio de dimensión infinita puede ser representada en la forma de un producto escalar por un vector fijo del espacio. En efecto, consideremos nuevamente el espacio $\mathcal{C}_2(a, b)$, y sea $t_0 \in [a, b]$. El valor que $x(t) \in \mathcal{C}_2(a, b)$ toma en el punto t_0 define una forma lineal,

$$f(x) := x(t_0)\,. \tag{2.6}$$

Téngase en cuenta que no existe ninguna función continua $\delta(t, t_0)$ tal que

$$\int_a^b \delta(t, t_0)\, x(t)\, dt = x(t_0), \ \forall\, x(t) \in \mathcal{C}_2(a, b)\,. \tag{2.7}$$

$\diamond$

Definición 2.1. Una funcional $f(x)$ se dice **acotada** si existe es una constante $0 \leq K < \infty$ tal que

$$|f(x)| \leq K \parallel x \parallel, \ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{2.8}$$

3. Operadores lineales sobre espacios euclídeos

Un **operador** sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ es una función a valores vectoriales definida sobre $\mathbf{E}$, $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$.

Un operador A se dice **lineal** si

$$A\,(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, A\, x + \beta\, A\, y, \ \forall\, x, y \in \mathbf{E}, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ (o } \mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Para un operador lineal se cumple que $A\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$, y

$$A \sum_{i=1}^{k} \alpha_k\, x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_k\, A\, x_k\,. \tag{3.2}$$

Ejemplos:

• El **operador nulo**, $\mathbf{O}\, x = \mathbf{0}, \ \forall\, x \in \mathbf{E}$, es un operador lineal.

• El **operador identidad**, $\mathbf{I}\, x = x, \ \forall\, x \in \mathbf{E}$, es un operador lineal.

• Consideremos un subespacio de dimensión finita n de un espacio euclídeo arbitrario, $\mathbf{E}_n \subset \mathbf{E}$, y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un sistema ortonormal y completo en $\mathbf{E}_n$. Se define el **operador de proyección** sobre el subespacio $\mathbf{E}_n$ por la relación

$$P\, x = \sum_{i=1}^{n} e_i\,(e_i, x)\,. \tag{3.3}$$

Se trata de un operador lineal **idempotente**: $P(P\,x) = P\,x\,, \ \forall\, x \in \mathbf{E}$. En efecto, como $P\, e_i = e_i$, tenemos

$$P(P\,x) = P \sum_{i=1}^{n} e_i\,(e_i, x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i, x)\, P\, e_i = P\, x, \ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{3.4}$$

El proyector sobre el complemento ortogonal de $\mathbf{E}_n$ está dado por $\bar{P} = \mathbf{I} - P$. En efecto, $\forall\, x \in \mathbf{E}$ y $\forall\, i = 1, \ldots, n$,

$$\big(e_i, (\mathbf{I} - P)x\big) = (e_i, x) - \sum_{j=1}^{n} (e_i, e_j)\ (e_j, x) = 0\,. \tag{3.5}$$

En consecuencia, tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.1. *dado un subespacio de dimensión finita de un espacio euclídeo, todo vector puede ser representado como la suma de dos vectores ortogonales entre sí,*

$$x = u + v,\ \text{donde}\ u = P\,x \in \mathbf{E}_n,\ y\ v = (\mathbf{I} - P)x \perp \mathbf{E}_n\,. \tag{3.6}$$

• En un espacio de dimensión finita $\mathbf{E}_n$ generado por el sistema ortonormal y completo $\{e_1, \ldots, e_n\}$, un operador lineal tal que

$$A\,e_k = \lambda_k\,e_k,\ k = 1, \ldots, n\,, \tag{3.7}$$

con λ_k números dados, se dice **diagonal**. Esos números, llamados **autovalores** de A, definen completamente su acción sobre un vector arbitrario:

$$A\,x = A(\xi_1\,e_1 + \cdots + \xi_n\,e_n) = \lambda_1\,\xi_1\,e_1 + \cdots + \lambda_n\,\xi_n\,e_n\,. \tag{3.8}$$

• La multiplicación de elementos de $\mathcal{C}_2(a,b)$ por una función continua fija $\varphi(t)$ define un operador lineal,

$$\forall\,x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b), \quad A\,x(t) := \varphi(t)\,x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)\,. \tag{3.9}$$

• El **operador integral de Fredholm**, $A : \mathcal{C}_2(a,b) \to \mathcal{C}_2(a,b)$, está definido por

$$y(t) = A\,x(t) := \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds,\ \forall\,x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)\,, \tag{3.10}$$

donde el **núcleo** del operador, $K(t,s)$, es una función continua de sus dos variables.

• Los operadores de los dos ejemplos anteriores están definidos sobre todo el espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$. Pero eventualmente es necesario considerar operadores definidos únicamente sobre ciertos subespacios de $\mathcal{C}_2(a,b)$. Un ejemplo es el operador diferencial

$$D\,x(t) := x'(t)\,, \tag{3.11}$$

definido sólo sobre el conjunto de aquellas funciones de $\mathcal{C}_2(a,b)$ que tienen una derivada primera continua, $x'(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$. $\diamond$

Definición 3.2. El **núcleo** (kernel) o **subespacio nulo** de un operador lineal A, $\mathrm{Ker}\,(A)$, es el conjunto de vectores $x \in \mathbf{E}$ que son aplicados en el vector nulo por la acción de A,

$$A\,x = \mathbf{0}\,, \quad \forall\,x \in \mathrm{Ker}\,(A) \subset \mathbf{E} \tag{3.12}$$

(mostrar que se trata de un subespacio).

Definición 3.3. El **rango** o **imagen** de un operador lineal A, $\mathrm{Rank}\,(A)$, es el conjunto de vectores $y \in \mathbf{E}$ que son la imagen por A de algún vector de $x \in \mathbf{E}$,

$$\forall\, y \in \mathrm{Rank}\,(A) \subset \mathbf{E}\,,\ \exists\, x \in \mathbf{E} \mid y = A\,x\,. \tag{3.13}$$

Un operador lineal definido sobre un espacio euclídeo de dimensión finita queda determinado completamente por los valores que toma sobre una base ortonormal de ese espacio. En efecto, consideremos un espacio de dimensión n, $\mathbf{E}_n$, generado por un sistema ortonormal completo $\{e_1, \ldots, e_n\}$. El operador A aplica los vectores de la base en una combinación lineal de esos mismos vectores,

$$A\,e_i = \sum_{j=1}^{n} e_j\,\mathcal{A}_{j\,i}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{3.14}$$

mientras que para un vector arbitrario $x = \xi_1\,e_1 + \cdots + \xi_n\,e_n$ tenemos

$$A\,x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,A\,e_i = \sum_{j=1}^{n} e_j \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{j\,i}\,\xi_i\,. \tag{3.15}$$

El vector imagen $y = A\,x = \eta_1\,e_1 + \cdots + \eta_n\,e_n$ tiene por coeficientes de Fourier a $\eta_j = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{j\,i}\,\xi_i$, o bien, en notación matricial,

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1\,1} & \ldots & \mathcal{A}_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{n\,1} & \ldots & \mathcal{A}_{n\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

En consecuencia, haciendo uso del isomorfismo que existe entre el espacio complejo (real) $\mathbf{E}_n$ y el espacio $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$), vemos que todo operador lineal A puede ser representado por una matriz $\mathcal{A}$ de $n \times n$ (operador lineal sobre el espacio de la n-uplas), cuyos **elementos de matriz** (relativos a la base considerada) están dados por $\mathcal{A}_{i\,j} = (e_i, A\,e_j)$.

Inversamente, dada una base ortonormal en $\mathbf{E}_n$, toda matriz de $n \times n$ define un operador lineal sobre dicho espacio mediante la relación (3.15). En consecuencia, existe una correspondencia biunívoca entre operadores lineales sobre $\mathbf{E}_n$ y matrices de $n \times n$ (operadores lineales sobre el espacio de la n-uplas).

Dos operadores lineales A y B definidos sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ son iguales si $A\,x = B\,x\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}$.

Al igual que con las matrices, es posible definir operaciones de suma y multiplicación por números de operadores lineales sobre un espacio euclídeo.

En efecto, sean A, B, C operadores lineales sobre $\mathbf{E}$, y $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ números; las siguientes operaciones definen nuevos operadores lineales sobre $\mathbf{E}$:

- la **suma o adición** de dos operadores lineales, $C = A + B$, es un operador lineal definido por

$$C\,x := A\,x + B\,x\,, \quad \forall\, x \in \mathbf{E}\,; \tag{3.17}$$

- la **multiplicación o producto** de un operador lineal A por un número λ es un operador lineal definido por

$$(\lambda\, A)x := \lambda(A\,x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbf{E}\,; \tag{3.18}$$

(mostrar en ambos casos que el operador resultante es lineal).

Si $\mathbf{O}$ es el operador nulo, y $-A = (-1)A$, como consecuencia de las operaciones lineales definidas sobre vectores se verifica de inmediato que

- $A + B = B + A\,,$
- $(A + B) + C = A + (B + C)\,,$
- $A + \mathbf{O} = A\,,$
- $A + (-A) = \mathbf{O}\,,$
- $1\,A = A\,,$
- $\lambda_1(\lambda_2\,A) = (\lambda_1\,\lambda_2)A\,,$
- $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1\,A + \lambda_2\,A\,,$
- $\lambda(A + B) = \lambda\,A + \lambda\,B\,.$

Esto muestra que el conjunto de todos los operadores lineales definidos sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ forman ellos mismos un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo que $\mathbf{E}$.

También es posible introducir un **producto** o **composición** de operadores lineales, que corresponde al producto usual de matrices. Si A, B son operadores lineales sobre $\mathbf{E}$, la composición $C = A\,B$ es el operador lineal definido por

$$C\,x = (A\,B)x := A(B\,x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{3.19}$$

En efecto, el producto $A\,B$ así definido es lineal:

$$(A\,B)(\alpha\,x + \beta\,y) = A\,(\alpha\,B\,x + \beta\,B\,y) = \alpha(A\,B)\,x + \beta(A\,B)\,y\,. \tag{3.20}$$

Con esta definición también se verifica que

- $A(B\,C) = (A\,B)C\,,$
- $A(B + C) = A\,B + A\,C\,,$
- $(A + B)C = A\,C + B\,C\,,$

- $\lambda(A\,B) = (\lambda\,A)B = A(\lambda\,B)\,,$

pero en general

- $A\,B \neq B\,A\,.$

Esto es, la composición de operadores es asociativa, distributiva y no conmutativa (al igual que el producto de matrices cuadradas).

La asociatividad del producto permite definir potencias positivas de un operador lineal,

$$A^1 := A\,, \quad A^2 := A\,A\,, \ldots\,, \quad A^{n+1} := A\,A^n\,, \quad \text{etc.} \tag{3.21}$$

También se define $A^0 := \mathbf{I}$. De esto resulta que $A^n\,A^m = A^{n+m}$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$.

Definición 3.4. Un operador B que satisface $B\,A = \mathbf{I}$ se dice **inverso a izquierda** de A. Similarmente, si C satisface $A\,C = \mathbf{I}$ se dice **inverso a derecha** de A.

Estos inversos en general no existen (similarmente a lo que ocurre en el caso de las matrices cuadradas). Una condición necesaria para la existencia del inverso a izquierda es que si $A\,x_0 = \mathbf{0} \Rightarrow x_0 = \mathbf{0}$. En efecto, $B(A\,x_0) = B\,\mathbf{0} = \mathbf{0} = (B\,A)x_0 = \mathbf{I}\,x_0 = x_0\,.$

En el caso de espacios de dimensión finita, el problema de hallar el operador inverso a izquierda de A se reduce al de invertir la matriz $\mathcal{A}$ asociada al operador, relativa a una base ortonormal del espacio euclídeo. Eso requiere que el determinante $\det \mathcal{A} \neq 0$, en cuyo caso el inverso a derecha coincide con el inverso a izquierda, y ambos se denotan por A^{-1}, operador correspondiente a la matriz inversa $\mathcal{A}^{-1}$.

En el caso de espacios euclídeos de dimensión infinita, el problema del inverso es más delicado. En particular, la existencia de un inverso a izquierda no implica la existencia de un inverso a derecha. De la misma manera, un inverso a izquierda no necesariamente tiene a su vez un inverso a izquierda. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

• Consideremos el espacio lineal formado por el conjunto de los polinomios en t a coeficientes reales, en el intervalo $[-a, a]$,

$$\mathcal{P}_2(-a, a) = \{P(t) = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots + a_n\,t^n\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ a_k \in \mathbb{R}\}\,. \tag{3.22}$$

Como subespacio del espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}_2(-a,a)$, se trata de un espacio euclídeo, que tiene dimensión infinita como consecuencia de que las potencias de t, $\{t^n\,, n=0,1,2,\dots\}$ forman un conjunto linealmente independiente.

En este espacio, el operador integral $A:\mathcal{P}_2(-a,a)\to\mathcal{P}_2(-a,a)$ definido por

$$A\,P(t) := \int_0^t P(s)\,ds = a_0\,t + a_1\,\frac{t^2}{2} + \cdots + a_n\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\,, \tag{3.23}$$

tiene por inversa a izquierda al operador diferencial $D:\mathcal{P}_2(-a,a)\to\mathcal{P}_2(-a,a)$ definido por

$$D\,P(t) := P'(t)\,. \tag{3.24}$$

En efecto,

$$D\,A\,P(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t P(s)\,ds = P(t)\,. \tag{3.25}$$

De hecho, D tiene infinitas inversas a derecha,

$$D\int_{t_0}^t P(s)\,ds = P(t)\,. \tag{3.26}$$

Pero D no tiene una inversa a izquierda, puesto que

$$D\,P(t) = 0 + a_1 + 2a_2\,t + \cdots + na_n\,t^{n-1}\,, \quad \forall\, a_0 \tag{3.27}$$

(dicho de otro modo, $D(a_0\,t^0)=0$, $\forall\, a_0\neq 0$). ◇

4. Sistemas de vectores ortogonales

Teorema 4.1. *Sea $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ una secuencia (finita o infinita) de vectores de un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, y sea $\mathcal{L}(x_1,\dots,x_k)$ la variedad lineal generada por los k primeros vectores de la secuencia. Entonces, siempre existe un sistema de vectores $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ tales que, $\forall\, k$,*

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1,\dots,y_k) = \mathcal{L}(x_1,\dots,x_k)\,, \\ \\ y_{k+1}\perp\mathcal{L}(y_1,\dots,y_k)\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Este resultado puede demostrarse por inducción completa. En efecto, supongamos que han sido construidos los primeros vectores $y_1, y_2, \dots, y_k$ con esas propiedades. En particular, para $k=1$ basta con tomar $y_1 = x_1$ (si $x_1\neq\mathbf{0}$).

Para un dado k, la variedad lineal $\mathcal{L}(y_1,\dots,y_k)$ es un subespacio de dimensión finita de $\mathbf{E}$, de modo que el vector x_{k+1} puede escribirse como la suma $x_{k+1} = u_{k+1}+v_{k+1}$, donde $u_{k+1}\in\mathcal{L}(y_1,\dots,y_k)$ y $v_{k+1}\perp\mathcal{L}(y_1,\dots,y_k)$ (ver Lema 3.1). En consecuencia, tomando $y_{k+1}=v_{k+1}$ se satisface la segunda condición.

Por otra parte, por hipótesis $\mathcal{L}(y_1,\dots,y_k)=\mathcal{L}(x_1,\dots,x_k)$, mientras que $x_{k+1}=y_{k+1}+u_{k+1}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})\subset\mathcal{L}(y_1,\dots,y_k,y_{k+1})$.

Similarmente, dado que $u_{k+1}\in\mathcal{L}(x_1,\dots,x_k)$ y $y_{k+1}=x_{k+1}-u_{k+1}$, entonces $\mathcal{L}(y_1,\dots,y_k,y_{k+1})\subset\mathcal{L}(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$.

Finalmente, si $y_k=\mathbf{0}$ para algún k, eso significa que x_k no es linealmente independiente de los vectores $\{x_1,\dots,x_{k-1}\}$, y puede ser descartado de la secuencia original. Además, los vectores $y_k\neq\mathbf{0}$ pueden ser normalizados de modo de obtener una secuencia ortonormal. □

Ejemplo:

• Consideremos la secuencia de funciones linealmente independientes $\{x_0(t)=1,x_1(t)=t,\dots,x_k(t)=t^k,\dots\}\in\mathcal{C}_2(-1,1)$. En este caso, $\mathcal{L}(x_0,\dots,x_k)$ es el subespacio de polinomios $P(t)$ de grado $\leq k$, y las funciones ortogonales $y_k(t)=P_k(t)$ que se obtienen son los **polinomios de Legendre**,

$$\begin{aligned}
&P_0(t)=y_0(t)=x_0(t)=1\,,\\
&P_1(t)=y_1(t)=x_1(t)-\frac{(y_0,x_1)}{(y_0,y_0)}\,y_0(t)=t\,,\\
&P_2(t)=y_2(t)=x_2(t)-\frac{(y_0,x_2)}{(y_0,y_0)}\,y_0(t)-\frac{(y_1,x_2)}{(y_1,y_1)}\,y_1(t)=t^2-\frac{1}{3}\,,\\
&\vdots\\
&P_k(t)=y_k(t)=x_k(t)-\frac{(y_0,x_k)}{(y_0,y_0)}\,y_0(t)-\cdots-\frac{(y_{k-1},x_k)}{(y_{k-1},y_{k-1})}\,y_{k-1}(t)\,.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

5. Operadores acotados

Dado un operador lineal sobre un espacio euclídeo, $A:\mathbf{E}\to\mathbf{E}$, se define su **norma**, $\parallel A\parallel$, como la mínima cota superior o **supremo** de la funcional $\parallel A\,x\parallel$ tomada sobre el conjunto de vectores de longitud 1 (**vectores unitarios**) de ese espacio,

$$\parallel A\parallel:=\sup_{\{x\in\mathbf{E}\ |\ \|x\|=1\}}\parallel A\,x\parallel\ .\tag{5.1}$$

Si $\parallel A\parallel<\infty$, el operador A se dice **acotado**.

Definición 5.1. Todo vector unitario $x_0 \in \mathbf{E}$ para el cual esa cota es alcanzada se dice **vector máximo** de A.

Ejemplos:

• El operador identidad, $\mathbf{I}$, tiene norma $\| \mathbf{I} \| = 1$,

$$\| \mathbf{I} \| = \sup_{\{\|x\|=1\}} \| \mathbf{I}\, x \| = \sup_{\{\|x\|=1\}} \| x \| = 1\,, \tag{5.2}$$

y todo vector unitario es un vector máximo de $\mathbf{I}$.

• Consideremos un operador diagonal en un espacio de dimensión finita n, $A\, e_i = \lambda_i\, e_i$, y sea λ_{max} el autovalor de máximo módulo, $|\lambda_i| \leq |\lambda_{max}|$, para $i = 1, \ldots, n$, correspondiente al vector unitario e_{max} de la base ortonormal considerada. Entonces,

$$\begin{array}{c} \| A \|^2 = \sup_{\{\|x\|=1\}} \| A\, x \|^2 = \\ = \sup_{\{|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2=1\}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\, |\xi_i|^2 \leq |\lambda_{max}|^2\,. \end{array} \tag{5.3}$$

Por otra parte, $\| A\, e_{max} \| = |\lambda_{max}|$. Por lo tanto, $\| A \| = |\lambda_{max}|$ y e_{max} es un vector máximo de A.

• El operador nulo $\mathbf{O}$ tiene norma nula,

$$\| \mathbf{O} \| = \sup_{\{\|x\|=1\}} \| \mathbf{0} \| = 0\,. \tag{5.4}$$

Inversamente, si A tiene norma nula y $\| x \| = 1$,

$$\| A \| = 0 \Rightarrow 0 \leq \| A\, x \| \leq 0 \;\Rightarrow\; A\, x = \mathbf{0}\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{5.5}$$

Por lo tanto, $\| A \| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = \mathbf{O}$. ◇

Lema 5.2. *En un espacio euclídeo de dimensión finita, todo operador lineal resulta acotado y tiene un vector máximo.*

En efecto, consideremos el caso de un espacio real de dimensión finita n, $\mathbf{E}_n$, donde un vector genérico tiene el desarrollo $x = \xi_1\, e_1 + \cdots + \xi_n\, e_n$, con $\xi_i \in \mathbb{R}$, respecto de cierta base ortonormal. La funcional

$$F(x) := \| A\, x \|^2 \geq 0 \tag{5.6}$$

se reduce a (ver ec. (3.15))

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_{k\,l}\, \xi_l\right)^2 = f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}\,, \tag{5.7}$$

donde $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es una función cuadrática de n variables reales[1]. Esta es una función continua que debe ser analizada en la esfera de radio 1 de $\mathbf{E}_n$, donde $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$, lo que corresponde a una región acotada y cerrada de $\mathbb{R}^n$.

Ahora bien, toda función continua en una región acotada y cerrada de $\mathbb{R}^n$ está acotada, y como todo conjunto acotado de números reales tiene un supremo, entonces existe $\parallel A \parallel \geq 0$ tal que $F(x) \leq \parallel A \parallel^2$.

Por otra parte, toda función continua $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ en una región acotada y cerrada alcanza un valor máximo (que naturalmente coincide con su supremo). Supongamos que ello ocurre en un punto de coordenadas $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$. Ese punto de $\mathbb{R}^n$ define un vector unitario $x_0 = \xi_1^0 \, e_1 + \cdots + \xi_n^0 \, e_n \in \mathbf{E}_n$ para el cual es

$$\parallel A \, x_0 \parallel^2 = f(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) = \parallel A \parallel^2 \tag{5.8}$$

y, en consecuencia, es un máximo de A. □

A diferencia de lo que ocurre en dimensión finita, en el caso de espacios de dimensión infinita los operadores pueden ser **no acotados** (de norma no finita) o, siéndolo, pueden no tener un vector máximo.

Ejemplo:

• Consideremos el operador diferencial de la ec. (3.11) y una función de la forma $e^{\lambda t} \in \mathcal{C}_2(a, b)$, entonces

$$\parallel D \, e^{\lambda t} \parallel = \parallel \left(e^{\lambda t}\right)' \parallel = \parallel \lambda \, e^{\lambda t} \parallel = |\lambda| \parallel e^{\lambda t} \parallel , \tag{5.9}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $\parallel D \, x(t) \parallel$ no está acotado sobre la esfera de radio 1 del subespacio de funciones diferenciables de $\mathcal{C}_2(a, b)$.

◇

Sea A un operador lineal acotado sobre $\mathbf{E}$, y $x \in \mathbf{E}$ un vector no nulo. Entonces $y = x / \parallel x \parallel$ es un vector unitario, de modo que

$$\left\| A \, \frac{x}{\parallel x \parallel} \right\| = \frac{1}{\parallel x \parallel} \parallel A \, x \parallel \leq \parallel A \parallel \Rightarrow \parallel A \, x \parallel \leq \parallel A \parallel \parallel x \parallel \ . \tag{5.10}$$

Por otra parte, si $x = \mathbf{0}$, $\parallel A \, x \parallel = 0 = \parallel A \parallel \parallel x \parallel$. En consecuencia, tenemos la siguiente

Propiedad 5.3. Si A es un operador lineal acotado sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$,

$$\parallel A \, x \parallel \leq \parallel A \parallel \parallel x \parallel , \ \forall \, x \in \mathbf{E} . \tag{5.11}$$

[1] El caso de un espacio complejo de dimensión n es enteramente similar, resultando $f(\xi)$ una función real, cuadrática en $2n$ variables reales.

Propiedad 5.4. La norma de un operador acotado A puede definirse equivalentemente como

$$M := \sup_{\{x,y \text{ unitarios}\}} |(y, A\,x)| \ . \tag{5.12}$$

En efecto, para todo par de vectores unitarios $x, y \in \mathbf{E}$ tenemos

$$|(y, A\,x)| \ \leq \parallel y \parallel \parallel A\,x \parallel \leq \parallel A \parallel \parallel x \parallel = \parallel A \parallel , \tag{5.13}$$

donde hemos empleado la propiedad (5.11). Entonces, $M \leq \parallel A \parallel$. Por otra parte, $\forall\, x$ unitario tal que $A\,x \neq \mathbf{0}$, y con $y = \parallel A\,x \parallel^{-1} A\,x$ (también unitario y paralelo a x), resulta

$$|(y, A\,x)| = \parallel y \parallel \parallel A\,x \parallel = \parallel A\,x \parallel \leq M \, , \tag{5.14}$$

de modo que $\sup_{\{\|x\|=1\}} \parallel A\,x \parallel = \parallel A \parallel \leq M$. Por lo tanto, $M = \parallel A \parallel$.

Sean A, B operadores lineales acotados sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$. Su suma es también un operador acotado,

$$\parallel A + B \parallel \leq \parallel A \parallel + \parallel B \parallel , \tag{5.15}$$

como consecuencia de la desigualdad triangular para la norma de los vectores en $\mathbf{E}$,

$$\parallel (A + B)\,x \parallel \leq \parallel A\,x \parallel + \parallel B\,x \parallel , \ \forall\, x \in \mathbf{E} \, . \tag{5.16}$$

Esto significa que el conjunto de los operadores lineales acotados sobre $\mathbf{E}$ constituye un **subespacio** del espacio vectorial de los operadores lineales.

Además, la norma de operadores acotados satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{gathered} \parallel A \parallel \geq 0 \, , \text{ y } \parallel A \parallel = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{O} \, , \\ \parallel \lambda\, A \parallel = \ |\lambda| \parallel A \parallel , \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \, . \end{gathered} \tag{5.17}$$

Las ecs. (5.15) y (5.17) muestran que los operadores lineales acotados sobre un espacio euclídeo forman un **espacio normado** o **espacio de Banach**[2].

[2]Un espacio de Banach $\mathbf{F}$ es un espacio lineal que tiene definida una **norma** que, $\forall\, \psi, \phi \in \mathbf{F}$, satisface las siguientes propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \parallel \psi \parallel \geq 0, \text{ y } \parallel \psi \parallel = 0 \Leftrightarrow \psi = \mathbf{0} \text{ (elemento neutro de } \mathbf{F}) \, , \\ \\ \parallel \lambda\, \psi \parallel = \ |\lambda| \parallel \psi \parallel , \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \, , \\ \\ \parallel \psi + \phi \parallel \leq \parallel \psi \parallel + \parallel \phi \parallel \ . \end{array} \right. \tag{5.18}$$

Por otra parte,

$$\| A\,B \| \leq \| A \| \, \| B \| \,, \tag{5.19}$$

dado que

$$\| (A\,B)\,x \| \leq \| A \| \, \| B\,x \| \leq \| A \| \, \| B \| \, \| x \| \,, \ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{5.20}$$

6. El operador adjunto

Dado un operador lineal acotado A, definido sobre todo un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, se define su **operador adjunto**, $A^\dagger$, como aquel operador que satisface

$$\left(y, A^\dagger\, x\right) = (A\,y, x) = (x, A\,y)^* \ , \ \forall\, x, y \in \mathbf{E}\,. \tag{6.1}$$

En el caso de un espacio euclídeo de dimensión finita, generado por la base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$, la matriz asociada al operador adjunto, $\mathcal{A}'$, tiene por elementos de matriz a

$$(\mathcal{A}')_{ij} = \left(e_i, A^\dagger\, e_j\right) = (A\,e_i, e_j) = (e_j, A\,e_i)^* = (\mathcal{A})^*_{j\,i} = \left(\mathcal{A}^\dagger\right)_{ij} \,. \tag{6.2}$$

Es decir, la matriz asociada al operador adjunto $A^\dagger$ es la **matriz adjunta** (traspuesta y conjugada) de aquella asociada al operador A: $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^\dagger = (\mathcal{A}^t)^*$.

Si A es un operador acotado, la norma del operador adjunto coincide con la norma de A. En efecto,

$$\| A^\dagger \| = \sup_{\{x,y \ \text{unitarios}\}} \left|\left(x, A^\dagger\, y\right)\right| = \sup_{\{x,y \ \text{unitarios}\}} |(y, A\,x)^*| = \| A \| \,. \tag{6.3}$$

Si x_0 (unitario) es un vector máximo de $A \neq \mathbf{O}$ (es decir, $\| A\,x_0 \| = \| A \| > 0$), entonces $y_0 = A\,x_0 / \| A \|$ (también unitario) es un vector máximo de $A^\dagger$. En efecto,

$$\begin{gathered} \| A \|^2 = \| A\,x_0 \|^2 = \left(x_0, A^\dagger\, A\,x_0\right) \leq \| x_0 \| \, \| A^\dagger\, A\,x_0 \| \leq \\ \leq \| A^\dagger \| \, \| A\,x_0 \| = \| A^\dagger \| \, \| A \| = \| A \|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \| A^\dagger\, y_0 \| = \| A^\dagger \| \,. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Un espacio euclídeo es automáticamente un espacio de Banach, dado que el producto escalar permite definir una norma con esas propiedades.

Definición 6.1. Un operador acotado A definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ se dice **simétrico** si

$$(A\,x, y) = (x, A\,y)\,,\ \forall\, x, y \in \mathbf{E}\,. \tag{6.5}$$

Dado que

$$(A\,x, y) = (y, A\,x)^* = (A^\dagger\, y, x)^* = (x, A^\dagger\, y)\,, \tag{6.6}$$

un operador simétrico acotado coincide con su adjunto. En efecto, de (6.5) y (6.6) resulta que

$$\Big(x, \big(A^\dagger - A\big)\, y\Big) = 0\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,, \tag{6.7}$$

y en particular, para $x = \big(A^\dagger - A\big)\, y$. En consecuencia,

$$\parallel \big(A^\dagger - A\big)\, y \parallel = 0\,,\ \forall\, y \in \mathbf{E}\,, \tag{6.8}$$

de modo que, por el tercer axioma del producto escalar (ec. (1.3)), es $A^\dagger\, y = A\, y\,, \forall\, y \in \mathbf{E}$. Es decir, $A^\dagger = A$.

Definición 6.2. Un operador que coincide con su adjunto se dice **autoadjunto**.[3]

Los elementos de matriz de un operador simétrico A en un espacio euclídeo de dimensión finita, generado por la base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, satisfacen

$$(A\, e_i, e_j) = (e_j, A\, e_i)^* = \mathcal{A}^*_{j\,i} = (e_i, A\, e_j) = \mathcal{A}_{ij}\,. \tag{6.9}$$

En consecuencia, la matriz asociada a A es **autoadjunta** (coincide con su traspuesta conjugada), $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}$.

7. Subespacios invariantes. Autovectores y autovalores

Un subespacio de un espacio euclídeo, $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$, se dice **invariante** frente a la acción del operador $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ si

$$\forall\, x \in \mathbf{E}'\,,\ A\, x \in \mathbf{E}'\,. \tag{7.1}$$

Ejemplos:

- Los **subespacios triviales E** y $\{\mathbf{0}\}$ son invariantes frente a la acción de todo operador lineal sobre $\mathbf{E}$.
- Todo subespacio de $\mathbf{E}$ es invariante frente a la acción de $\mathbf{O}$ y de $\mathbf{I}$.

[3]La diferencia entre los términos simétrico y autoadjunto se pondrá en evidencia más adelante, al considerar operadores no acotados.

• El operador de proyección P sobre un subespacio de dimensión finita $\mathbf{E}_n \subset \mathbf{E}$ (definido en la ec. (3.3)) deja invariante al subespacio $\mathbf{E}_n$ y a su complemento ortogonal $\mathbf{E}_n^{\perp}$. En efecto,

$$P\,u = u \in \mathbf{E}_n\,,\ \forall\, u \in \mathbf{E}_n\,, \quad P\,v = \mathbf{0} \in \mathbf{E}_n^{\perp}\,,\ \forall\, v \perp \mathbf{E}_n\,. \tag{7.2}$$

• El operador diagonal de la ec. (3.7) deja invariante el subespacio generado por cualquier subconjunto de vectores de la base.

• El operador de multiplicación de la ec. (3.9), definido sobre $\mathcal{C}_2(a,b)$ como $A\,x(t) = \varphi(t)\,x(t)$, con $\varphi(t)$ continua, deja invariante el subespacio de las funciones continuas en $[a,b]$ que se anulan idénticamente en el intervalo $\Delta \subset [a,b]$.

• El conjunto de las combinaciones lineales de las funciones $\cos t$ y $\sin t$, $\mathcal{L}\{\cos t, \sin t\} \subset \mathcal{C}_2(-\pi,\pi)$, es un subespacio invariante frente a la acción del operador diferencial $D\,x(t) = x'(t)$. $\diamond$

Definición 7.1. Los subespacios unidimensionales invariantes respecto de un operador lineal A juegan un papel especial. Todo vector no nulo de esas **direcciones invariantes** es un **autovector** de A.

Dado un autovector $x \in \mathbf{E}$, $A\,x$ es necesariamente colineal con x,

$$A\,x = \lambda\,x\,,\ \text{para un } \lambda \in \mathbb{C}\,. \tag{7.3}$$

Todo otro vector y de esa dirección invariante es también colineal con x, y puede escribirse como $y = c\,x$, con $c \in \mathbb{C}$. Entonces, $A\,y = A(c\,x) = c\,A\,x = \lambda\,y$, de modo que el número λ, llamado **autovalor** de A correspondiente al autovector x, es independiente del vector no nulo seleccionado, siendo una característica de ese subespacio unidimensional invariante.

Ejemplos:

• Todo vector no nulo $x \in \mathbf{E}$ es un autovector de los operadores $\mathbf{O}$ e $\mathbf{I}$,

$$\mathbf{O}\,x = 0\,x\,, \quad \mathbf{I}\,x = 1\,x\,. \tag{7.4}$$

• Para el operador de proyección tenemos

$$P\,u = 1\,u\,,\ \forall\, u \in \mathbf{E}_n\,, \quad P\,v = 0\,v\,,\ \forall\, v \perp \mathbf{E}_n\,. \tag{7.5}$$

• El operador de multiplicación por una función $\varphi(t)$ real monótona no tiene autovectores.

En efecto, consideremos la **ecuación de autovalores**

$$A\,x(t) = \varphi(t)\,x(t) = \lambda\,x(t)\,. \tag{7.6}$$

Si $x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$ es no nula en un punto $t = t_0$, entonces es no nula en todo un entorno de dicho punto $\Delta \subset (a,b)$. En consecuencia, $\forall\, t \in \Delta$ debe ser $\varphi(t) = \lambda$, ecuación que no tiene solución para λ si $\varphi(t)$ es monótona creciente o decreciente. Por lo tanto, no existe ninguna función continua $x(t)$, no idénticamente nula, que satisfaga la ec. (7.6).

• Para el operador diferencial $D\,x(t) = x'(t)$, definido sobre el subespacio de las funciones diferenciables en (a,b), la ecuación de autovalores tiene solución $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}$:

$$x'(t) = \lambda\,x(t) \;\Rightarrow\; x(t) \sim e^{\lambda\,t}\,. \tag{7.7}$$

Si $-\infty < a < b < \infty$, tenemos que $\parallel e^{\lambda\,t} \parallel < \infty$, y ese es un vector del espacio $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}$.

En consecuencia, este operador tiene un conjunto infinito de autovectores correspondientes a autovalores diferentes. $\diamond$

8. Propiedades de los autovectores

Teorema 8.1. *Los autovectores $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ de un operador lineal A, correspondientes a autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$, son linealmente independientes.*

La prueba se hace inductivamente, por reducción al absurdo. Supongamos que los $m-1$ primeros autovectores son linealmente independientes, pero que podemos formar una combinación lineal nula con los m primeros autovectores,

$$c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \cdots + c_{m-1}\,x_{m-1} + c_m\,x_m = \mathbf{0}\,, \tag{8.1}$$

con no todos los coeficientes c_k nulos. Aplicando el operador $(A - \lambda_m\,\mathbf{I})$ a ambos miembros de esta ecuación obtenemos

$$(\lambda_1 - \lambda_m)\,c_1\,x_1 + (\lambda_2 - \lambda_m)\,c_2\,x_2 + \cdots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)\,c_{m-1}\,x_{m-1} + 0\,x_m = \mathbf{0}\,, \tag{8.2}$$

lo que requiere que $c_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots, m-1$. Pero entonces, de (8.1) resulta que $c_m\,x_m = \mathbf{0}$, en contradicción con la hipótesis. $\square$

De aquí resulta, en particular, que un operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita n no puede tener más de n autovectores correspondientes a autovalores distintos.

Teorema 8.2. *Los autovectores de un operador lineal A correspondientes a un mismo autovalor λ conforman un subespacio lineal $\mathbf{E}_\lambda \subset \mathbf{E}$.*

En efecto, si

$$A\,x_1 = \lambda\,x_1\,,\ A\,x_2 = \lambda\,x_2 \ \Rightarrow\ A(c_1\,x_1 + c_2\,x_2) = \lambda(c_1\,x_1 + c_2\,x_2)\,. \tag{8.3}$$

□

$\mathbf{E}_\lambda$ es llamado **subespacio característico** correspondiente al autovalor λ.

En el caso de operadores simétricos, también valen los siguientes resultados.

Teorema 8.3. *Los autovalores de un operador lineal simétrico A son reales.*

En efecto, supongamos que $A\,x = \lambda\,x$; entonces

$$\lambda \parallel x \parallel^2 = (x, A\,x) = (A\,x, x) = \lambda^* \parallel x \parallel^2 \Rightarrow\ \lambda^* = \lambda\,. \tag{8.4}$$

□

Teorema 8.4. *Los autovectores de un operador lineal simétrico A correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales entre sí.*

Supongamos que $A\,x = \lambda\,x$ y $A\,y = \lambda\,y$, con $\lambda \neq \mu$. Entonces,

$$(\lambda - \mu)(y, x) = (y, A\,x) - (A\,y, x) = 0 \ \Rightarrow\ (y, x) = 0\,. \tag{8.5}$$

Por lo tanto, $x \perp y$ si $\lambda \neq \mu$. □

Teorema 8.5. *Sea $\mathbf{E}'$ un subespacio invariante frente a la acción de un operador lineal simétrico A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$. Entonces, el complemento ortogonal de $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$, es también un subespacio invariante frente a A.*

En efecto, por hipótesis tenemos que $A\,x' \in \mathbf{E}'$, $\forall\,x' \in \mathbf{E}'$. Entonces, $\forall\,x' \in \mathbf{E}'$ y $\forall\,x'' \in \mathbf{E}''$,

$$(x'', A\,x') = 0 \ \Rightarrow\ (A\,x'', x') = 0\,, \tag{8.6}$$

dado que A es simétrico. Por lo tanto, $A\,x'' \perp \mathbf{E}'$, $\forall\,x'' \in \mathbf{E}''$. □

Los siguientes resultados establecen condiciones suficientes para la existencia de autovectores de operadores simétricos acotados definidos sobre espacios euclídeos de cualquier dimensión.

Lema 8.6. *Sea A un operador simétrico y e un vector unitario. Entonces,*

$$\| A\, e \|^2 \leq \| A^2\, e \| \,, \tag{8.7}$$

donde vale la igualdad sólo si e es un autovector de A^2 con autovalor $\lambda = \| A\, e \|^2$.

En efecto, de la desigualdad de Cauchy - Schwarz obtenemos

$$\| A\, e \|^2 = (A\, e, A\, e) = (e, A^2\, e) \leq \| e \| \, \| A^2\, e \| = \| A^2\, e \| \,, \tag{8.8}$$

donde la desigualdad se reduce a una igualdad únicamente cuando ambos vectores en el producto escalar son colineales, es decir, si

$$A^2\, e = \lambda\, e \,. \tag{8.9}$$

En ese caso, $(e, A^2\, e) = \lambda = \| A\, e \|^2$. □

Lema 8.7. *Si e_0 es un vector (unitario) máximo de un operador simétrico acotado A, entonces e_0 es un autovector de A^2 correspondiente al autovalor $\lambda = \| A \|^2$.*

Si e_0 es un vector máximo de A, entonces $\| A\, e_0 \| = \| A \|$.

Del Lema anterior, y del hecho de que A es acotado, podemos escribir que

$$\| A \|^2 = \| A\, e_0 \|^2 \leq \| A^2\, e_0 \| \leq \| A \| \, \| A\, e_0 \| = \| A \|^2 \,, \tag{8.10}$$

de modo que las desigualdades en (8.10) se reducen a igualdades.

Por el Lema 8.6, sabemos entonces que e_0 es un autovector de A^2 con autovalor $\lambda = \| A\, e_0 \|^2$,

$$A^2\, e_0 = \lambda\, e_0 \,, \quad \lambda = \| A\, e_0 \|^2 = \| A \|^2 \ . \tag{8.11}$$

□

Lema 8.8. *Si el operador simétrico acotado A tiene un vector máximo e_0, entonces A también tiene un autovector con autovalor $\mu = \| A \|$ o $\mu = - \| A \|$.*

Del Lema anterior sabemos que

$$A^2\, e_0 = \| A \|^2\, e_0 \ \Rightarrow \ \Big(A - \| A \| \, \mathbf{I} \Big) \Big(A + \| A \| \, \mathbf{I} \Big) e_0 = \mathbf{0} \,. \tag{8.12}$$

Sea $x_0 = \Big(A + \| A \| \, \mathbf{I} \Big) e_0$. Tenemos dos posibilidades,

$$x_0 = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ A\, e_0 = - \| A \| \, e_0 \,, \tag{8.13}$$

o bien

$$x_0 \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \ A\, x_0 = \| A \| \, x_0 \,. \tag{8.14}$$

En cualquier caso, existe un vector $e \neq \mathbf{0}$ tal que $A\, e = \mu\, e$, con $|\mu| = \| A \|$. □

De hecho, ya hemos visto que en un espacio euclídeo de dimensión finita todo operador lineal es acotado y tiene un vector máximo (ver Lema 5.2). En ese caso puede establecerse el siguiente teorema.

Teorema 8.9. *Todo operador simétrico A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$ de dimensión finita n, tiene n autovectores ortogonales entre sí.*

En efecto, por el Lema 5.2 sabemos que existe en $\mathbf{E}_n$ un vector unitario que es un máximo de A. Y, siendo A simétrico, por el Lema 8.8 sabemos que entonces tiene un autovector e_1 correspondiente a un autovalor λ_1, $A\,e_1 = \lambda_1\,e_1$, tal que $|\lambda_1| = M_1 = \parallel A \parallel$.

Ahora bien, el subespacio generado por e_1, $\mathcal{L}\{e_1\}$, es invariante frente a la acción de A. Por lo tanto (ver Teorema 8.5), también lo es su complemento ortogonal, $\mathbf{E}_{n-1} = \left(\mathcal{L}\{e_1\}\right)^{\perp}$,

$$A : \mathbf{E}_{n-1} \to \mathbf{E}_{n-1}\,. \tag{8.15}$$

Esto permite considerar la acción del operador A restringida al subespacio $\mathbf{E}_{n-1}$, de dimensión $n-1$, donde también define un operador simétrico y acotado. Su "norma"en este subespacio,

$$M_2 := \sup_{\{x\in\mathbf{E}_{n-1},\,\text{unitario}\}} \parallel A\,x \parallel \leq \sup_{\{x\in\mathbf{E}_{n},\,\text{unitario}\}} \parallel A\,x \parallel = M_1\,, \tag{8.16}$$

no supera a la norma de A en el espacio completo.

El mismo argumento que antes permite concluir que existe en $\mathbf{E}_{n-1}$ un segundo autovector de A, e_2 (ortogonal a e_1 por construcción), $A\,e_2 = \lambda_2\,e_2$, correspondiente a un autovalor cuyo valor absoluto no supera a M_1, $|\lambda_2| = M_2 \leq |\lambda_1| = M_1$.

Si ahora consideramos el subespacio lineal generado por esos dos autovectores, $\mathcal{L}\{e_1, e_2\}$, vemos que es invariante, al igual que su complemento ortogonal $\mathbf{E}_{n-2} = \left(\mathcal{L}\{e_1, e_2\}\right)^{\perp}$, de dimensión $n-2$. Podemos repetir la construcción anterior para obtener un tercer autovector de A, ortogonal a los dos anteriores, correspondiente a un autovalor cuyo valor absoluto no supera a M_2.

Este proceso puede repetirse hasta obtener n (máximo número de vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión n) autovectores de A ortogonales entre sí, ordenados de modo que el valor absoluto de sus autovalores forme una secuencia no creciente:

$$\begin{gathered} A\,e_k = \lambda_k\,e_k\,,\ k = 1, 2, \dots, n\,, \\ \text{con } e_i \perp e_j\,, \text{ para } i \neq j\,, \text{ y } \parallel A \parallel = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|\,. \end{gathered} \tag{8.17}$$

□

Corolario 8.10. *Todo operador simétrico A definido sobre un espacio euclídeo de dimensión finita n es* **diagonal**, *es decir, existe una base ortonormal del espacio formada por autovectores de A.*

Nótese que la matriz asociada a A referida a dicha base es diagonal, $\mathcal{A}_{ij} = (e_i, A\, e_j) = \lambda_i\, \delta_{ij}$.

El polinomio característico de $\mathcal{A}$, $P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda)$, sólo puede tener raíces reales. Toda raíz de multiplicidad $1 < r \leq n$ corresponde a r autovectores **degenerados** (linealmente independientes y correspondientes al mismo autovalor) del operador A.

A diferencia de lo que ocurre en espacios de dimensión finita, un operador simétrico en un espacio de dimensión infinita puede o no tener autovectores, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

• Ya hemos visto que el operador A de multiplicación por una función real, continua y monótona $\varphi(t)$ no tiene autovectores (ver ec. (7.6)). No obstante, se trata de un operador acotado y simétrico en $\mathcal{C}_2(a, b)$. En efecto,

$$\| A\, x \|^2 = \int_a^b \varphi^2(t)\, |x(t)|^2\, dt \leq M^2 \int_a^b |x(t)|^2\, dt\,, \tag{8.18}$$

si $|\varphi(t)| \leq M$ para $t \in [a, b]$. Por lo tanto, $\| A \| \leq M$. Por otra parte, $\forall\, x, y \in \mathcal{C}_2(a, b)$ tenemos

$$\begin{array}{c} (y, A\, x) = \int_a^b y(t)^* \Big(\varphi(t)\, x(t)\Big)\, dt = \\ = \int_a^b \Big(\varphi(t)\, y(t)\Big)^*\, x(t)\, dt = (A\, y, x)\,. \end{array} \tag{8.19}$$

En consecuencia, este operador no tiene un vector máximo.

El Lema 8.8 establece como condición suficiente para la existencia de autovectores de un operador simétrico que éste sea acotado y tenga un vector máximo. Si bien esta última condición se satisface automáticamente en el caso de dimensión finita, este ejemplo muestra que ella no puede relajarse en el caso de operadores en espacios de dimensión infinita.

• El operador integral de Fredholm, definido en la ec. (3.10), es simétrico si su núcleo $K(t, s)$ (continuo en ambas variables) es una función **Hermítica**, $K(s, t) =$

$K(t,s)^*$. En efecto,

$$(8.20)\qquad \begin{aligned}(y, A\,x) &= \textstyle\int_a^b y(t)^* \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds\,dt = \\ &= \textstyle\int_a^b \left(\int_a^b K(s,t)\,y(t)\,dt\right)^* x(s)\,ds = (A\,y, x)\,.\end{aligned}$$

Veremos más adelante que este operador es acotado, tiene un vector máximo y un conjunto infinito de autovectores linealmente independientes.

• El operador de Sturm - Liouville es un operador diferencial de segundo orden definido sobre un subespacio $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{C}_2(a,b)$, que contiene funciones con derivadas segundas continuas, de modo que

$$(8.21)\qquad z(t) = L\,x(t) := \Big(p(t)\,x'(t)\Big)' + q(t)\,x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)\,,$$

$\forall\, x(t) \in \mathcal{D}(L)$, donde $p(t)$, $p'(t)$ y $q(t)$ son funciones reales y continuas.

Está claro que L es un operador lineal. Si L es además simétrico en su dominio de definición $\mathcal{D}(L)$, la diferencia

$$(8.22)\qquad \begin{aligned}&(y, L\,x) - (L\,y, x) = \\ &= \int_a^b \left\{ y(t)^* \left[\Big(p(t)\,x'(t)\Big)' + q(t)\,x(t)\right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\Big(p(t)\,y'(t)\Big)' + q(t)\,y(t)\right]^* x(t) \right\} dt = \\ &= \int_a^b \left[p(t)\Big(y(t)^*\,x'(t) - y'(t)^*\,x(t)\Big)\right]' dt = \\ &= p(b)\Big[y(b)^*\,x'(b) - y'(b)^*\,x(b)\Big] - p(a)\Big[y(a)^*\,x'(a) - y'(a)^*\,x(a)\Big]\end{aligned}$$

ha de ser nula $\forall\, x, y \in \mathcal{D}(L)$.

Para una función $p(t)$ arbitraria (aparte de ser continua en el intervalo cerrado $[a,b]$) debe garantizarse que la contribución de cada límite de integración sea nula imponiendo **condiciones de contorno locales** (es decir, condiciones en cada extremo de ese intervalo) a las funciones en $\mathcal{D}(L)$.

Consideremos, por ejemplo, la contribución del límite inferior. Una posibilidad es requerir simplemente que $x(a) = 0$ para toda $x(t) \in \mathcal{D}(L)$. Pero supongamos que ese no sea el caso, y tomemos dos funciones en $\mathcal{D}(L)$ que no se anulen en a;

entonces podemos escribir

$$\frac{x'(a)}{x(a)} = \left(\frac{y'(a)}{y(a)}\right)^* . \tag{8.23}$$

En particular, si tomamos $y = x$ vemos que ese cociente debe ser real e independiente de la función considerada,

$$x'(a) = c\, x(a)\,, \ c \in \mathbb{R}\,, \ \forall\, x \in \mathcal{D}(L) \mid x(a) \neq 0\,. \tag{8.24}$$

Finalmente, si $x(t)$ satisface esa condición, entonces toda otra función $y(t) \in \mathcal{D}(L)$ debe satisfacer que

$$\begin{aligned} y(a)^*\, x'(a) - y'(a)^*\, x(a) = \Big(y(a)\, c - y'(a)\Big)^*\, x(a) = 0 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ y'(a) = c\, y(a)\,. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Por lo tanto, el caso más general de condición de contorno local en $t = a$ corresponde a requerir de las funciones en $\mathcal{D}(L)$ que

$$\alpha\, x'(a) + \beta\, x(a) = 0\,, \ \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 + \beta^2 \neq 0\,. \tag{8.26}$$

En particular, $\alpha = 0 \Rightarrow x(a) = 0$.

Similarmente, la condición de contorno local más general en $t = b$ se expresa como

$$\gamma\, x'(b) + \delta\, x(b) = 0\,, \ \text{con } \gamma, \delta \in \mathbb{R} \mid \gamma^2 + \delta^2 \neq 0\,. \tag{8.27}$$

Con las funciones en su dominio de definición sujetas a estas condiciones, el operador L resulta simétrico. Como las condiciones de contorno son homogéneas, el conjunto $\mathcal{D}(L)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{C}_2(a, b)$.

Más adelante veremos que este operador tiene un conjunto infinito de autovectores linealmente independientes, no obstante ser no acotado. Este ejemplo muestra que las condiciones del Lema 8.8 para la existencia de autovectores de operadores simétricos son suficientes pero no necesarias.

• Un caso particular de operador de Sturm - Liouville con esas propiedades se obtiene cuando la función $p(t)$ toma el mismo valor en los extremos del intervalo $[a, b]$, $p(b) = p(a)$. En ese caso L también resulta simétrico si se imponen condiciones de contorno **periódicas** o **antiperiódicas** a las funciones en su dominio de definición,

$$x(b) = \pm x(a)\,, \ x'(b) = \pm x'(a)\,, \tag{8.28}$$

como puede comprobarse fácilmente de (8.22).

• Finalmente, de la ec. (8.22) también se deduce que si $p(t)$ se anula en un extremo del intervalo $[a, b]$, no es necesario imponer a las funciones condiciones de contorno en ese punto para que L resulte simétrico. $\diamond$

9. Distancia y límite en espacios euclídeos

Definición 9.1. En un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ se define la **distancia** entre dos vectores $x, y \in \mathbf{E}$ como la norma de su diferencia,

$$\rho(x,y) := \parallel x - y \parallel \ . \tag{9.1}$$

De las propiedades de la norma en $\mathbf{E}$ resulta que[4], $\forall\, x, y, z \in \mathbf{E}$,

- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (simetría),
- $\rho(y,x) \geq 0$ y $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positividad),
- $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (desigualdad triangular).

Definición 9.2. Diremos que una secuencia de vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}$ **converge** al vector $x \in \mathbf{E}$ si

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x) = 0\,, \tag{9.2}$$

lo que también se indica por $x_k \to x$. Esto significa que, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N(\varepsilon)$ entonces $\rho(x_k, x) = \parallel x_k - x \parallel < \varepsilon$.

En ese caso, el vector x es llamado **límite** de la secuencia.

Teorema 9.3. *Si existe el límite de una secuencia, entonces ese límite es único.*

En efecto, supongamos que existen dos vectores x e y que son el límite de la secuencia, $x_k \to x$ y $x_k \to y$. Entonces, $\forall\, \varepsilon > 0$ tenemos que $\rho(x_k, x) < \varepsilon/2$ y $\rho(x_k, y) < \varepsilon/2$ si k es suficientemente grande. En consecuencia, de la desigualdad triangular resulta que

$$0 \leq \rho(x,y) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y) < \varepsilon\,. \tag{9.3}$$

[4] Un **espacio métrico** consiste en un conjunto de puntos $x, y, z, \ldots$ entre los cuales hay definida una **distancia** $\rho(x,y)$ que satisface los siguientes axiomas:

- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,
- $\rho(y,x) > 0$ para todo $x \neq y$, y $\rho(x,x) = 0$ para todo x,
- $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

De las propiedades de la norma resulta que todo espacio de Banach (y, por consiguiente, todo espacio euclídeo) es un espacio métrico.

Es decir, $\rho(x,y)$ es menor que cualquier número positivo. Por lo tanto $\rho(x,y) = \| x - y \| = 0 \;\Rightarrow\; x = y$. $\square$

Ejemplos:

• Consideremos una secuencia convergente en un espacio euclídeo de dimensión finita n, generado por la base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$. Entonces, los vectores de la secuencia convergente pueden escribirse como $\{x_k = \xi_k^{(1)}\, e_1 + \cdots + \xi_k^{(n)}\, e_n\,,\ k = 1, 2, \dots\}$, y tienen como límite al vector $x = \xi^{(1)}\, e_1 + \cdots + \xi^{(n)}\, e_n$ si

$$\rho(x_k, x)^2 = \left|\left| \left(\xi_k^{(1)} - \xi^{(1)}\right) e_1 + \cdots + \left(\xi_k^{(n)} - \xi^{(n)}\right) e_n \right|\right|^2 = \tag{9.4}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \xi_k^{(i)} - \xi^{(i)} \right|^2 \to 0 \text{ cuando } k \to \infty\,.$$

Siendo una suma de términos no negativos, esto exige que cada término tienda a cero, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k^{(i)} = \xi^{(i)}\,,\ i = 1, 2, \dots, n\,. \tag{9.5}$$

Por lo tanto, la convergencia de una secuencia de vectores en un espacio euclídeo de dimensión finita equivale a la convergencia de cada una de las secuencias numéricas formadas por los coeficientes de Fourier de los vectores referidos a un sistema ortonormal y completo en ese espacio.

• En el espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$, la convergencia de la secuencia $x_k(t) \to x(t)$ significa que

$$\rho(x_k, x)^2 = \| x_k - x \|^2 = \int_a^b |x_k(t) - x(t)|^2 \, dt \to 0 \tag{9.6}$$

cuando $k \to \infty$. En consecuencia, se trata de una **convergencia en media**. $\diamond$

Recordemos que una secuencia de funciones continuas $\{x_k(t),\ k = 1, 2 \dots\}$ converge **uniformemente** a la función (continua) $x(t)$ en el intervalo $[a, b]$ si

$$\lim_{k\to\infty} \left\{\sup_{\{a\leq t\leq b\}} |x_k(t) - x(t)|\right\} = 0\,. \tag{9.7}$$

Lema 9.4. *Toda secuencia uniformemente convergente en un intervalo de longitud finita, $b - a < \infty$, es también convergente en media.*

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, $|x_k(t) - x(t)|^2 < \varepsilon\ \forall\, t$, si k es suficientemente grande, de modo que

$$\int_a^b |x_k(t) - x(t)|^2 \, dt < \varepsilon(b - a)\,. \tag{9.8}$$

En esas condiciones, la distancia $\rho(x_k, x)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera con sólo tomar k suficientemente grande[5]. $\square$

Pero la recíproca no vale: la convergencia en media no implica convergencia uniforme. En realidad, ni siquiera implica convergencia puntual en ningún punto del intervalo $[a, b]$.

Por ejemplo, consideremos una secuencia de funciones reales y continuas $x_k(t)$, que tomen valores entre 0 y 1 y sean nulas fuera de un subintervalo $\triangle_k \subset [a, b]$ de longitud menor que $1/k$, en un punto del cual alcancen el valor 1. En esas condiciones, el cuadrado de la distancia entre $x_k(t)$ y el vector nulo,

$$\int_a^b \big(x_k(t) - \mathbf{0}(t)\big)^2 dt = \int_{\triangle_k} x_k^2(t)\, dt \leq 1 \times \int_{\triangle_k} dt < \frac{1}{k}\,, \tag{9.9}$$

tiende a 0 cuando $k \to \infty$. Por consiguiente, $x_k(t) \to \mathbf{0}(t)$ en el sentido de la convergencia en $\mathcal{C}_2(a, b)$.

No obstante,

$$\sup_{\{a \leq t \leq b\}} |x_k(t) - \mathbf{0}(t)| = 1\,,\ \forall\, k\,, \tag{9.10}$$

de modo que la secuencia no converge uniformemente a la función idénticamente nula. De hecho, puede demostrarse que no converge uniformemente a ninguna función continua.

Es más, los subintervalos $\triangle_k$ pueden ser elegidos de manera tal que la secuencia $\{x_k(t)\}$ no sea puntualmente convergente para ningún valor de t (por ejemplo, haciendo que ellos barran repetidas veces la distancia que media entre ambos extremos de $[a, b]$, de modo que para cada valor de t la secuencia numérica $\{x_k(t)\}$ sea oscilante).

---

[5] Nótese que este argumento sólo vale si la longitud del intervalo considerado es finita. En efecto, la convergencia uniforme en toda la recta no implica convergencia en media, como lo muestra el siguiente ejemplo: consideremos las funciones $x_k(t)$, pares y continuas, tales que

$$x_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{1 - \frac{t}{k}}\,,\ 0 \leq t \leq k\,, \\ \\ 0\,,\ t > k\,. \end{cases}$$

Esa secuencia converge uniformemente en toda la recta a la función idénticamente nula,

$$|x_k(t) - \mathbf{0}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0\,,\ \text{cuando } k \to \infty\,,$$

pero no converge en media a esa función,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_k(t) - \mathbf{0}(t)|^2\, dt = \frac{2}{k}\int_0^k \left(1 - \frac{t}{k}\right) dt = 1\,,\ \forall\, k\,.$$

10. Continuidad en espacios euclídeos

Definición 10.1. Una funcional f definida sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, $f:\mathbf{E}\to\mathbb{C}$, se dice **continua** en un punto $x\in\mathbf{E}$ si, para toda secuencia convergente $x_k\to x$, se tiene que la secuencia numérica $f(x_k)\to f(x)$.

Equivalentemente, f es continua en x si $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0$ tal que, si $\rho(y,x)<\delta(\varepsilon)$, entonces $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

Lema 10.2. *Una funcional lineal continua en $x=\mathbf{0}$ es continua en todo $x\in\mathbf{E}$.*

En efecto, $x_k\to x\Rightarrow(x_k-x)\to\mathbf{0}$, de modo que[6]

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_k)-f(x)|=\lim_{k\to\infty}|f(x_k-x)|=0\,. \tag{10.1}$$

□

Lema 10.3. *Una funcional lineal continua es acotada.*

Si $f(x)$ es continua, tenemos que

$$|f(x)-f(\mathbf{0})|=|f(x)|<\varepsilon\,,\ \forall\,x\ |\ \parallel x\parallel<\delta(\varepsilon)\,. \tag{10.2}$$

Sea $x\neq\mathbf{0}$, y $0<\delta_1<\delta(\varepsilon)$, entonces

$$\left|f\left(\delta_1\frac{x}{\parallel x\parallel}\right)\right|=\frac{\delta_1}{\parallel x\parallel}\,|f\,(x)|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |f\,(x)|<\frac{\varepsilon}{\delta_1}\ \parallel x\parallel\ . \tag{10.3}$$

Por lo tanto, tomando $K=\varepsilon/\delta_1$ tenemos

$$|f\,(x)|\leq K\parallel x\parallel,\ \forall\,x\in\mathbf{E}\,. \tag{10.4}$$

□

Lema 10.4. *Una funcional lineal acotada es continua.*

En efecto, supongamos que $|f(x)|\leq K\parallel x\parallel$, para todo $x\in\mathbf{E}$, y consideremos una secuencia convergente $x_k\to x$. Entonces,

$$|f(x_k)-f(x)|=|f(x_k-x)|\leq K\parallel x_k-x\parallel\to 0 \tag{10.5}$$

cuando $k\to\infty$. □

---

[6]Si, en cambio, se sabe que $f(x)$ es continua en un punto $y\neq\mathbf{0}$, teniendo en cuenta que $(x_k-x+y)\to y$, la linealidad de la funcional nos permite escribir que

$$|f(x_k)-f(x)|=|f(x_k-x+y)-f(y)|\to 0$$

cuando $k\to\infty$.

Teorema 10.5. *Como consecuencia de los tres Lemas anteriores resulta que, para una funcional lineal $f(x)$ definida sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *$f(x)$ es continua en $x = \mathbf{0}$,*
- *$f(x)$ es continua $\forall\, x \in \mathbf{E}$,*
- *$f(x)$ es acotada en $\mathbf{E}$.*

Ejemplos:

• Ya sabemos que el producto escalar por un vector fijo del espacio, $z \in \mathbf{E}$, define una funcional lineal, $f(x) := (z, x)\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}$. De la desigualdad de Cauchy - Schwarz resulta que

$$|f(x)| = |(z, x)| \leq \parallel z \parallel \parallel x \parallel\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{10.6}$$

Por lo tanto, esa funcional es continua en $\mathbf{E}$.

• Ya hemos dicho que toda funcional lineal en un espacio de dimensión finita corresponde al producto escalar por un vector fijo de ese espacio. Por el resultado anterior, vemos que toda funcional lineal en un espacio de dimensión finita es continua.

• Pero también sabemos que en $\mathcal{C}_2(a, b)$ existen funcionales lineales que no pueden ser representadas mediante el producto escalar por un vector fijo del espacio, como por ejemplo $f[x(t)] = x(t_0)$, con $t_0 \in (a, b)$ (ver ec. (2.6)). Esta funcional no es continua, dado que la convergencia en media no implica convergencia puntual en ningún punto. Por lo tanto, tampoco es acotada. $\diamond$

Lema 10.6. *En un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, el producto escalar es una funcional continua de sus dos argumentos. Esto significa que si las secuencias de vectores $x_k \to x$ e $y_k \to y$, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x, y)\ . \tag{10.7}$$

Para demostrarlo consideremos la diferencia

$$
\begin{aligned}
&\Big|(x,y)-(x_k,y_k)\Big| = \Big|(x,y)-\big(x-(x-x_k),y-(y-y_k)\big)\Big| = \\
&= \Big|(x,y-y_k)+(x-x_k,y)-(x-x_k,y-y_k)\Big| \le \\
&\le \Big|(x,y-y_k)\Big| + \Big|(x-x_k,y)\Big| + \Big|(x-x_k,y-y_k)\Big| \le \\
&\le \| x \| \, \| y-y_k \| + \| x-x_k \| \, \| y \| + \| x-x_k \| \, \| y-y_k \| \to 0
\end{aligned}
\tag{10.8}
$$

cuando $k \to \infty$. □

Propiedad 10.7. Como consecuencia del resultado anterior, la norma de un espacio euclídeo es una funcional continua: si $x_k \to x$ entonces $\| x_k \| \to \| x \|$.

Definición 10.8. Un operador A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, se dice **continuo** en un punto $x \in \mathbf{E}$ si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, si $\rho(y,x) < \delta(\varepsilon)$, entonces $\| A\,y - A\,x \| < \varepsilon$.

Lema 10.9. *Todo operador lineal acotado A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, es continuo.*

En efecto, si $x_k \to x$ entonces

$$
\| A\,x_k - A\,x \| = \| A\,(x_k - x) \| \le \| A \| \, \| x_k - x \| \to 0\,, \tag{10.9}
$$

cuando $k \to \infty$. □

11. Conjuntos densos en espacios euclídeos

Definición 11.1. Un elemento de un espacio euclídeo, $x \in \mathbf{E}$, se dice **punto límite** del conjunto $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ si existe una secuencia de vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset \mathbf{F}$ que converge al elemento x.

Dicho de otro modo, x es un punto límite de $\mathbf{F}$ si $\forall \varepsilon > 0$ existe $y \in \mathbf{F}$ tal que $\rho(x,y) < \varepsilon$.

Definición 11.2. Un conjunto $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ se dice **cerrado** si contiene a todos sus puntos límite.

Lema 11.3. *El complemento ortogonal de un subespacio de un espacio euclídeo es siempre un subespacio cerrado.*

Sea $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$, un subespacio de un espacio euclídeo, y sea $\mathbf{E}''$ su complemento ortogonal. Si $x \in \mathbf{E}$ es un punto límite de $\mathbf{E}''$, entonces existe una secuencia de vectores $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbf{E}''$ que converge a x, $x_k \to x$.

Ahora bien, para todo $y \in \mathbf{E}'$ tenemos que $(y, x_k) = 0\,,\ \forall\, k$. Y por la continuidad del producto escalar,

$$(y, x) = \lim_{k\to\infty} (y, x_k) = 0\,,\ \Rightarrow\ x \perp \mathbf{E}'\,. \tag{11.1}$$

Por lo tanto, $x \in \mathbf{E}''$. □

Definición 11.4. Dado un conjunto arbitrario de vectores de un espacio euclídeo, $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$, se llama **clausura** de $\mathbf{A}$, y se denota por $\bar{\mathbf{A}}$, a la unión de $\mathbf{A}$ con el conjunto de todos sus puntos límite.

Lema 11.5. *La clausura de un conjunto* $\mathbf{A}$ *es un conjunto cerrado.*

Sea a un punto límite de $\bar{\mathbf{A}}$; mostraremos que $a \in \bar{\mathbf{A}}$.

En efecto, $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\overline{x} \in \bar{\mathbf{A}}$ tal que $\rho(a, \overline{x}) < \varepsilon/2$. Pero siendo $\overline{x}$ un vector de la clausura de $\mathbf{A}$, tenemos que $\overline{x} \in \mathbf{A}$ o bien $\overline{x} \notin \mathbf{A}$ pero sí es un punto límite de $\mathbf{A}$. En cualquier caso, existe $x \in \mathbf{A}$ tal que $\rho(\overline{x}, x) < \varepsilon/2$.

Finalmente, por la desigualdad triangular tenemos

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, \overline{x}) + \rho(\overline{x}, x) < \varepsilon\,. \tag{11.2}$$

En consecuencia, a es un punto límite del conjunto $\mathbf{A}$ y, por lo tanto, $a \in \bar{\mathbf{A}}$. □

Todo conjunto cerrado $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ que contenga al conjunto $\mathbf{A}$ debe también contener a su clausura,

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{F}\ \Rightarrow\ \bar{\mathbf{A}} \subset \mathbf{F}\,. \tag{11.3}$$

En ese sentido, la clausura $\bar{\mathbf{A}}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a $\mathbf{A}$.

Ejemplo:

• La clausura del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ sobre la recta es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. De hecho, los números irracionales pueden ser introducidos como los límites de secuencias convergentes de racionales que no convergen a un racional, como por ejemplo

$$3\,, \frac{31}{10}\,, \frac{314}{100}\,, \frac{3141}{1000}\,, \frac{31415}{10000}\,, \dots \to \pi \notin \mathbb{Q}\,.$$

◇

Lema 11.6. *Todo subespacio de dimensión finita de un espacio euclídeo es un conjunto cerrado.*

En efecto, del Lema 3.1 sabemos que si $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ es un subespacio de dimensión finita, todo vector $x \in \mathbf{E}$ puede escribirse como la suma de dos vectores ortogonales entre sí, $x = u + v$, donde $u \in \mathbf{F}$ y $v \perp \mathbf{F}$.

Entonces, para $y \in \mathbf{F}$ tenemos

$$\rho(x,y)^2 = \| (u+v) - y \|^2 = \| u - y \|^2 + \| v \|^2 \geq \| v \|^2 \ . \tag{11.4}$$

Por lo tanto, $\forall\, y \in \mathbf{F}$ es $\rho(x,y) > 0$ si $x \notin \mathbf{F}$ (es decir, si $v \neq \mathbf{0}$). En consecuencia, ningún vector que no pertenece a $\mathbf{F}$ es un punto límite de ese subespacio. $\square$

Definición 11.7. Un conjunto $\mathbf{B} \subset \mathbf{E}$ se dice **denso** en el conjunto $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ si $\mathbf{A}$ está contenido en la clausura de $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} \text{ denso en } \mathbf{A} \ \Rightarrow\ \mathbf{A} \subset \bar{\mathbf{B}}\,. \tag{11.5}$$

Esto significa que todo elemento de $\mathbf{A}$ es un punto límite de $\mathbf{B}$, de modo que puede representarse como el límite de una secuencia convergente de vectores contenidos en $\mathbf{B}$,

$$\forall\, a \in \mathbf{A}\ \exists \{b_1, b_2, \dots\} \subset \mathbf{B} \ \Big|\ a = \lim_{k\to\infty} b_k\,. \tag{11.6}$$

Ejemplos:

• El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es denso en el conjunto de los reales, $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

• El subespacio de los polinomios a coeficientes reales,

$$\mathcal{P}_2(a,b) = \{P(t) = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \cdots + a_n\, t^n\ ,\ n \in \mathbb{N}\,,\ a_k \in \mathbb{R}\}\,. \tag{11.7}$$

es denso en el espacio de las funciones reales y continuas en $[a,b]$, $\mathcal{C}_2^{\Re}(a,b)$.

En efecto, el teorema de Weierstrass muestra que toda función real $f(t)$, continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, es el límite de una secuencia uniformemente convergente de polinomios con coeficientes reales, $\{P_1(t), P_2(t) \dots, P_k(t), \dots\}$ (ver, por ejemplo, R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1).

Esto implica (ver Lema 9.4) que toda función real y continua es el límite en media de una secuencia de polinomios a coeficientes reales, es decir, es un punto límite de $\mathcal{P}_2(a,b)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{C}_2^{\Re}(a,b) \subset \overline{\mathcal{P}_2(a,b)}\,. \tag{11.8}$$

◇

Lema 11.8. *Si el conjunto* $\mathbf{B} \subset \mathbf{E}$ *es denso en* $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$*, y a su vez* $\mathbf{A}$ *es denso en* $\mathbf{E}$*, entonces* $\mathbf{B}$ *es denso en* $\mathbf{E}$*.*

En efecto, si $\mathbf{B}$ es denso en $\mathbf{A}$, entonces

$$\mathbf{A} \subset \bar{\mathbf{B}} \;\Rightarrow\; \bar{\mathbf{A}} \subset \bar{\mathbf{B}} \,. \tag{11.9}$$

Por otra parte, si $\mathbf{A}$ es denso en $\mathbf{E}$, entonces

$$\mathbf{E} \subset \bar{\mathbf{A}} \;\Rightarrow\; \mathbf{E} \subset \bar{\mathbf{B}} \,. \tag{11.10}$$

Por lo tanto, $\mathbf{B}$ es denso en $\mathbf{E}$. □

Ejemplo:

• El conjunto de polinomios con coeficientes racionales,

$$\mathcal{Q}_2(a,b) = \{Q(t) = q_0 + q_1\,t + q_2\,t^2 + \cdots + q_n\,t^n \,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ q_k \in \mathbb{Q}\}\,, \tag{11.11}$$

es denso en el espacio de los polinomios con coeficientes reales $\mathcal{P}_2(a,b)$, que a su vez es denso en $\mathcal{C}_2^{\Re}(a,b)$. Por el lema anterior, $\mathcal{Q}_2(a,b)$ es denso en $\mathcal{C}_2^{\Re}(a,b)$.

Para mostrar que $\mathcal{Q}_2(a,b)$ es denso en $\mathcal{P}_2(a,b)$, consideremos un polinomio $P(t) = a_0 + a_1\,t + \cdots + a_n\,t^n \in \mathcal{P}_2(a,b)$, y elijamos n números racionales $q_0, q_1, \ldots, q_n$ tales que $|a_k - q_k| < \varepsilon/(2^{k+1} \parallel t^k \parallel)$, con $\varepsilon > 0$ (lo que siempre es posible, dado que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$).

Entonces, llamando $Q(t) = q_0 + q_1\,t + \cdots + q_n\,t^n$ y empleando la desigualdad triangular para la norma, tenemos

$$\begin{array}{c} \parallel P(t) - Q(t) \parallel = \\[2ex] = \parallel (a_0 - q_0)\,t^0 + (a_1 - q_1)\,t + \cdots + (a_n - q_n)\,t^n \parallel \leq \\[2ex] \leq\ |a_0 - q_0| \parallel t^0 \parallel + |a_1 - q_1| \parallel t \parallel + \cdots + |a_n - q_n| \parallel t^n \parallel < \\[2ex] < \dfrac{\varepsilon}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \,<\, \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \,=\, \varepsilon \,. \end{array} \tag{11.12}$$

El conjunto $\mathcal{Q}_2(a,b)$ tiene además la particularidad de ser **numerable**[7] (es decir, puede ser puesto en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales). $\diamond$

Definición 11.9. Un espacio euclídeo que contiene un conjunto denso y numerable se dice **separable**.

Ejemplo:

• El espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$ es separable. En efecto, sea $x(t) = x_R(t) + i\,x_I(t)$, con $x_R(t), x_I(t) \in \mathcal{C}_2^{\Re}(a,b)$. Entonces podemos elegir dos polinomios con coeficientes racionales $Q_R(t)$ y $Q_I(t)$ tales que $\| x_{R,I}(t) - Q_{R,I}(t) \| < \varepsilon/2$.

En consecuencia, por la desigualdad triangular,

$$\begin{array}{c} \| x(t) - (Q_R(t) + i\,Q_I(t)) \| \leq \\ \leq \| x_R(t) - Q_R(t) \| + \| x_I(t) - Q_I(t) \| < \varepsilon\,. \end{array} \tag{11.13}$$

Finalmente, notemos que el conjunto de los polinomios de la forma $Q_R(t) + i\,Q_I(t)$ es numerable, dado que sus elementos están en correspondencia uno a uno con los pares ordenados de elementos de un conjunto numerable, de la forma $\langle Q_R(t), Q_I(t)\rangle$ con $Q_{R,I}(t) \in \mathcal{Q}_2(a,b)$, que también forman un conjunto numerable (ver Lema 28.4). $\diamond$

12. Secuencias de Cauchy en espacios euclídeos

Una secuencia de vectores $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ en un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ se dice **fundamental** o **de Cauchy** si $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x_k, x_l) < \varepsilon\,,\ \forall\, k, l > N(\varepsilon)\,, \tag{12.1}$$

es decir, si

$$\lim_{k,l\to\infty} \rho(x_k, x_l) = 0\,. \tag{12.2}$$

Lema 12.1. *Toda secuencia convergente es fundamental.*

En efecto, supongamos que $x_k \to x$. Entonces, de la desigualdad triangular para la distancia tenemos que

$$\rho(x_k, x_l) \leq \rho(x_k, x) + \rho(x, x_l) \to 0 \tag{12.3}$$

[7]Para demostrar esta propiedad debemos previamente mostrar que el conjunto de los números racionales es numerable, así como ciertas propiedades de la unión de conjuntos numerables. Para ello, ver Apéndice 28.

cuando $k, l \to \infty$. $\square$

En la recta, el criterio de Cauchy establece que toda secuencia fundamental es convergente. Pero en un espacio euclídeo general puede haber secuencias de Cauchy que no tengan límite en ese espacio, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

• Consideremos una secuencia en $\mathcal{C}_2(a,b)$ formada por funciones reales $x_k(t)$ que tomen valores entre 0 y 1, y tales que, para todo $\delta > 0$, converjan uniformemente a 0 en el intervalo $[a, c-\delta]$ y a 1 en el intervalo $[c+\delta, b]$, con $a < c < b$.

Consideremos la distancia entre dos elementos cualesquiera de esa secuencia,

$$\rho(x_k, x_l)^2 = \int_a^b |x_k(t) - x_l(t)|^2 \, dt =$$

$$= \int_a^{c-\delta} |x_k(t) - x_l(t)|^2 \, dt + \int_{c+\delta}^b |x_k(t) - x_l(t)|^2 \, dt + \tag{12.4}$$

$$+ \int_{c-\delta}^{c+\delta} |x_k(t) - x_l(t)|^2 \, dt \,.$$

Como la secuencia es uniformemente convergente en $[a, c-\delta]$, dado $\varepsilon_1 > 0$, podemos tomar k y l suficientemente grandes como para que $|x_{k,l}(t) - 0| < \varepsilon_1$, para todo t en ese intervalo. Entonces,

$$\begin{array}{c} \displaystyle\int_a^{c-\delta} |x_k(t) - x_l(t)|^2 \, dt \leq \int_a^{c-\delta} \Big(|x_k(t)| + |x_l(t)| \Big)^2 dt < \\ < 4\,\varepsilon_1^2\,(c - \delta - a) < 4\,\varepsilon_1^2\,(c-a) \,. \end{array} \tag{12.5}$$

Similarmente, si $|x_{k,l}(t) - 1| < \varepsilon_2$ para $t \in [c+\delta, b]$, podemos escribir

$$\int_{c+\delta}^b |x_k(t) - x_l(t)|^2 \, dt < 4\,\varepsilon_2^2\,(b - c - \delta) < 4\,\varepsilon_2^2\,(b-c) \,. \tag{12.6}$$

Finalmente, para la última integral tenemos

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} |x_k(t) - x_l(t)|^2 \, dt \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} 2^2 \, dt = 8\,\delta \,. \tag{12.7}$$

Por lo tanto, si llamamos

$$\varepsilon^2 = 4\,\varepsilon_1^2\,(c-a) + 4\,\varepsilon_2^2\,(b-c) + 8\,\delta \,, \tag{12.8}$$

que puede hacerse tan pequeño como se quiera, tenemos

$$\rho(x_k, x_l) < \varepsilon \,, \tag{12.9}$$

para k, l suficientemente grandes, de modo que se trata de una secuencia fundamental.

No obstante, no existe ninguna función continua en $[a, b]$ que sea el límite en media de esta secuencia de Cauchy. En efecto, si $x(t)$ fuese el límite en media de la secuencia, tendríamos

$$\int_a^b |x_k(t) - x(t)|^2 \, dt \geq \int_a^{c-\delta} |x_k(t) - x(t)|^2 \, dt \to 0 \tag{12.10}$$

cuando $k \to \infty$. Como las $x_k(t)$ convergen uniformemente a 0 en ese intervalo, y la convergencia uniforme implica convergencia en media, la unicidad del límite en media requiere que $x(t) \equiv 0$, $t \in [a, c-\delta]$, para todo $\delta > 0$. Idéntico razonamiento permite concluir que $x(t) \equiv 1$, $t \in [c+\delta, b]$, para todo $\delta > 0$.

En consecuencia, independientemente del valor que tome en $t = c$, el límite en media de esa secuencia es una función discontinua en ese punto,

$$x(t) = \begin{cases} 0\,, & t \in [a, c)\,, \\ 1\,, & t \in (c, b]\,. \end{cases} \tag{12.11}$$

Esta función no es un elemento del espacio $\mathcal{C}_2(a, b)$ en el que estamos trabajando. $\diamond$

Lema 12.2. *Toda secuencia fundamental es acotada.*

Sea $\{x_k\,, k = 1, 2, \dots\}$ una secuencia de Cauchy, y sea $z \in \mathbf{E}$ un vector arbitrario del espacio euclídeo.

Para un dado $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que si $k > N$ entonces $\rho(x_N, x_k) < \varepsilon$. Si además llamamos $M = \text{máximo}\,\{\rho(z, x_k)\,,\ k = 1, 2, \dots, N\}$ tenemos

$$\rho(z, x_k) \leq \rho(z, x_N) + \rho(x_N, x_k) < M + \varepsilon\,,\ \forall\, k > N\,, \tag{12.12}$$

por lo que la secuencia es acotada. $\square$

13. Espacios completos

Un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ se dice completo si toda secuencia fundamental en $\mathbf{E}$ es convergente.

Ejemplo:

• Todo espacio euclídeo de dimensión finita es completo. En efecto, consideremos una secuencia de Cauchy arbitraria en un espacio de dimensión n, generado por la base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$,

$$x_k = \xi_k^{(1)}\, e_1 + \cdots + \xi_k^{(n)}\, e_n\,,\ k \in \mathbb{N}\,. \tag{13.1}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\rho(x_k,x_l)^2 &= \sum_{j=1}^{n} \left| \xi_k^{(j)} - \xi_l^{(j)} \right|^2 \geq \\
&\geq \Re\left\{\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right\}^2 + \Im\left\{\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right\}^2 ,\ i = 1,2,\ldots,n\,.
\end{aligned} \tag{13.2}
$$

Por lo tanto, la secuencia de números complejos $\{\xi_k^{(i)}, k \in \mathbb{N}\}$ es fundamental y, por el criterio de Cauchy, tiene un límite: $\exists\, \xi^{(i)} \in \mathbb{C}$ tal que

$$
\xi^{(i)} = \lim_{k\to\infty} \xi_k^{(i)} ,\ i = 1,2,\ldots,n\,. \tag{13.3}
$$

Esos n números definen un vector

$$
x = \xi^{(1)}\, e_1 + \cdots + \xi^{(n)}\, e_n \in \mathbf{E}\,, \tag{13.4}
$$

que es el límite de la secuencia. En efecto,

$$
\rho(x_k,x)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left|\xi_k^{(j)} - \xi^{(j)}\right|^2 \to 0 \tag{13.5}
$$

cuando $k \to \infty$ (dado que es una suma finita de términos que se anulan en ese límite).

Por lo tanto, toda secuencia fundamental en un espacio euclídeo de dimensión finita tiene límite, de modo que ese espacio es completo.

• Por otra parte, hemos visto en la Sección 12 que el espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$ no es completo. Esto plantea la pregunta acerca de la existencia de espacios completos de dimensión infinita, que el ejemplo tratado en la siguiente Sección responde afirmativamente. $\diamond$

14. El espacio $\mathcal{L}_2$

El espacio $\mathcal{L}_2$ se define como el conjunto de las secuencias de números reales tales que la suma de sus cuadrados es una serie convergente,

$$
\mathcal{L}_2 := \left\{ x = \{\xi^{(i)},\ i \in \mathbb{N}\} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi^{(i)}\right)^2 < \infty \right\} . \tag{14.1}
$$

Este conjunto resulta un espacio lineal respecto de las operaciones de suma y producto definidas de modo que, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$
x = \{\xi^{(i)},\ i \in \mathbb{N}\}, \quad y = \{\eta^{(i)},\ i \in \mathbb{N}\}\,, \tag{14.2}
$$

con

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\xi^{(i)}\right)^2<\infty\,,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\eta^{(i)}\right)^2<\infty\,, \tag{14.3}$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha\, x &:= \{\alpha\, \xi^{(i)}\,,\ i\in\mathbb{N}\}\,,\\ x+y &:= \{\xi^{(i)}+\eta^{(i)}\,,\ i\in\mathbb{N}\}\,. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Es evidente que elementos de la forma $x_m=\{\xi^{(i)}=\delta^i_m\,,\ i\in\mathbb{N}\}$, con $m\in\mathbb{N}$, son linealmente independientes. En consecuencia, el espacio $\mathcal{L}_2$ no tiene dimensión finita.

Este espacio resulta euclídeo respecto del producto escalar

$$(x,y):=\sum_{i=1}^{\infty}\xi^{(i)}\,\eta^{(i)}\,. \tag{14.5}$$

Para verificar que estas definiciones tienen sentido, consideremos primero la serie que define el producto escalar. La diferencia en valor absoluto de dos de sus sumas parciales,

$$\Big|S_{N+M}-S_N\Big|=\left|\sum_{i=N+1}^{N+M}\xi^{(i)}\,\eta^{(i)}\right|\leq\left\{\sum_{i=N+1}^{N+M}\left(\xi^{(i)}\right)^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=N+1}^{N+M}\left(\eta^{(i)}\right)^2\right\}^{1/2}, \tag{14.6}$$

como consecuencia de la desigualdad de Cauchy - Schwarz en $\mathbb{R}^M$. Ahora bien, dentro de cada una de las llaves del miembro de la derecha de (14.6) aparece la diferencia de dos sumas parciales de una serie convergente (ver ec. (14.3)). Esas sumas parciales forman una secuencia fundamental, de modo que el miembro de la derecha tiende a 0 cuando $N\to\infty$, para todo M.

En esas condiciones, la sucesión de sumas parciales de la serie en (14.5) satisface que

$$\lim_{N\to\infty}\Big(S_{N+M}-S_N\Big)=0\,,\quad \forall\, M\in\mathbb{N}\,, \tag{14.7}$$

y, por el criterio de Cauchy, tiene límite.

Por lo tanto, el producto escalar en (14.5) está definido para todo par de elementos de $\mathcal{L}_2$.

Este producto es simétrico y positivo definido. Además,

$$(x,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\xi^{(i)}\right)^2=0\Leftrightarrow x=\mathbf{0}=\{\xi^{(i)}=0\,,\ i\in\mathbb{N}\}\,, \tag{14.8}$$

por ser una serie de términos no negativos.

Consideremos ahora la suma de elementos de $\mathcal{L}_2$ en (14.4). Tenemos que, para todo M,

$$\sum_{i=N+1}^{N+M} \left(\xi^{(i)} + \eta^{(i)}\right)^2 = \sum_{i=N+1}^{N+M} \left(\xi^{(i)}\right)^2 + 2 \sum_{i=N+1}^{N+M} \xi^{(i)}\, \eta^{(i)} + \sum_{i=N+1}^{N+M} \left(\eta^{(i)}\right)^2 , \tag{14.9}$$

donde el miembro de la derecha tiende a 0 cuando $N \to \infty$, dado que cada término es la diferencia de dos sumas parciales de una serie convergente (ec. (14.3) y (14.5)). En consecuencia, por el criterio de Cauchy, existe el límite de la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi^{(i)} + \eta^{(i)}\right)^2 < \infty . \tag{14.10}$$

Por lo tanto, con la definición de (14.4), $x + y \in \mathcal{L}_2\,,\ \forall\, x, y \in \mathcal{L}_2$. Además, es inmediato mostrar que también $\alpha\, x \in \mathcal{L}_2$.

En conclusión, $\mathcal{L}_2$ es un espacio euclídeo. En lo que sigue mostraremos que es un espacio completo.

Consideremos una secuencia fundamental arbitraria en $\mathcal{L}_2$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, donde

$$x_k = \left\{\xi_k^{(i)}\,,\ i \in \mathbb{N}\right\} . \tag{14.11}$$

Entonces,

$$\rho(x_k, x_l)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right)^2 \to 0\,,\ k, l \to \infty . \tag{14.12}$$

Dado que se trata de una serie de términos no negativos, debe ser

$$\lim_{k,l\to\infty} \left(\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right) = 0\,,\ \forall\, i \in \mathbb{N} . \tag{14.13}$$

En consecuencia, para todo $i = 1, 2, \ldots$, obtenemos la secuencia fundamental $\{\xi_k^{(i)}\,,\ k \in \mathbb{N}\}$ que, por el criterio de Cauchy, tiene límite: $\exists\, \xi^{(i)} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\xi^{(i)} = \lim_{k\to\infty} \xi_k^{(i)} . \tag{14.14}$$

Con esos límites puede formarse la secuencia $x = \{\xi^{(i)}\,,\ i \in \mathbb{N}\}$.

Para mostrar que x así definido es un elemento de $\mathcal{L}_2$, recordemos que toda secuencia de Cauchy es acotada. Por lo tanto, $\forall\, k$ tenemos

$$\rho(x_k, \mathbf{0})^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_k^{(i)}\right)^2 \leq K < \infty , \tag{14.15}$$

donde K no depende de k.

Entonces, $\forall\, N \in \mathbb{N}$ fijo resulta que

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)}\right)^2 \leq K\,,\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{14.16}$$

Tomando el límite de esa suma finita para $k \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\xi^{(i)}\right)^2 \leq K\,,\ \ \forall\, N \in \mathbb{N}\,. \tag{14.17}$$

Entonces, en el límite $N \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi^{(i)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi^{(i)}\right)^2 \leq K < \infty \Rightarrow x \in \mathcal{L}_2\,. \tag{14.18}$$

Ahora mostraremos que este vector $x \in \mathcal{L}_2$ es el límite de la secuencia fundamental en (14.11). Para ello, tengamos en cuenta que, dado $\varepsilon > 0$,

$$\rho(x_k, x_l)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{14.19}$$

para k, l suficientemente grandes. Tratándose de una serie de términos no negativos, ella es mayor o igual que cualquiera de sus sumas parciales. Podemos entonces escribir que

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall\, N \in \mathbb{N}\,. \tag{14.20}$$

Si ahora, con N fijo, tomamos el límite de esta suma finita para $l \to \infty$ resulta

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)} - \xi^{(i)}\right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall\, N \in \mathbb{N}\,, \tag{14.21}$$

para todo k suficientemente grande.

Finalmente, tomando el límite $N \to \infty$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)} - \xi^{(i)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_k^{(i)} - \xi^{(i)}\right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,, \tag{14.22}$$

para todo k suficientemente grande.

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x) = 0\,, \tag{14.23}$$

y la secuencia de Cauchy considerada converge a un elemento de $\mathcal{L}_2$.

En conclusión, toda secuencia fundamental en $\mathcal{L}_2$ es convergente, de modo que se trata de un espacio euclídeo completo.

Veremos ahora que el espacio $\mathcal{L}_2$ es separable. Para ello tengamos en cuenta que, si $x = \{\xi^{(i)}\,,\ i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{L}_2$, dado $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi^{(i)}\right)^2 < \infty \ \Rightarrow \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\xi^{(i)}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{14.24}$$

para N suficientemente grande.

Por otra parte, sea

$$q = \{q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(N)}, 0, 0, \ldots\} \in \mathcal{L}_2\,, \tag{14.25}$$

donde los racionales $q^{(i)} \in \mathbb{Q}$ son elegidos de manera que

$$\left(\xi^{(i)} - q^{(i)}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2^{1+i}}\,. \tag{14.26}$$

En esas condiciones,

$$\begin{array}{c} \rho(x,q)^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left(\xi^{(i)} - q^{(i)}\right)^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\xi^{(i)}\right)^2 < \\ < \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{1+i}} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon\,. \end{array} \tag{14.27}$$

Por lo tanto, el conjunto de elementos de la forma (14.25) es denso en $\mathcal{L}_2$. Además, ese conjunto es numerable, dado que puede establecerse una relación biunívoca entre sus elementos y los polinomios con coeficientes racionales,

$$q \leftrightarrow Q(t) = q^{(1)}\, t^0 + q^{(2)}\, t^1 + \cdots + q^{(N)}\, t^{N-1}\,, \tag{14.28}$$

los que forman un conjunto numerable.

En conclusión, $\mathcal{L}_2$ contiene un conjunto denso numerable, es decir, es separable.

Definición 14.1. Un espacio euclídeo de dimensión infinita, completo y separable es llamado **espacio de Hilbert**.

Ejemplo:

• El espacio $\mathcal{L}_2$ es un espacio de Hilbert. $\diamond$

15. Completamiento de espacios euclídeos

Definición 15.1. Dos secuencias de Cauchy, $\{x_k\,, k = 1, 2, \ldots\}$, $\{y_k\,, k = 1, 2, \ldots\} \subset$ $\mathbf{E}$, se dicen **coterminales** si

$$\lim_{k\to\infty} \parallel x_k - y_k \parallel = 0\,. \tag{15.1}$$

Si la secuencia fundamental $\{x_k\,, k = 1, 2, \dots\}$ es coterminal con la secuencia $\{y_k\,, k = 1, 2, \dots\}$, y ésta es coterminal con $\{z_k\,, k = 1, 2, \dots\}$, entonces la primera es coterminal con la segunda. En efecto,

$$\rho(x_k, z_k) \le \rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, z_k)\,. \tag{15.2}$$

Evidentemente, esto corresponde a una relación de equivalencia, en la que dos secuencias están en la misma clase de equivalencia si y sólo si son coterminales.

El conjunto $\bar{\mathbf{E}}$ de las clases de equivalencia de secuencias coterminales en el espacio euclídeo $\mathbf{E}$, $X = \{\{x_k\,,\ k = 1, 2, \dots\} \subset \mathbf{E} \mid \text{coterminales}\}$, se estructura como un espacio lineal respecto de las operaciones lineales definidas a continuación:

- Dados $X, Y \in \bar{\mathbf{E}}$, tomamos dos secuencias representativas, $\{x_k\} \in X$, $\{y_k\} \in Y$, y con ellas formamos la secuencia $\{z_k = x_k + y_k\}$. Esta secuencia es también fundamental,

$$\| z_k - z_l \| \le \| x_k - x_l \| + \| y_k - y_l \| \to 0\,,\ k, l \to \infty\,, \tag{15.3}$$

  y en consecuencia pertenece a cierta clase $Z \in \bar{\mathbf{E}}$.

  En esas condiciones, se define

$$X + Y := Z\,. \tag{15.4}$$

  Esta definición es unívoca, ya que si $\{x'_k\} \in X$, $\{y'_k\} \in Y$, la secuencia $\{z'_k = x'_k + y'_k\} \in Z$. En efecto,

$$\| z_k - z'_k \| \le \| x_k - x'_k \| + \| y_k - y'_k \| \to 0\,,\ k, l \to \infty\,. \tag{15.5}$$

- Similarmente, $\lambda X \in \bar{\mathbf{E}}$ es aquella clase a la que pertenece la secuencia fundamental $\{\lambda x_k\}$, donde $\{x_k\} \in X$. Resulta inmediato verificar que esta definición también es unívoca.

Queda como ejercicio verificar que en $\bar{\mathbf{E}}$ se satisfacen los axiomas de espacio vectorial.

En particular, el elemento neutro respecto de la suma es la clase de secuencias convergentes a $\mathbf{0}$, $\bar{O}$. En efecto, si $\{x_k\} \in X$ y $\{y_k\} \in \bar{O}$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \| (x_k + y_k) - x_k \| = \lim_{k\to\infty} \| y_k \| = 0 \ \Rightarrow\ \{x_k + y_k\} \in X\,. \tag{15.6}$$

El espacio lineal $\bar{\mathbf{E}}$ puede estructurarse como un espacio euclídeo si se introduce un producto escalar entre clases $X, Y \in \bar{\mathbf{E}}$. Para ello consideremos secuencias fundamentales representativas de cada una de esas clases, $\{x_k\} \in X$, $\{y_k\} \in Y$, y tomemos el producto escalar (en $\mathbf{E}$) de sus elementos genéricos, $\{(x_k, y_k)\ \ k =$

$1, 2, \dots\}$. Estos números definen una secuencia de Cauchy que, en consecuencia, tiene un límite:

$$\begin{aligned} \Big| (x_k, y_k) - (x_l, y_l) \Big| &= \Big| (x_k, y_k - y_l) + (x_k - x_l, y_l) \Big| \leq \\ &\leq \Big| (x_k, y_k - y_l) \Big| + \Big| (x_k - x_l, y_l) \Big| \leq \\ &\leq \| \, x_k \, \| \, \| \, y_k - y_l \, \| + \| \, x_k - x_l \, \| \, \| \, y_l \, \| \to 0 \, , \ k, l \to \infty \, , \end{aligned} \tag{15.7}$$

dado que toda secuencia fundamental es acotada.

El límite de esta secuencia numérica sólo depende de las clases seleccionadas en $\bar{\mathbf{E}}$, y no de las secuencias representativas consideradas. En efecto, sean dos secuencias coterminales con las anteriores, $\{x'_k\} \in X$ y $\{y'_k\} \in Y$; entonces

$$\begin{aligned} \Big| (x_k, y_k) - (x'_k, y'_k) \Big| &= \Big| (x_k, y_k - y'_k) + (x_k - x'_k, y'_k) \Big| \leq \\ &\leq \Big| (x_k, y_k - y'_k) \Big| + \Big| (x_k - x'_k, y'_k) \Big| \leq \\ &\leq \| \, x_k \, \| \, \| \, y_k - y'_k \, \| + \| \, x_k - x'_k \, \| \, \| \, y'_k \, \| \to 0 \, , \ k, l \to \infty \, . \end{aligned} \tag{15.8}$$

En esas condiciones, se define

$$\big(X, Y\big) := \lim_{k \to \infty} (x_k, y_k) \tag{15.9}$$

Es evidente que esta definición satisfacen los dos primeros axiomas del producto escalar en un espacio euclídeo. En cuanto al tercero, para $\{x_k\} \in X$ tenemos

$$(x_k, x_k) \geq 0 \ \Rightarrow \ \big(X, X\big) \geq 0 \, , \tag{15.10}$$

y si

$$\big(X, X\big) = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{k \to \infty} \| \, x_k \, \|^2 = 0 \ \Rightarrow \ x_k \to \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \{x_k\} \in \bar{O} \, , \tag{15.11}$$

es decir, $X = \bar{O}$.

El espacio Euclídeo $\bar{\mathbf{E}}$ así conformado tiene las siguientes propiedades:

- $\bar{\mathbf{E}}$ contiene un subespacio $\mathbf{E}_1$ isomorfo a $\mathbf{E}$.

  En efecto, cada vector de $\mathbf{E}$ puede asociarse de manera unívoca con la clase de secuencias coterminales que lo tienen por límite,

$$x \leftrightarrow X_x = \Big\{ \{x_k\} \mid x_k \to x \Big\} \, , \ y \leftrightarrow X_y = \Big\{ \{y_k\} \mid y_k \to y \Big\} \, . \tag{15.12}$$

  Entonces

$$\alpha \, x + \beta \, y \leftrightarrow \alpha \, X_x + \beta \, X_y \, , \tag{15.13}$$

y el producto escalar

$$\big(X_x, X_y\big) = \lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x, y)\,. \tag{15.14}$$

- El subespacio $\mathbf{E}_1$ es denso en $\bar{\mathbf{E}}$.

  Consideremos una secuencia fundamental $\{x_k\} \in X \in \bar{\mathbf{E}}$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N$ entonces $\rho(x_k, x_N) < \frac{\varepsilon}{2}$.

  Sea $X_{x_N} \in \mathbf{E}_1$ la clase de las secuencias que convergen a x_N. En particular, X_{x_N} contiene la secuencia $\{x_N, x_N, \dots\}$. Entonces

$$\| X - X_{x_N} \| = \lim_{k\to\infty} \| x_k - x_N \| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,. \tag{15.15}$$

  Por lo tanto, todo elemento de $\bar{\mathbf{E}}$ es un punto límite de $\mathbf{E}_1$.

- El espacio $\bar{\mathbf{E}}$ es completo.

  Consideremos una secuencia fundamental $\big\{X_k\big\} \subset \bar{\mathbf{E}}$,

$$\| X_k - X_l \| < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall\, k, l > n_0(\varepsilon)\,,\ \forall\, \varepsilon > 0\,. \tag{15.16}$$

  Si $\{x_{k,r}\} \in X_k$ y $\{x_{l,r}\} \in X_l$, con $k, l > n_0(\varepsilon)$,

$$\lim_{r\to\infty} \| x_{k,r} - x_{l,r} \| < \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow \| x_{k,r} - x_{l,r} \| < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall\, r > r_0(\varepsilon)\,. \tag{15.17}$$

  Sea $y_k = x_{k,k}$, y llamemos $N(\varepsilon) = \text{máximo}\,\{n_0(\varepsilon), r_0(\varepsilon)\}$. Entonces, si $k, l > N(\varepsilon)$,

$$\| y_k - y_l \| = \| x_{k,k} - x_{l,l} \| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{15.18}$$

  Por lo tanto, la secuencia $\{y_k\}$ es fundamental, y pertenece a cierta clase $Y \in \bar{\mathbf{E}}$.

  Ahora bien, si $k > N(\varepsilon)$,

$$\| X_k - Y \| = \lim_{l\to\infty} \| x_{k,l} - y_l \| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,\ \forall\, \varepsilon > 0\,. \tag{15.19}$$

  En consecuencia, $Y = \lim_{k\to\infty} X_k$, lo que muestra que toda secuencia de Cauchy en $\bar{\mathbf{E}}$ tiene un límite en ese espacio.

Podemos resumir estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 15.2. *Dado un espacio euclídeo de dimensión infinita* $\mathbf{E}$ *(en general, no completo), existe un espacio euclídeo completo* $\bar{\mathbf{E}}$*, llamado* **completamiento** *de* $\mathbf{E}$*, que contiene un subespacio denso isomorfo a* $\mathbf{E}$*.*

Finalmente señalemos que, dados dos espacios euclídeos isomorfos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$, sus completamientos $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{E}}'$ también son isomorfos entre sí.

16. La integral de Lebesgue

Hemos visto que el espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$ no es completo, en el sentido de que no toda secuencia fundamental en $\mathcal{C}_2(a,b)$ converge en media a una función continua. No obstante, en virtud del Teorema 15.2, sabemos que es posible construir (de manera abstracta) un completamiento para ese espacio, $\overline{\mathcal{C}_2(a,b)}$, que contiene un subespacio denso isomorfo a $\mathcal{C}_2(a,b)$.

Veremos que es posible dar a $\overline{\mathcal{C}_2(a,b)}$ un significado concreto, interpretándolo como el conjunto de cierta clase de funciones.

En particular, la integral de Riemann (definida para funciones continuas) ha sido una herramienta esencial para definir el producto escalar en $\mathcal{C}_2(a,b)$. La necesidad de incorporar al espacio funciones más generales hace necesario generalizar también ese producto escalar, expresándolo en términos de la **integral de Lebesgue**.

El desarrollo de la teoría de la integral de Lebesgue excede las posibilidades de este curso (ver, por ejemplo, la bibliografía indicada), por lo que nos contentaremos con dar aquí sólo una presentación intuitiva de ese concepto.

Definición 16.1. Diremos que un conjunto de puntos $\triangle \subset [a,b]$ tiene **medida** menor que un número $\varepsilon > 0$ si $\triangle$ puede ser contenido en un conjunto (finito o infinito numerable) de intervalos cuya longitud total sea menor que ε.

Ejemplo:

• El conjunto de los números racionales tiene medida menor que cualquier número positivo ε.

En efecto, siendo un conjunto numerable, $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$, el k-ésimo racional puede ser contenido en un intervalo de longitud $< \varepsilon/2^k$, de manera tal que la longitud total de esos intervalos será menor que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon\,. \tag{16.1}$$

◇

Definición 16.2. Un conjunto de medida menor que cualquier número positivo se dice **de medida nula**.

Definición 16.3. Una función $f(t)$, definida en un intervalo $[a,b]$, se dice **medible** si, $\forall\,\varepsilon > 0$, ella puede ser redefinida en un conjunto de medida menor que ε del intervalo $[a,b]$ de manera tal que la función resultante sea continua.

Ejemplos:

• Una función con un número finito de discontinuidades aisladas es medible. Basta con redefinir adecuadamente a la función en un entorno suficientemente pequeño de cada punto de discontinuidad para obtener una función continua.

• Una función con una singularidad aislada, como

$$f(t) = \begin{cases} t^{-\alpha}\,, \text{ para } 0 < t \leq 1\,, \\ 0\,, \text{ para } t = 0\,, \end{cases} \tag{16.2}$$

con $\alpha > 0$, es medible. Ella puede ser redefinida en el intervalo $(0, \varepsilon)$, por ejemplo, como una función lineal que se anule en el origen y tome el valor $\varepsilon^{-\alpha}$ en $t = \varepsilon$. De esa manera se obtiene una función continua en el intervalo $[0, 1]$ para todo $\varepsilon > 0$.

• La función de Dirichlet, definida en el intervalo $[0, 1]$ como

$$\chi(t) = \begin{cases} 1\,,\ \forall\, t \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,,\ \forall\, t \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases} \tag{16.3}$$

es una función medible. En efecto, el conjunto de los números racionales puede ser contenido en un subconjunto de $[0, 1]$ de medida menor que cualquier $\varepsilon > 0$. Redefiniendo allí adentro a la función, por ejemplo, como tomando valores nulos se obtiene una función continua, idénticamente nula. ◇

16.1. Integral de Lebesgue. Consideremos una función medible en el intervalo $[a, b]$, $f(t)$, que toma valores no negativos. Entonces, dada una secuencia de números positivos $\varepsilon_k \to 0$, para cada k podemos construir una función continua $f_k(t)$, que también tome valores no negativos, y que sólo difiera de la anterior en un conjunto de medida menor que ε_k.

Si esas funciones $f_k(t)$ pueden ser construidas de manera tal que sus integrales (en el sentido de Riemann) tengan una cota superior común, entonces la función $f(t)$ se dice **sumable** o **integrable en el sentido de Lebesgue**.

En ese caso, se puede demostrar que las funciones $f_k(t)$ pueden ser elegidas de modo que sus integrales formen una secuencia convergente cuyo límite, no obstante, puede depender de la esa elección.

En efecto, si la función $f(t)$ ha sido modificada en un intervalo $\triangle$, de longitud δ, a los efectos de obtener una función continua $f_k(t)$, nada impide sumarle a $f_k(t)$ una función continua no negativa, que se anule fuera de $\triangle$ y cuya gráfica sea, por ejemplo, un triángulo de base δ y altura $2c/\delta$, con $c > 0$. Esa modificación incrementa en c el valor de su integral,

$$\int_a^b f_k(t)\, dt \;\to\; c + \int_a^b f_k(t)\, dt\,. \tag{16.4}$$

Entonces, el límite de la secuencia de integrales puede ser incrementado arbitrariamente. Pero la condición $f_k(t) \geq 0$ impide que pueda ser disminuido arbitrariamente.

En esas condiciones, se define la integral de Lebesgue de $f(t)$ (y se la denota por el mismo símbolo que la integral de Riemann) como la mayor cota inferior o **ínfimo** del conjunto de valores posibles para el limite de la secuencia de integrales de las funciones $f_k(t)$,

$$\int_a^b f(t)\, dt := \text{Inf}\left\{\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(t)\, dt\right\}\,, \tag{16.5}$$

donde deben tenerse en cuenta todas las posibles elecciones de las funciones $f_k(t)$.

Con esa definición, se puede demostrar que si una función que toma valores no negativos $f(t)$ tiene una integral de Riemann (porque es continua), o una integral de Riemann impropia (como es el caso de una función con una discontinuidad, o con una singularidad integrable $f(t) = t^{-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$), entonces también es sumable, y su integral de Lebesgue coincide con su integral en el sentido de Riemann.

Similarmente, una función no negativa que tiene una singularidad no integrable, $f(t) = t^{-\alpha}$, con $\alpha > 1$, tampoco es integrable en el sentido de Lebesgue dado que, en ese caso, las integrales de las funciones $f_k(t)$ no están acotadas.

No obstante, existen funciones que no tienen una integral de Riemann (ni propia ni impropia) pero que sí son integrables en el sentido de Lebesgue.

Un ejemplo es la función de Dirichlet, ec. (16.3). Esta función no es integrable en el sentido de Riemann, porque el límite de las integrales de funciones escalonadas que aproximan a $\chi(t)$ por arriba no coincide con el límite de las que la aproximan por abajo.

Pero esta función medible puede ser modificada en conjuntos de medida arbitrariamente pequeña, de modo de obtener una secuencia de funciones continuas $\chi_k(t)$ cuyas integrales estén acotadas. La elección de estas funciones que conduce a los mínimos valores posibles para sus integrales corresponde a tomar $\chi_k(t) \equiv 0$ para todo k. Entonces,

$$\int_0^1 \chi(t)\, dt = \text{Inf}\left\{\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \chi_k(t)\, dt\right\} = 0\,. \tag{16.6}$$

Propiedad 16.4. Si $f(t) \geq 0$ es una función integrable de Lebesgue, y $0 \leq g(t) \leq f(t)$, entonces $g(t)$ también es sumable y su integral satisface

$$0 \leq \int_a^b g(t)\, dt \leq \int_a^b f(t)\, dt \,. \tag{16.7}$$

Definición 16.5. Una función medible $f(t)$, que toma valores tanto positivos como negativos, se dice sumable si su valor absoluto $|f(t)|$ es sumable.

En ese caso, por la propiedad anterior, las funciones

$$\begin{aligned} f_+(t) &= \max\{0, f(t)\} \leq |f(t)| \,, \\ f_-(t) &= \max\{0, -f(t)\} \leq |f(t)| \,, \end{aligned} \tag{16.8}$$

que toman valores no negativos, son integrables de Lebesgue. Dado que $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$, se define la integral de Lebesgue de esa función como

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b f_+(t)\, dt - \int_a^b f_-(t)\, dt \,. \tag{16.9}$$

Si la función $f(t)$ toma valores complejos, y su módulo $|f(t)|$ es sumable, entonces se define

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b \Re\{f(t)\}\; dt + i \int_a^b \Im\{f(t)\}\; dt \,. \tag{16.10}$$

Se puede demostrar que la integral de Lebesgue así definida tiene las mismas propiedades de linealidad que la integral de Riemann,

$$\int_a^b \{\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)\}\; dt = \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt \,. \tag{16.11}$$

17. El espacio $\mathbf{L}_2(a,b)$

Se llama $\mathbf{L}_2(a,b)$ al espacio de las funciones $f(t)$ medibles en el intervalo $[a,b]$, cuyos módulos al cuadrado son sumables,

$$\int_a^b |f(t)|^2\; dt < \infty \,. \tag{17.1}$$

Este conjunto se estructura como un espacio lineal respecto de las operaciones usuales de suma de funciones,

$$(f+g)\,(t) := f(t) + g(t) \,, \tag{17.2}$$

y producto de funciones por números,

$$(\alpha\, f)\,(t) := \alpha\, f(t)\,. \tag{17.3}$$

Quisiéramos hacer de él un espacio euclídeo introduciendo un producto escalar similar al del espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$, pero empleando la integral de Lebesgue,

$$\big(f(t), g(t)\big) := \int_a^b f(t)^*\, g(t)\, dt\,. \tag{17.4}$$

Primero verifiquemos que esa integral existe para todo par de funciones $f(t), g(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$. Para ello tengamos en cuenta que

$$0 \leq \Big(|f(t)| - |g(t)|\Big)^2 \;\Rightarrow\; \Big|\, f(t)\, g(t)\Big| \leq \frac{1}{2}\Big(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\Big)\,, \tag{17.5}$$

de donde resulta que $\big(f(t)^*\, g(t)\big)$ es sumable (ver Propiedad 16.4).

Si ahora consideramos la suma de dos funciones $f(t), g(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$,

$$\begin{array}{c} \Big|f(t) + g(t)\Big|^2 = \Big|f(t)^2 + 2f(t)\, g(t) + g(t)^2\Big| \leq \\ \\ \leq \Big|f(t)\Big|^2 + 2\Big|f(t)\, g(t)\Big| + \Big|g(t)\Big|^2\,, \end{array} \tag{17.6}$$

de donde resulta que $(f+g)(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$, que es lo que debe ocurrir en un espacio lineal.

En particular, el elemento neutro respecto de la suma es la función idénticamente nula $\mathbf{0}(t)$.

Por otra parte, de la definición de producto escalar, ec. (17.4), y de las propiedades de linealidad de la integral de Lebesgue, ec. (16.11), resulta inmediato probar que se satisfacen los dos primeros axiomas del espacio euclídeo.

En cuanto al tercero,

$$\Big|f(t)\Big|^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \Big(f(t), f(t)\Big) = \int_a^b \big|f(t)\big|^2\, dt \geq 0\,. \tag{17.7}$$

Pero si $\Big(f(t), f(t)\Big) = 0$, no podemos concluir de ello que $f(t) = \mathbf{0}(t)$, puesto que hemos visto que existen funciones a valores no negativos que (como la función de Dirichlet) tienen una integral de Lebesgue nula a pesar de no ser idénticamente nulas. Esto crea una dificultad con la segunda parte de este axioma.

Sin embargo, se puede demostrar que una función a valores no negativos, $u(t) \geq 0\; \forall\, t$, tiene una integral de Lebesgue nula sí y sólo si ella difiere de 0 en, a lo sumo, un conjunto de medida nula,

$$\int_a^b u(t)\, dt = 0 \;\Leftrightarrow\; u(t) = 0\,,\ \text{a.e.} \tag{17.8}$$

(donde la abreviatura a.e. significa **en casi todo punto** - almost everywhere).

En particular, esto implica que la "distancia" (derivada del "producto escalar" definido en la ec. (17.4)) entre dos funciones $f(t), g(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ es cero si esas funciones difieren sólo en un conjunto de medida nula,

$$f(t) = g(t)\,,\ \text{a.e.}\ \Rightarrow \int_a^b \left|f(t) - g(t)\right|^2 dt = 0\,. \tag{17.9}$$

A pesar de no ser idénticas, tales funciones deberían ser consideradas como el mismo vector del espacio euclídeo.

Esto sugiere identificar a todas las funciones de (módulo) cuadrado integrable que difieran unas de otras en, a lo sumo, un conjunto de medida nula con un mismo elemento del espacio. En particular, toda función nula en casi todo punto sería entonces equivalente al vector nulo $\mathbf{0}(t)$, con lo que también se satisfaría el tercer axioma del producto escalar.

Para ser más precisos: interpretamos a los elementos del espacio $\mathbf{L}_2(a,b)$ no como funciones individuales, sino como **clases de equivalencia de funciones de cuadrado sumable**, donde dos funciones están en la misma clase si coinciden en casi todo punto (es decir, si sólo difieren en un conjunto de medida nula).

Las operaciones lineales entre clases se definen a partir de las operaciones sobre funciones representativas de cada clase, siendo la clase resultante independiente de esta elección. En efecto, cambiar de funciones representativas produce un resultado que coincide con el anterior en casi todo punto, y entonces pertenece a la misma clase de equivalencia.

Finalmente, el producto escalar entre elementos de $\mathbf{L}_2(a,b)$ se define como en la ec. (17.4), a partir de dos funciones representativas de las clases. Esto también resulta independiente de esa elección, dado que cambiar de función en una clase corresponde a cambiar el integrando en, a lo sumo, un conjunto de medida nula, lo que no altera el valor de la integral.

Con esta interpretación, $\mathbf{L}_2(a,b)$ resulta un espacio euclídeo.

Por otra parte, se puede demostrar que las funciones continuas, que participan en la definición de la integral de Lebesgue

$$\int_a^b \left|f(t)\right|^2 dt = \text{Inf}\left\{\lim_{k\to\infty} \int_a^b \left|f_k(t)\right|^2 dt\right\}\ ,\ f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)\,, \tag{17.10}$$

pertenecen a clases de equivalencia que forman un subespacio denso en $\mathbf{L}_2(a,b)$. Evidentemente, este subespacio es isomorfo a $\mathcal{C}_2(a,b)$.

Dado que $\mathcal{C}_2(a, b)$ es un espacio euclídeo de dimensión infinita y separable (contiene un conjunto denso numerable), también lo es $\mathbf{L}_2(a, b)$.

Finalmente, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 17.1. *(de Riesz y Fischer)* $\mathbf{L}_2(a, b)$ *es un espacio euclídeo completo.*

Por lo tanto, $\mathbf{L}_2(a, b)$ es un espacio de Hilbert (espacio euclídeo de dimensión infinita, completo y separable), isomorfo al completamiento de $\mathcal{C}_2(a, b)$.

Esta construcción puede ser generalizada al caso de varias variables.

Consideremos, por ejemplo, funciones de dos variables, $f(t, s)$, definidas en la región $[a, b] \times [c, d]$. Un conjunto de puntos de ese rectángulo tiene medida menor que $\varepsilon > 0$ si puede ser contenido en un conjunto finito o infinito numerable de rectángulos de área total menor que ε.

La definición de funciones medibles y sumables es enteramente similar a la del caso de una variable, así como la definición de integral de Lebesgue, que se denota por el mismo símbolo que la integral de Riemann, $\int_a^b \int_c^d f(t, s)\, dt\, ds$.

El conjunto de las clases de equivalencia de funciones de (módulo) cuadrado sumable en la región $[a, b] \times [c, d]$ conforma un espacio de Hilbert llamado $\mathbf{L}_2\left((a, b) \times (c, d)\right)$.

El siguiente resultado permite calcular integrales de Lebesgue dobles como integrales iteradas, como en el caso de integrales de Riemann dobles.

Teorema 17.2. *(de Fubini) Sea* $f(t, s)$ *una función sumable en el rectángulo* $a \leq t \leq b$, $c \leq s \leq d$.

Entonces, para t *fijo,* $f(t, s)$ *es una función sumable de la variable* s *en el intervalo* $[c, d]$*, excepto posiblemente para un conjunto de medida nula de valores de* t*. Su integral de Lebesgue*

$$F(t) = \int_c^d f(t, s)\, ds \tag{17.11}$$

(que existe en casi todo punto) es una función sumable de la variable t*, cuya integral coincide con el valor de la integral doble,*

$$\int_a^b F(t)\, dt = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(t, s)\, ds \right\} dt = \int_a^b \int_c^d f(t, s)\, dt\, ds\,. \tag{17.12}$$

Similarmente, la integral $\int_a^b f(t, s)\, dt$ *existe para casi todos los valores de* s*, y define una función sumable tal que*

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(t, s)\, dt \right\} ds = \int_a^b \int_c^d f(t, s)\, dt\, ds\,. \tag{17.13}$$

18. Complementos ortogonales

El Lema 3.1 muestra la existencia del complemento ortogonal de cualquier subespacio de dimensión finita. En lo que sigue mostraremos que en un espacio euclídeo completo es posible realizar una descomposición similar respecto de un subespacio arbitrario.

Lema 18.1. *Si $x \in \mathbf{E}$ es un vector ortogonal a un subespacio $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$, entonces x es también ortogonal a su clausura, $x \perp \bar{\mathbf{F}}$.*

En efecto, si $y \in \bar{\mathbf{F}}$, entonces $y = \lim_{k\to\infty} y_k$, con $y_k \in \mathbf{F}\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. En esas condiciones, por la continuidad del producto escalar,

$$(x, y) = \lim_{k\to\infty} (x, y_k) = 0\,, \tag{18.1}$$

dado que $x \perp y_k\,,\ \forall\, k$. Por lo tanto, $x \perp y\,,\ \forall\, y \in \bar{\mathbf{F}}$, es decir, $x \perp \bar{\mathbf{F}}$. □

Esto implica, en particular, que no existe ningún vector no nulo que sea ortogonal a un subespacio $\mathbf{F}$ denso en $\mathbf{E}$. Eso es así porque, si $x \perp \mathbf{F} \Rightarrow x \perp \mathbf{E} \subset \bar{\mathbf{F}}$. Entonces, $x \perp x \Rightarrow x = \mathbf{0}$.

En esas condiciones, será suficiente considerar subespacios cerrados (recordemos que, en particular, todo subespacio de dimensión finita es cerrado). También necesitaremos la siguiente propiedad.

Lema 18.2. *(del paralelogramo) Dados dos vectores $x, y \in \mathbf{E}$, vale la relación*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 \tag{18.2}$$

(es decir, la suma de los cuadrados las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados).

En efecto,

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= 2(x, x) + 2(y, y) = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2\ . \end{aligned} \tag{18.3}$$

□

Lema 18.3. *Consideremos un subespacio cerrado $\mathbf{F}$ de un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$. Todo vector $x \in \mathbf{E}$ puede ser expresado como la suma de dos vectores, $x = u + v$, donde $u \in \mathbf{F}$ y $v \perp \mathbf{F}$. Además, esos dos vectores están unívocamente definidos.*

Sea

$$d = \mathrm{Inf}_{\{y \in \mathbf{F}\}} \{\rho(x,y)\} \geq 0 \,. \tag{18.4}$$

Si $d = 0$, entonces x es un punto límite de $\mathbf{F} \Rightarrow x \in \mathbf{F}$, por ser $\mathbf{F}$ cerrado.

Supongamos que $x \notin \mathbf{F} \Rightarrow d > 0$. Eso quiere decir que existen en $\mathbf{F}$ vectores cuya distancia a x es mayor que d, pero tan próxima como se quiera a ese valor. En esas condiciones, podemos construir una secuencia $\{y_k\,,\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{F}$, tal que

$$\| \, x - y_k \, \| \rightarrow d \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty \,. \tag{18.5}$$

Aplicando el Lema 18.2 podemos escribir

$$2 \| \, x - y_k \, \|^2 + 2 \| \, x - y_l \, \|^2 = \| \, 2x - (y_k + y_l) \, \|^2 + \| \, y_k - y_l \, \|^2 \,, \tag{18.6}$$

de donde resulta que, $\forall \, k, l \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \| \, y_k - y_l \, \|^2 \leq 2 \left\{ \| \, x - y_k \, \|^2 + \| \, x - y_l \, \|^2 \right\} - 4 \, d^2 \,, \tag{18.7}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\left\| x - \frac{y_k + y_l}{2} \right\|^2 \geq d^2 \,, \tag{18.8}$$

dado que $(y_k + y_l)/2 \in \mathbf{F}$.

Ahora bien, por construcción, el miembro de la derecha de la ec. (18.7) tiende a 0 cuando $k, l \rightarrow \infty$, de donde se concluye que la secuencia $\{y_k\,,\ k \in \mathbb{N}\}$ es fundamental. Y como $\mathbf{E}$ es un espacio completo y $\mathbf{F}$ es cerrado, existe en ese subespacio el límite de la secuencia

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in \mathbf{F} \,. \tag{18.9}$$

Sea $v = x - u$. Su norma es

$$\| \, v \, \| = \| \, x - u \, \| = \lim_{k \rightarrow \infty} \| \, x - y_k \, \| = d > 0 \,. \tag{18.10}$$

Tomemos ahora un vector arbitrario $z \in \mathbf{F}$, y consideremos la combinación $u + \lambda \, z \in \mathbf{F}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces, el cuadrado de su distancia respecto del vector $x = u + v$ es

$$\begin{aligned} & \| \, x - (u + \lambda \, z) \, \|^2 = \| \, v - \lambda \, z \, \|^2 = \\ & = \| \, v \, \|^2 - 2 \, \Re \left\{ \lambda \, (v, z) \right\} + |\lambda|^2 \ \| \, z \, \|^2 \geq d^2 \,, \end{aligned} \tag{18.11}$$

de donde resulta que

$$2 \, \Re \left\{ \lambda \, (v, z) \right\} \leq |\lambda|^2 \ \| \, z \, \|^2 \,, \quad \forall \, z \in \mathbf{F} \,, \forall \, \lambda \in \mathbb{C} \,. \tag{18.12}$$

Primero tomemos $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\left.\begin{cases} 2\,\Re\{(v,z)\} \leq \lambda \parallel z \parallel^2, & \forall\,\lambda > 0\,, \\ \\ 2\,\Re\{(v,z)\} \geq \lambda \parallel z \parallel^2, & \forall\,\lambda < 0\,, \end{cases}\right\} \Rightarrow \Re\{(v,z)\} = 0\,. \tag{18.13}$$

Si ahora tomamos $\lambda = i\,\mu$, con $\mu \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\left.\begin{cases} 2\,\Im\{(v,z)\} \geq -\mu \parallel z \parallel^2, & \forall\,\mu > 0\,, \\ \\ 2\,\Im\{(v,z)\} \leq -\mu \parallel z \parallel^2, & \forall\,\mu < 0\,, \end{cases}\right\} \Rightarrow \Im\{(v,z)\} = 0\,. \tag{18.14}$$

Por lo tanto,

$$(v,z) = 0\,,\ \forall\, z \in \mathbf{F} \ \Rightarrow\ v \perp \mathbf{F}\,. \tag{18.15}$$

Finalmente, supongamos que x admite otra descomposición de la forma $x = u' + v'$, con $u' \in \mathbf{F}$ y $v' \perp \mathbf{F}$. Entonces,

$$0 = \parallel (u+v) - (u'+v') \parallel^2 = \parallel u - u' \parallel^2 + \parallel v - v' \parallel^2\,, \tag{18.16}$$

de donde resulta que $u' = u$ y $v' = v$, de modo que la descomposición es única. $\square$

Recordemos que el conjunto de los vectores ortogonales a un subespacio dado $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ forman el **complemento ortogonal** de $\mathbf{F}$, que es un subespacio cerrado.

Podemos resumir estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 18.4. *Para todo subespacio cerrado* $\mathbf{F}$ *de un espacio euclídeo completo* $\mathbf{E}$*, existe su complemento ortogonal* $\mathbf{F}^\perp$*, que es también un subespacio cerrado. Además, todo vector* $x \in \mathbf{E}$ *admite una descomposición única de la forma* $x = u+v$*, con* $u \in \mathbf{F}$ *y* $v \in \mathbf{F}^\perp$*.*

19. Desarrollos ortogonales

Definición 19.1. Se dice que un conjunto ortonormal de vectores de un espacio euclídeo, $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}$, es un **sistema completo** si no existen en $\mathbf{E}$ vectores no nulos que sean ortogonales a todos los vectores del sistema.

Esto es, el conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ es un sistema completo en un espacio $\mathbf{E}$ si las ecuaciones

$$(e_k, x) = 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ x = \mathbf{0}\,. \tag{19.1}$$

Por el momento no sabemos si tales sistemas existen, ni como construirlos en ese caso, pero sí podemos estudiar las consecuencias de su posible existencia.

Supongamos que tenemos un conjunto numerable de vectores ortonormales,

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}\,, \text{ con } (e_k, e_l) = \delta_{k\,l}\,, \tag{19.2}$$

y que un vector $x \in \mathbf{E}$ tiene un desarrollo de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k\,. \tag{19.3}$$

En (19.3), la serie converge en el sentido de la distancia en $\mathbf{E}$, es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \parallel x - S_N \parallel = 0\,, \tag{19.4}$$

donde

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k\, e_k \tag{19.5}$$

es la N-ésima suma parcial de la serie.

Para N dado, consideremos el producto escalar

$$(e_k, S_N) = \sum_{l=1}^{N} a_l\, (e_k, e_l) = \left\{ \begin{array}{l} a_k\,,\ k \leq N\,, \\ \\ 0\,,\ k > N\,. \end{array} \right. \tag{19.6}$$

Entonces,

$$(e_k, x) = \lim_{N\to\infty} (e_k, S_N) = a_k\,. \tag{19.7}$$

Por lo tanto, los coeficientes a_k de un desarrollo convergente como el de la ec. (19.3) están unívocamente determinados como los **coeficientes de Fourier** del vector x respecto del sistema ortonormal considerado.

Dado un sistema ortonormal de vectores como el de la ec. (19.2), siempre es posible calcular los coeficientes de Fourier de un vector $x \in \mathbf{E}$ respecto de dicho sistema, y con ellos formar las sumas parciales de su **serie de Fourier generalizada**,

$$S_N := \sum_{k=1}^{N} a_k\, e_k\,, \text{ con } a_k := (e_k, x)\,. \tag{19.8}$$

Consideremos la diferencia

$$R_N := x - S_N\,. \tag{19.9}$$

Este vector es ortogonal a los N primeros vectores del sistema, $R_N \perp e_k\,,\ k = 1, 2, \ldots, N$. En efecto,

$$(e_k, R_N) = (e_k, x) - (e_k, S_N) = a_k - \sum_{l=1}^{N} a_l\, \delta_{k,l} = 0\,,\ \text{si } k \leq N\,. \tag{19.10}$$

En consecuencia, $x = S_N + R_N$ es la suma de dos vectores ortogonales entre sí. Por el teorema de Pitágoras tenemos

$$\| \, x \, \|^2 = \| \, S_N \, \|^2 + \| \, R_N \, \|^2 \geq \| \, S_N \, \|^2 = \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2\,, \tag{19.11}$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \leq \| \, x \, \|^2\,,\ \forall\, N \in \mathbb{N}\,. \tag{19.12}$$

De aquí resulta la siguiente propiedad:

Propiedad 19.2. Los coeficientes de Fourier de un vector $x \in \mathbf{E}$ relativos a un conjunto numerable de vectores ortonormales entre sí, $a_k = (e_k, x), \forall\, k \in \mathbb{N}$, satisfacen la **desigualdad de Bessel**,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \| \, x \, \|^2 \ . \tag{19.13}$$

Teorema 19.3. *Sea* $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ *un sistema ortonormal completo en un espacio euclídeo completo* $\mathbf{E}$*. Todo vector* $x \in \mathbf{E}$ *tiene una serie de Fourier generalizada que converge a* x *en la métrica de ese espacio,*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k\,, \quad \text{con } a_k = (e_k, x)\,. \tag{19.14}$$

Consideremos la distancia entre dos sumas parciales de la serie de Fourier generalizada para x,

$$\| \, S_{N+M} - S_N \, \|^2 = \left\| \sum_{k=N+1}^{N+M} a_k\, e_k \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{N+M} |a_k|^2\,. \tag{19.15}$$

Como consecuencia de la desigualdad de Bessel, la suma en el miembro de la derecha es la diferencia de dos sumas parciales de una serie convergente. Por lo tanto, la sucesión de sumas parciales $\{S_k\}$ es fundamental.

Ahora bien, en un espacio euclídeo completo, toda secuencia de Cauchy tiene un límite. Es decir, existe un vector $S \in \mathbf{E}$ que es el límite de la serie,

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k\,. \tag{19.16}$$

Los coeficientes de Fourier de S respecto del sistema ortonormal considerado (unívocamente determinados) están dados por $(e_k, S) = a_k$. En consecuencia,

$$(e_k, x - S) = (e_k, x) - (e_k, S) = a_k - a_k = 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{19.17}$$

Finalmente, si el sistema $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$ es completo, la ec. (19.17) implica que

$$x - S = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad x = S\,. \tag{19.18}$$

En consecuencia, el vector x es el límite de su serie de Fourier generalizada,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, x)\, e_k\,. \tag{19.19}$$

□

En las condiciones del Teorema 19.3, dos vectores cualesquiera $x, y \in \mathbf{E}$ pueden ser representados como los límites de sus respectivas series de Fourier,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k\,, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, e_k\,. \tag{19.20}$$

Por la continuidad del producto escalar, podemos escribir

$$(x, y) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k\, e_k, \sum_{l=1}^{N} b_l\, e_l \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k^*\, b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^*\, b_k\,. \tag{19.21}$$

En particular, tomando $y = x$ obtenemos la **igualdad de Parseval**,

$$\| \, x \, \|^2 = (x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\,. \tag{19.22}$$

Esto muestra que, en un espacio euclídeo completo, la desigualdad de Bessel se reduce a una igualdad cuando el sistema ortonormal es completo. Esta es una suerte de generalización del Teorema de Pitágoras al caso de dimensión infinita.

Para que valgan estas propiedades que acabamos de demostrar debemos contar con un sistema ortonormal completo de vectores.

Ya conocemos un método general para ortogonalizar (y normalizar) una dada secuencia de vectores, $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, pero el sistema ortonormal resultante no será, en general, un sistema completo.

Teorema 19.4. *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema* $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$*, obtenido por ortonormalización de la secuencia* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}$*, sea completo en un espacio euclídeo completo* $\mathbf{E}$ *es que la variedad lineal generada por los vectores* x_k*,* $\mathcal{L}\{x_k\,, k \in \mathbb{N}\}$*, sea un subespacio denso en* $\mathbf{E}$*.*

Primero supongamos que el sistema $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ sea completo. Entonces, como $\mathbf{E}$ es completo, todo vector $x \in \mathbf{E}$ es el límite de su serie de Fourier generalizada

$$x = \lim_{N\to\infty} S_N\,, \quad S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k\, e_k\,. \tag{19.23}$$

Teniendo en cuenta que cada uno de los vectores e_k es, por construcción, una combinación lineal de un número finito de vectores x_k (ver Teorema 4.1), concluimos que existen combinaciones lineales de (un número finito de) estos vectores que están tan cerca como se quiera del vector x.

Por lo tanto, si el sistema $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ es completo en un espacio $\mathbf{E}$ completo, entonces $\mathcal{L}\{x_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbf{E}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{L}\{x_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ sea denso en $\mathbf{E}$. Podemos invertir la relación entre los e_k y los x_k, de modo de expresar cada vector x_k como una combinación lineal de (un número finito de) vectores e_k. Entonces, un vector x ortogonal a todos los e_k,

$$(e_k, x) = 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,, \tag{19.24}$$

es ortogonal a toda combinación lineal de los x_k, es decir,

$$x \perp \mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}\,. \tag{19.25}$$

Y como no existen vectores no nulos ortogonales a un subespacio denso, debe ser $x = \mathbf{0}$.

Por lo tanto, si $\mathcal{L}\{x_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbf{E}$, entonces el sistema ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ es completo en $\mathbf{E}$. □

Ejemplos:

• La variedad lineal generada por las potencias de t en el intervalo $[-1, 1]$, que es el subespacio de los polinomios $\mathcal{P}_2(-1, 1)$, es denso en el espacio $\mathcal{C}_2(-1, 1)$ que, a su vez, es denso en el espacio completo $\mathbf{L}_2(-1, 1)$. Entonces, por el Teorema 19.4, el conjunto de los polinomios de Legendre (que se obtienen por ortogonalización de las potencias de t - ver ec. (4.2)) es un sistema ortogonal completo en $\mathbf{L}_2(-1, 1)$.

En consecuencia, toda función de cuadrado sumable en $[-1, 1]$ puede ser desarrollada en una serie de polinomios de Legendre (debidamente normalizados), y esa serie converge en media a la función.

• El sistema de las funciones trigonométricas, $\{\cos(kt)\,, k = 0, 1, 2, \ldots; \sin(lt)\,, l = 1, 2, 3, \ldots\}$, es ortogonal y completo en $\mathbf{L}_2(-\pi, \pi)$.

En efecto, es bien sabido que una función periódica de período 2π, con una derivada primera continua en toda la recta, tiene un desarrollo en **serie de Fourier** que converge uniformemente a la función en toda la recta.

En consecuencia, el espacio lineal generado por las funciones del sistema trigonométrico es denso en un conjunto que llamaremos $\mathbf{F}$, que contiene a todas aquellas funciones definidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ que pueden ser extendidas a toda la recta como funciones 2π-periódicas y con una derivada primera continua:

$$\mathcal{L}\{\cos(kt)\,, k \geq 0\,; \sin(lt)\,, l \geq 1\} \text{ denso en } \mathbf{F}\,. \tag{19.26}$$

Este conjunto $\mathbf{F}$ contiene, en particular, funciones con una derivada primera continua en $(-\pi, \pi)$, y que se anulan idénticamente en intervalos de la forma $[-\pi, -\pi + \delta]$ y $[\pi - \delta, \pi]$, con $\delta > 0$.

Veremos que $\mathbf{F}$ es denso en el conjunto de los polinomios $\mathcal{P}_2(-\pi, \pi)$, que a su vez es denso en $\mathbf{L}_2(-\pi, \pi)$.

En efecto, consideremos un polinomio $P(t)$, y una secuencia de funciones reales y diferenciables, $\{h_k(t), k \in \mathbb{N}\}$, tales que tomen valores entre 0 y 1 y satisfagan

$$h_k(t) = \begin{cases} 0\,, & \pi - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \leq |t| \leq \pi\,, \\ \\ 1\,, & |t| \leq \pi - \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\,. \end{cases} \tag{19.27}$$

Evidentemente, el producto $h_k(t)\, P(t) \in \mathbf{F}\,, \forall\, k$. Y si $|P(t)| \leq M$, $\forall\, t \in [a, b]$, su distancia a $P(t)$

$$\begin{aligned} \rho\Big(h_k(t)\, P(t), P(t)\Big)^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \big(h_k(t) - 1\big)^2 \left|P(t)\right|^2 dt \leq \\ &\leq 2^2 M^2\, 2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = 8M^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \to 0 \end{aligned} \tag{19.28}$$

cuando $k \to \infty$.

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{\cos(kt)\,, k \geq 0\,; \sin(lt)\,, l \geq 1\} \text{ denso en } \mathbf{L}_2(-\pi, \pi)\,. \tag{19.29}$$

Como el sistema trigonométrico ya es ortogonal, normalizando esos vectores obtenemos un sistema ortonormal y completo en $\mathbf{L}_2(-\pi,\pi)$,

$$\left\{\frac{\cos(kt)}{\sqrt{2\pi}}\,, k\geq 0\,;\ \frac{\sin(lt)}{\sqrt{2\pi}}\,, l\geq 1\right\}\,, \tag{19.30}$$

de acuerdo con el Teorema 19.4.

En un espacio complejo también podemos tomar el sistema ortonormal completo

$$\left\{\frac{\exp(ikt)}{\sqrt{2\pi}}\,, k\in\mathbb{Z}\right\}\,. \tag{19.31}$$

• Los sistemas $\{\cos(kt)\,, k=0,1,2,\dots\}$ y $\{\sin(kt)\,, k=1,2,3,\dots\}$ son completos en $\mathbf{L}_2(0,\pi)$.

En efecto, las funciones de cuadrado sumable en $[0,\pi]$ pueden ser extendidas al intervalo $[-\pi,\pi]$ como funciones pares o impares, cuyas series de Fourier se reducen a series de cosenos y senos respectivamente.

La convergencia en media de la sucesión de sumas parciales (también pares o impares, según el caso) a la función en el intervalo completo implica la convergencia en media en $[0,\pi]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)-S_N(t)|^2\,dt = 2\int_0^{\pi}|x(t)-S_N(t)|^2\,dt\to 0 \tag{19.32}$$

cuando $N\to\infty$.

• Por un razonamiento similar, se puede demostrar que el sistema ortogonal $\{\cos(kt)\cos(ls)\,, k,l\geq 0\}$, es completo en $\mathbf{L}_2\big((0,\pi)\times(0,\pi)\big)$.

$\diamond$

Teorema 19.5. *Todo espacio de Hilbert real* $\mathbf{E}$ *es isomorfo al espacio* $\mathcal{L}_2$.

Recordemos que un espacio de Hilbert es un espacio euclídeo infinito-dimensional, completo y separable.

Todo espacio de Hilbert tiene un sistema ortonormal y completo de vectores. En efecto, por ser separable, $\mathbf{E}$ contiene un conjunto denso numerable,

$$\mathbf{F}=\{x_1,x_2,\dots,x_k,\dots\}\ \text{denso en } \mathbf{E}\,. \tag{19.33}$$

En consecuencia, la variedad lineal generada por esos vectores es también densa en $\mathbf{E}$ y, por el Teorema 19.4, el sistema ortonormal que se obtiene por ortonormalización de la secuencia $\mathbf{F}$, $\{e_1,e_2,\dots,e_k,\dots\}$, es completo.

Como el espacio es completo, todo vector $x \in \mathbf{E}$ es el límite de su desarrollo de Fourier respecto del sistema completo $\{e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k\,, \quad a_k = (e_k, x) \in \mathbb{R}\,. \tag{19.34}$$

Además, como el sistema es completo la desigualdad de Bessel se reduce a la igualdad de Parseval,

$$\| \, x \, \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty\,. \tag{19.35}$$

Estos coeficientes de Fourier permiten definir un elemento del espacio $\mathcal{L}_2$,

$$\bar{x} = \left\{ a_k\,, k \in \mathbb{N}\,, \text{ con } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \right\} \in \mathcal{L}_2\,. \tag{19.36}$$

Inversamente, dados el sistema ortonormal $\{e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ y un elemento $\bar{x} \in \mathcal{L}_2$ como en la ec. (19.36), puede asociarse a éste un vector de $\mathbf{E}$ dado por el límite de la serie de la ec. (19.34).

Dada la unicidad de los coeficientes de Fourier, esta relación establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\mathbf{E}$ y los de $\mathcal{L}_2$. Se verifica de inmediato que esta correspondencia preserva las operaciones lineales y los productos escalares.

Por ejemplo, si $x, y \in \mathbf{E}$ se corresponden con $\bar{x} = \{a_k\}, \bar{y} = \{b_k\} \in \mathcal{L}_2$ respectivamente, tenemos que

$$(x, y)_{\mathbf{E}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, b_k = (\bar{x}, \bar{y})_{\mathcal{L}_2}\,. \tag{19.37}$$

Por lo tanto, $\mathbf{E}$ es isomorfo a $\mathcal{L}_2$. $\square$

Similarmente, todo espacio de Hilbert complejo es isomorfo a la **extensión compleja**[8] del espacio $\mathcal{L}_2$.

---

[8]Este es un espacio euclídeo complejo cuyos elementos se obtienen como sumas formales de la forma $\bar{x} + i\,\bar{y}$, con $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{L}_2$, y donde el producto escalar se define por

$$(\bar{x} + i\,\bar{y}, \bar{x}' + i\,\bar{y}') := (\bar{x}, \bar{x}') + (\bar{y}, \bar{y}') + i\,(\bar{x}, \bar{y}') - i\,(\bar{y}, \bar{x}')\,. \tag{19.38}$$

20. Funcionales lineales acotadas en espacios completos

Teorema 20.1. *Toda funcional lineal acotada $f(x)$ en un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$ puede ser representada como el producto escalar por un vector fijo del espacio, $f(x) \equiv (z, x)\,,\ z \in \mathbf{E}$.*

Consideremos una funcional lineal acotada, $|f(x)| \leq K \parallel x \parallel$, $\forall\, x \in \mathbf{E}$. Si f es la funcional nula, ella corresponde al producto escalar por el vector nulo, $f(x) = 0 = (\mathbf{0}, x)\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}$.

Supongamos que f no sea la funcional nula, y llamemos $\mathbf{F}$ al **kernel** o subespacio nulo de la funcional,

$$f(x) = 0\,,\ \forall\, x \in \mathbf{F}\,. \tag{20.1}$$

Este es un subespacio cerrado, puesto que si la secuencia fundamental $\{x_k\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{F}$ tiene por límite al vector x, entonces

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0\,, \tag{20.2}$$

dado que toda funcional lineal acotada es continua (ver Teorema 10.5).

Por el Teorema 18.4, sabemos que en un espacio euclídeo completo existe el complemento ortogonal de este kernel, $\mathbf{F}^\perp$, que también es un subespacio cerrado. Veremos que $\mathbf{F}^\perp$ es un subespacio unidimensional.

En efecto, sean dos vectores no nulos arbitrarios $z_1, z_2 \in \mathbf{F}^\perp$, de modo que $f(z_{1,2}) \neq 0$, y sea $y = f(z_1)\, z_2 - f(z_2)\, z_1 \in \mathbf{F}^\perp$. Entonces,

$$f(y) = f(z_1)\, f(z_2) - f(z_2)\, f(z_1) = 0 \ \Rightarrow\ y \in \mathbf{F}\,. \tag{20.3}$$

Por lo tanto, $y \perp y \ \Rightarrow\ y = \mathbf{0}$, y los vectores z_1 y z_2 son colineales.

Finalmente, sea $e \in \mathbf{F}^\perp$ un vector unitario que genere ese subespacio. Sabemos que todo vector $x \in \mathbf{E}$ tiene una descomposición única de la forma $x = u + v$, donde $v \in \mathbf{F}$ y

$$u = \lambda\, e \in \mathbf{F}^\perp\,,\ \text{con } \lambda = (e, u) = (e, u + v) = (e, x)\,. \tag{20.4}$$

En esas condiciones

$$f(x) = \lambda\, f(e) + f(v) = f(e)\,(e, x) = (z, x)\,,\ \text{con } z = f(e)^*\, e\,. \tag{20.5}$$

Este vector z es único, puesto que si también tenemos que $f(x) = (z', x)\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}$, entonces

$$(z - z', x) = 0\,, \forall\, x \ \Rightarrow \parallel z - z' \parallel^2 = 0 \ \Rightarrow\ z' = z\,. \tag{20.6}$$

$\square$

21. El operador integral de Fredholm

Ya hemos señalado que todo operador lineal acotado es continuo. Un ejemplo importante de operador acotado en $\mathbf{L}_2(a,b)$ es el operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable, definido por

$$A\,x(t) := \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds\,, \tag{21.1}$$

donde el **núcleo** del operador integral, $K(t,s)$, es una función de dos variables de (módulo) cuadrado sumable en la región $a \leq t, s \leq b$,

$$K^2 = \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \;dt\,ds < \infty\,. \tag{21.2}$$

Esto equivale a decir que

$$K(t,s) \in \mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)\,, \tag{21.3}$$

y que su norma en ese espacio es

$$\parallel K(t,s) \parallel = K\,. \tag{21.4}$$

En esas condiciones, el Teorema de Fubini garantiza que la integral

$$k(t)^2 = \int_a^b |K(t,s)|^2 \;ds \tag{21.5}$$

existe para casi todos los valores de $t \in [a,b]$, y define una función sumable cuya integral es

$$\int_a^b k(t)^2\,dt = K^2\,. \tag{21.6}$$

Entonces, para casi todos los valores de t, $K(t,s)$ puede ser considerada como una función de cuadrado sumable de la variable $s \in [a,b]$, de norma $k(t) = +\sqrt{k(t)^2}$, y la acción del operador A sobre cualquier función $x(s) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ puede ser representada como

$$y(t) = A\,x(t) = \big(K(t,s)^*, x(s)\big)\,, \quad a.\,e. \tag{21.7}$$

De la desigualdad de Cauchy - Schwarz resulta que

$$|y(t)|^2 = \left|\big(K(t,s)^*, x(s)\big)\right|^2 \leq k(t)^2 \;\parallel x \parallel^2, \tag{21.8}$$

y de la ec. (21.6) concluimos que $y(t) = A\,x(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$. En efecto,

$$\parallel A\,x \parallel^2 = \parallel y \parallel^2 = \int_a^b |y(t)|^2\,dt \leq K^2 \;\parallel x \parallel^2\;. \tag{21.9}$$

Por lo tanto, un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado integrable como el de la ec. (21.1), es un operador acotado, definido sobre todo $\mathbf{L}_2(a,b)$, cuya norma no supera a la norma de su núcleo como función de cuadrado sumable de sus dos variables,

$$\| A \| \leq K = \| K(t,s) \| \ . \tag{21.10}$$

22. Operadores completamente continuos

Definición 22.1. Un conjunto de elementos $\mathbf{F}$ de un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ se dice **compacto**[9] si todo subconjunto infinito $\mathbf{F}' \subset \mathbf{F}$ contiene al menos una secuencia de Cauchy (construida con elementos distintos).

Ejemplos:

• Todo conjunto finito puede ser considerado compacto.

• Todo conjunto infinito acotado en la recta $\mathbb{R}$ es compacto, en virtud del Teorema de Bolzano - Weierstrass.

Por el contrario, todo conjunto $\mathbf{F}$ no acotado en $\mathbb{R}$ es no compacto. En efecto, en ese caso se puede seleccionar el subconjunto infinito $\{x_k \in \mathbf{F}\,,\ k \in \mathbb{N}\,,$ tales que $\|x_k\| > k\}$, que no contiene ninguna secuencia fundamental.

• Similarmente, resulta inmediato mostrar que todo conjunto infinito de elementos de un espacio de dimensión finita es compacto sí y sólo si es acotado. Ese es al caso, por ejemplo, de la esfera de radio 1 en el espacio.

• Si bien **compacidad** y **acotamiento** son características equivalentes en todo espacio de dimensión finita, en espacios euclídeos de dimensión infinita existen conjuntos acotados que no son compactos.

Ese es el caso, por ejemplo, de la esfera de radio 1 en un espacio de Hilbert. En efecto, por ser separable, este espacio contiene un conjunto ortogonal completo de vectores unitarios, $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$, que no contiene ninguna secuencia de Cauchy dado que

$$\rho(e_k, e_l)^2 = \| e_k - e_l \|^2 = 2\,,\ \forall\, k, l \in \mathbb{N}\,. \tag{22.1}$$

◇

Lema 22.2. *Todo conjunto compacto en un espacio euclídeo* $\mathbf{E}$ *es acotado.*

Supongamos que el conjunto $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ no sea acotado. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ es posible encontrar un vector $x_k \in \mathbf{F}$ tal que $\| x \| \geq k$.

[9]También suele emplearse la denominación de **localmente compacto**, reservando el término **compacto** para aquellos conjuntos cuyos subconjunto infinitos contienen al menos una secuencia convergente.

En esas condiciones, el conjunto $\mathbf{F}' = \{x_k\,, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{F}$ no contiene ninguna secuencia fundamental formada con puntos distintos, dado que toda secuencia de Cauchy es acotada.

Por lo tanto, si $\mathbf{F}$ es no acotado entonces es no compacto, lo que implica que si $\mathbf{F}$ es compacto entonces es acotado. □

Definición 22.3. Un operador lineal A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, se dice **completamente continuo** o **compacto** si aplica la esfera de radio 1 del espacio en un conjunto compacto.

Ejemplos:

• Todo operador lineal A en un espacio euclídeo de dimensión finita es compacto. En efecto, en ese caso A es acotado y satisface que

$$\| A\, x \| \leq \| A \| \, \| x \| \; . \tag{22.2}$$

Por lo tanto, A aplica la esfera de radio 1 en un conjunto acotado que, en un espacio de dimensión finita, es también compacto.

• En un espacio de Hilbert, el operador identidad $\mathbf{I}$ (que es acotado) no es compacto, puesto que aplica en sí misma a la esfera de radio 1 del espacio, que no es una región compacta.

• Si A es un operador acotado que aplica un espacio de dimensión infinita $\mathbf{E}$ en un subespacio de dimensión finita $\mathbf{E}'$, entonces A es un operador compacto.

En efecto, tal operador aplica la esfera de radio 1 del espacio $\mathbf{E}$ en una región acotada de $\mathbf{E}'$, que es también compacta. ◇

Lema 22.4. *Sea $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ una secuencia de operadores lineales definidos sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, y supongamos que esa secuencia converge al operador $\mathbf{A}$ (en el sentido de la distancia en el espacio de Banach de los operadores lineales acotados sobre $\mathbf{E}$),*

$$\lim_{k\to\infty} \| A_k - A \| = 0\, . \tag{22.3}$$

En esas condiciones, si para todo k el operador A_k es compacto, entonces A es también compacto.

Debemos mostrar que, dado un conjunto infinito de vectores unitarios $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}$, siempre es posible hallar una secuencia fundamental contenida en el conjunto de sus imágenes, $A\,(\mathbf{F}) = \{A\, x_k, k \in \mathbb{N}\}$.

Consideremos primero el conjunto $A_1\,(\mathbf{F}) = \{A_1\,x_k, k \in \mathbb{N}\}$. Este es un conjunto compacto, puesto que A_1 es completamente continuo.

Por lo tanto, es posible hallar contenida en $A_1\,(\mathbf{F})$ una secuencia de Cauchy (formada por vectores diferentes), que corresponde a las imágenes de un subconjunto (también infinito) de la secuencia original, $\mathbf{F}_1 = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \ldots, x_k^{(1)}, \ldots\} \subset \mathbf{F}$.

Tenemos entonces que la secuencia $A_1\,(\mathbf{F}_1) = \{A_1\,x_k^{(1)}, k \in \mathbb{N}\}$ es fundamental.

Consideremos ahora el conjunto $A_2\,(\mathbf{F}_1) = \{A_2\,x_k^{(1)}, k \in \mathbb{N}\}$, también compacto dado que A_2 es completamente continuo. Entonces, siempre es posible hallar contenida en $A_2\,(\mathbf{F}_1)$ una secuencia de Cauchy, que corresponde a las imágenes de un subconjunto infinito de la secuencia original, $\mathbf{F}_2 = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \ldots, x_k^{(2)}, \ldots\} \subset \mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}$.

Por construcción, tenemos que tanto la secuencia $A_2\,(\mathbf{F}_2) = \{A_2\,x_k^{(2)}, k \in \mathbb{N}\}$, cuanto $A_1\,(\mathbf{F}_2) = \{A_1\,x_k^{(2)}, k \in \mathbb{N}\}$ son fundamentales (ya que $\mathbf{F}_2 \subset \mathbf{F}_1$).

Por idénticas consideraciones, vemos que siempre es posible seleccionar un subconjunto infinito $\mathbf{F}_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)} \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\} \subset \mathbf{F}_{n-1} \subset \cdots \subset \mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}$, tal que $A_m\,(\mathbf{F}_n) = \{A_m\,x_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$, con $m = 1, 2, \ldots, n$, sea una secuencia fundamental.

Formemos ahora el conjunto

$$\mathbf{G} = \{y_1 = x_1^{(1)}, y_2 = x_2^{(2)} \ldots, y_k = x_k^{(k)}, \ldots\} \subset \mathbf{F}\,. \tag{22.4}$$

Teniendo en cuenta que $\{y_k\,, k \geq n\} \subset \mathbf{F}_n$, vemos que las secuencias $A_n\,(\mathbf{G}) = \{A_n\,y_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ son fundamentales para todo n.

Mostraremos que la secuencia $A\,(\mathbf{G}) = \{A\,y_k, k \in \mathbb{N}\}$ es fundamental. Para ello, dado $\varepsilon > 0$, tomemos n suficientemente grande como para que la norma

$$\parallel A - A_n \parallel < \frac{\varepsilon}{4}\,, \tag{22.5}$$

y sea m tal que

$$\parallel A_n\,y_k - A_n\,y_l \parallel < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall\, k, l > m\,. \tag{22.6}$$

Entonces,

$$\| A\, y_k - A\, y_l \| = \| A\, (y_k - y_l) \| =$$

$$= \| (A - A_n)\, (y_k - y_l) + A_n\, (y_k - y_l) \| \leq$$

$$\leq \| (A - A_n)\, (y_k - y_l) \| + \| A_n\, (y_k - y_l) \| \leq \tag{22.7}$$

$$\leq \| A - A_n \| \, \| y_k - y_l \| + \| A_n\, y_k - A_n\, y_l \| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} \times 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

En resumen, dado un conjunto numerable arbitrario de vectores unitarios, siempre es posible extraer de él un subconjunto infinito que es aplicado por el operador A en una secuencia de Cauchy.

Por lo tanto, A es un operador completamente continuo. □

Teorema 22.5. *Todo operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable es compacto.*

Consideremos primero el caso de un operador A_n de **núcleo degenerado**,

$$K_n(t,s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\, \psi_k(s)^*\,, \quad \text{con } \varphi_k(t), \psi_k(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)\,. \tag{22.8}$$

Nótese que siempre es posible suponer que las funciones $\varphi_k(t)\,, k = 1, \ldots, n$ son linealmente independientes. En caso contrario, algunas de ellas pueden ser eliminadas en favor de un subconjunto linealmente independiente, obteniéndose una suma con un menor número de términos. Por la misma razón, puede suponerse que las funciones $\psi_k(t)\,, k = 1, \ldots, n$ son linealmente independientes.

Como sabemos, la norma de este núcleo es una cota superior para la norma del operador integral,

$$\begin{aligned} K_n^2 = \| K_n(t,s) \|^2 &= \int_a^b \int_a^b \sum_{k,l=1}^{n} \varphi_k(t)^*\, \psi_k(s)\, \varphi_l(t)\, \psi_l(s)^*\, dt\, ds = \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \big(\varphi_k(t), \varphi_l(t)\big)\, \big(\psi_l(s), \psi_k(s)\big) \geq \| A_n \|^2\ . \end{aligned} \tag{22.9}$$

La acción del operador A_n sobre una función $x(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ se reduce a

$$A_n\, x(t) = \sum_{k=1}^{n} (\psi_k, x)\ \varphi_k(t)\,, \tag{22.10}$$

de modo que A_n aplica todo el espacio $\mathbf{L}_2(a,b)$ en el subespacio de dimensión finita generado por las funciones $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$.

En esas condiciones, todo operador integral de Fredholm de núcleo degenerado es un operador completamente continuo.

Consideremos ahora un operador integral A de núcleo de cuadrado sumable arbitrario, $K(t,s)\in\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$. Este núcleo puede ser desarrollado en una serie de Fourier generalizada (convergente en media) de la forma

$$K(t,s)=\sum_{k,l=0}^{\infty}C_{k,l}\,\cos\left(k\pi\,\frac{t-a}{b-a}\right)\,\cos\left(l\pi\,\frac{s-a}{b-a}\right). \tag{22.11}$$

Las sumas parciales de esta serie,

$$K_n(t,s)=\sum_{k,l=0}^{n}C_{k,l}\,\cos\left(k\pi\,\frac{t-a}{b-a}\right)\,\cos\left(l\pi\,\frac{s-a}{b-a}\right)\in\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)\,, \tag{22.12}$$

permiten definir una sucesión de operadores integrales de Fredholm de núcleo degenerado, A_n, todos ellos compactos.

La diferencia $\big(A-A_n\big)$ es también un operador integral,

$$\big(A-A_n\big)\,x(t)=A\,x(t)-A_n\,x(t)=\int_a^b\big(K(t,s)-K_n(t,s)\big)\,x(s)\,ds\,, \tag{22.13}$$

cuyo núcleo es la diferencia $\big(K(t,s)-K_n(t,s)\big)\in\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$.

Ahora bien, como la norma del operador $\big(A-A_n\big)$ está acotada por la norma de su núcleo,

$$\parallel A-A_n\parallel\,\leq\,\parallel K(t,s)-K_n(t,s)\parallel\to 0\quad\text{cuando } n\to\infty\,. \tag{22.14}$$

Por lo tanto, la secuencia de operadores compactos A_n converge al operador A en el sentido de la distancia en el espacio normado de los operadores lineales acotados sobre $\mathbf{L}_2(a,b)$. En virtud del Teorema 22.4, el operador integral A de núcleo $K(t,s)$ es también completamente continuo. □

Este resultado vale, en particular, cuando el núcleo $K(t,s)$ es continuo en la región compacta $a\leq t,s\leq b$. En este caso, el operador integral de Fredholm aplica $\mathbf{L}_2(a,b)\to\mathcal{C}_2(a,b)$. En efecto, si

$$y(t)=\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds \tag{22.15}$$

tenemos que

$$\left| y(t+\delta) - y(t) \right|^2 = \left| \Big(K(t+\delta,s)^* - K(t,s)^*, x(s) \Big) \right|^2 \leq$$

$$\leq \| x \|^2 \int_a^b \left| K(t+\delta,s) - K(t,s) \right|^2 ds \leq \tag{22.16}$$

$$\leq \| x \|^2 \, (b-a) \max_{a\leq s\leq b} \left\{ \left| K(t+\delta,s) - K(t,s) \right|^2 \right\} \to 0$$

cuando $\delta \to 0$.

23. AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE OPERADORES COMPLETAMENTE CONTINUOS

Lema 23.1. *Todo operador lineal completamente continuo es acotado y, por lo tanto, continuo.*

En efecto, si A es compacto, la esfera de radio 1 del espacio $\mathbf{E}$ es aplicada por A en un conjunto compacto, que necesariamente es acotado:

$$\| A \| = \sup_{\{\|x\|=1\}} \| A\, x \| < \infty\,. \tag{23.1}$$

□

Lema 23.2. *Todo operador lineal simétrico y completamente continuo A, definido sobre un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$, tiene un vector máximo.*

Supongamos que $A \neq \mathbf{O}$ (en cuyo caso este enunciado vale trivialmente).

Como $\| A \| = \sup \| A\, x \|$ para x tomando valores en la esfera de radio 1 de $\mathbf{E}$, entonces es posible seleccionar una secuencia de vectores unitarios $\mathbf{F} = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ tales que las normas de los vectores $y_k = A\, x_k$ satisfagan que

$$\lim_{k\to\infty} \| y_k \| = \| A \| > 0\,. \tag{23.2}$$

Como A es completamente continuo, $A\,(\mathbf{F})$ es un conjunto compacto. Entonces, siempre podemos suponer que la secuencia $\{y_k, k \in \mathbb{N}\}$ es fundamental (basta con descartar aquellos vectores de la secuencia $\mathbf{F}$ cuyas imágenes no correspondan a elementos de la secuencia de Cauchy que debe contener $A\,(\mathbf{F})$).

Ahora bien, si el espacio $\mathbf{E}$ es completo, existe un vector $y \in \mathbf{E}$ que es el límite de esa secuencia de Cauchy,

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} A\, x_k\,. \tag{23.3}$$

Además, por la continuidad de la norma tenemos

$$\| \, y \, \| = \lim_{k\to\infty} \| \, y_k \, \| = \| \, A \, \| \ . \tag{23.4}$$

Mostraremos ahora que si A es simétrico, entonces el vector unitario $z = y/\| \, A \, \|$ es un vector máximo de A.

En efecto, tenemos

$$\begin{array}{c} \| \, y_k \, \|^2 = \| \, A \, x_k \, \|^2 = \left(x_k, A^\dagger y_k \right) = \\ = (x_k, A \, y_k) \leq \| \, x_k \, \| \, \| \, A \, y_k \, \| \leq \| \, A \, \| \, \| \, y_k \, \| \, , \end{array} \tag{23.5}$$

de modo que, en el límite $k \to \infty$, resulta

$$\| \, A \, \|^2 \leq \lim_{k\to\infty} \| \, A \, y_k \, \| = \| \, A \, y \, \| \leq \| \, A \, \|^2 \ . \tag{23.6}$$

Por lo tanto, $\| \, A \, z \, \| = \| \, A \, \|$, con $\| \, z \, \| = 1$. □

Como consecuencia de los Lemas 23.1 y 23.2, y aplicando los resultados generales obtenidos en el Lema 8.8[10], se demuestra de inmediato el siguiente Lema.

Lema 23.3. *Todo operador simétrico completamente continuo A, definido sobre un espacio euclídeo completo* **E**, *tiene un autovector de autovalor $\lambda = \| \, A \, \|$ o $\lambda = - \| \, A \, \|$.*

Recurriendo al procedimiento empleado en la demostración del Teorema 8.9 (válido para el caso de dimensión finita), y teniendo en cuenta que el complemento ortogonal es siempre cerrado, y que todo subespacio cerrado de un espacio euclídeo completo es también un espacio completo, podemos construir un conjunto ortonormal de autovectores de A, $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots \mid A \, e_k = \lambda_k \, e_k \, ; (e_k, e_l) = \delta_{kl}\}$.

Por construcción, estos autovectores son obtenidos en orden no creciente de los valores absolutos de sus autovalores, $\| \, A \, \| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k| \geq \dots$.

Pero, a diferencia de lo que ocurre en dimensión finita, en un espacio de dimensión infinita este procedimiento puede continuarse indefinidamente.

El siguiente Lema impone restricciones sobre la distribución que pueden adoptar sobre la recta los autovalores de un operador simétrico compacto.

[10] Lema 8.8: Si el operador simétrico acotado A tiene un vector máximo, entonces A también tiene un autovector con autovalor $\| \, A \, \|$ o $- \| \, A \, \|$.

Lema 23.4. *Sea A un operador simétrico completamente continuo en un espacio euclídeo completo. Entonces A tiene un conjunto finito de autovectores ortonormales entre sí correspondientes a autovalores que, en valor absoluto, superan a un número $\delta > 0$.*

Supongamos que, por el contrario, contamos con un conjunto infinito de tales autovectores,

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\} \,\big|\, (e_k, e_l) = \delta_{kl}\,; A\,e_k = \lambda_k\,e_k \text{ con } |\lambda_k| > \delta > 0\,, \tag{23.7}$$

y consideremos el conjunto de sus imágenes por A, $\{\lambda_k\,e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$.

Este no es un conjunto compacto puesto que, siendo infinito, no contiene ninguna secuencia de Cauchy. En efecto, la distancia entre dos cualesquiera de sus elementos satisface

$$\|\,A\,e_k - A\,e_l\,\|^2 = \|\,\lambda_k\,e_k - \lambda_l\,e_l\,\|^2 = |\lambda_k|^2 + |\lambda_l|^2 > 2\,\delta^2\,,\ \forall\,k \neq l\,. \tag{23.8}$$

En esas condiciones, resulta imposible seleccionar una subsecuencia fundamental, lo que está en contradicción con la hipótesis de compacidad del operador A.

Por lo tanto, el conjunto de autovectores ortonormales de la ec. (23.7) ha de contener un número finito de elementos. □

Propiedad 23.5. El Lema 23.4 implica que si un operador simétrico completamente continuo tiene un número infinito de autovalores no nulos, ellos forman una secuencia que converge al origen. Además, la degeneración de cualquier autovalor no nulo es finita (es decir, los subespacios característicos correspondientes a autovalores $\lambda \neq 0$ son de dimensión finita).

A partir de estos resultados podemos concluir que si un operador simétrico completamente continuo A tiene un conjunto infinito de autovalores no nulos, éstos pueden ser dispuestos en orden decreciente de sus valores absolutos, de modo que formen una secuencia convergente a 0. Los correspondientes autovectores son, por construcción, ortogonales entre sí, aún cuando correspondan al mismo autovalor.

En esas condiciones, obtenemos un conjunto numerable de autovectores ortonormales, $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$, cuyos autovalores, que satisfacen

$$\|\,A\,\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_k| \geq \dots\,, \tag{23.9}$$

forman una secuencia que converge al origen, $\lambda_k \to 0$.

Mostraremos ahora que todo vector z ortogonal a los autovectores e_k así construidos satisface $A\,z = \mathbf{0}$.

Lema 23.6. *Si* $z \in \mathbf{E}$ *es ortogonal a todos los autovectores* e_k *correspondientes a autovalores no nulos de un operador simétrico completamente continuo* A*, definido sobre un espacio euclídeo completo* $\mathbf{E}$*, entonces* z *es un autovector de* A *correspondiente al autovalor 0.*

Consideremos la variedad lineal generada por (todos) los autovectores de A correspondientes a autovalores no nulos: $\mathcal{L}\{e_1, e_2, \ldots, e_k \ldots\}$, donde

$$A\, e_k = \lambda_k\, e_k\,, \quad \lambda_k \neq 0\,. \tag{23.10}$$

Llamemos $\mathbf{F}$ a su clausura, $\mathbf{F} = \overline{\mathcal{L}\{e_1, e_2, \ldots, e_k \ldots\}}$, y $\mathbf{F}^{\perp}$ a su complemento ortogonal.

Dado que A es simétrico y $\mathcal{L}\{e_1, e_2, \ldots, e_k \ldots\}$ es invariante, $\mathbf{F}^{\perp}$ es un subespacio cerrado invariante frente a la acción de A. En esas condiciones, podemos considerar la restricción del operador A al subespacio $\mathbf{F}^{\perp}$, que es él mismo un espacio euclídeo completo.

Sea

$$M := \sup_{\left\{x\in\mathbf{F}^{\perp}\,\middle|\,\|x\|=1\right\}} \|\, A\, x\, \|\,, \tag{23.11}$$

la "norma" de la restricción de A al subespacio $\mathbf{F}^{\perp}$. Si $M > 0$, por el Lemma 23.3, sabemos que A tendría un autovector de autovalor $\lambda = \pm M \neq 0$. Pero, por hipótesis, eso no ocurre, ya que todos los autovectores correspondientes a autovalores no nulos están contenidos en $\mathbf{F}$.

Por lo tanto, $M = 0 \Rightarrow A\, z = \mathbf{0}\,,\ \forall\, z \in \mathbf{F}^{\perp}$. □

Ahora bien, por el Teorema 18.4, sabemos que todo vector $x \in \mathbf{E}$ tiene una descomposición única como la suma $x = u + v$, con $u \in \mathbf{F}$ y $v \in \mathbf{F}^{\perp}$.

Por otra parte, en las condiciones del Lema 23.6, el conjunto de autovectores de A correspondientes a autovalores no nulos, $\{e_1, \ldots, e_k \ldots\}$, constituye (por construcción) un sistema ortonormal y completo en $\mathbf{F}$ que, por ser un subespacio cerrado de un espacio completo, es él mismo un espacio euclídeo completo.

En consecuencia, todo vector $u \in \mathbf{F}$ es el límite de su desarrollo de Fourier respecto de dicho sistema ortonormal,

$$u = \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 0\}} a_k\, e_k\,, \quad \text{con } a_k = (e_k, u) = (e_k, x). \tag{23.12}$$

Estos resultados prueban el siguiente teorema:

Teorema 23.7. *Sea A un operador simétrico completamente continuo definido sobre un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$. Entonces, todo vector $x \in \mathbf{E}$ puede ser representado como la suma de dos vectores ortogonales entre sí, $x = u + v$, donde u es el límite de una suma que se extiende sobre el conjunto de autovectores ortonormales de A correspondientes a autovalores no nulos,*

$$u = \sum_{\{e_k \mid \lambda_k \neq 0\}} a_k \, e_k \quad \text{con } a_k = (e_k, x)\,, \tag{23.13}$$

y donde v es un autovector de A correspondiente al autovalor nulo,

$$A\, v = \mathbf{0} = 0\, v\,. \tag{23.14}$$

Si $\mathbf{E}$ es un espacio de Hilbert, es separable. Entonces $\mathbf{E}$ contiene un conjunto denso numerable, $\mathbf{G} = \{x_k\,, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{E}$, cuyos elementos también tienen una descomposición única como sumas de la forma $x_k = u_k + v_k$, con $u_k \in \mathbf{F}$ y $v_k \in \mathbf{F}^{\perp}$.

Dado un vector arbitrario $x \in \mathbf{E}$ y un número $\varepsilon > 0$, siempre es posible encontrar un vector $x_k \in \mathbf{G}$ tal que

$$\varepsilon^2 > \| \, x - x_k \, \|^2 = \| \, u - u_k \, \|^2 + \| \, v - v_k \, \|^2 \geq \| \, v - v_k \, \|^2\,, \tag{23.15}$$

de donde resulta que el conjunto numerable $\{v_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbf{F}^{\perp}$. Entonces, $\mathbf{F}^{\perp}$ es un espacio completo y separable.

En virtud del Teorema 19.4, por ortogonalización de la secuencia $\{v_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ se obtiene un sistema ortonormal y completo en $\mathbf{F}^{\perp}$, cuyos elementos son autovectores de A correspondientes todos ellos al autovalor nulo,

$$\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k, \dots\} \, \big| \, (\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_l) = \delta_{kl}\,;\, A\, \mathcal{E}_k = 0\, \mathcal{E}_k = \mathbf{0}\,. \tag{23.16}$$

Por lo tanto, todo vector $v \in \mathbf{F}^{\perp}$ es el límite de un desarrollo de Fourier de la forma

$$v = \sum_{\{\mathcal{E}_k \mid \lambda_k = 0\}} b_k \, \mathcal{E}_k\,, \quad \text{donde } b_k = (\mathcal{E}_k, v) = (\mathcal{E}_k, x). \tag{23.17}$$

Estos resultados, junto con el Teorema 23.7, prueban el siguiente Teorema de Hilbert:

Teorema 23.8. *Todo operador simétrico y completamente continuo definido sobre un espacio de Hilbert tiene un sistema ortonormal completo de autovectores.*

24. Autovectores de un operador de Fredholm

Consideremos un operador integral de Fredholm A de núcleo hermítico y de cuadrado sumable,

$$K(s,t) = K(t,s)^*\,, \quad K = \parallel K(t,s) \parallel < \infty\,. \tag{24.1}$$

Un operador con esas características está definido sobre todo el espacio de Hilbert $\mathbf{L}_2(a,b)$ (ver Sección 21), es simétrico (ver ec. (8.20)) y completamente continuo (ver Teorema 22.5). Entonces, tiene un sistema ortonormal y completo de autovectores, y todo vector $x(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ es el límite de su desarrollo de Fourier respecto de ese sistema.

Los autovectores de A satisfacen

$$A\,e_k(t) = \int_a^b K(t,s)\,e_k(s)\,ds = \lambda_k\,e_k(t)\,. \tag{24.2}$$

En consecuencia, podemos escribir que

$$\lambda_k\,e_k(t)^* = \big(e_k(s), K(t,s)^*\big)\,, \tag{24.3}$$

de modo que $\lambda_k\,e_k(t)^*$ puede ser considerado como el coeficiente de Fourier de (la función de cuadrado sumable de la variable s) $K(t,s)^*$ correspondiente al vector $e_k(s)$.

Entonces, la desigualdad de Bessel implica que, $\forall\,N$,

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2\;|e_k(t)|^2 \leq \int_a^b |K(t,s)|^2\;ds = k(t)^2\,, \tag{24.4}$$

según la notación adoptada en la Sección 21. Integrando ambos miembros en t entre a y b obtenemos

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2\;\parallel e_k(t) \parallel^2 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 \leq \int_a^b k(t)^2\,dt = K^2\,, \quad \forall\,N \in \mathbb{N}\,. \tag{24.5}$$

Por lo tanto, la serie formada con los cuadrados de los autovalores de un operador integral de Fredholm de núcleo hermítico y de cuadrado sumable es convergente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \leq K^2 < \infty \tag{24.6}$$

(resultado que no es válido en general para otros operadores simétricos y compactos).

Una función en la imagen del operador es de la forma

$$y(t) = A\,x(t) = A\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k(t)\right\}\,, \tag{24.7}$$

donde $a_k = (e_k, x)$. Dado que la serie en el segundo miembro converge al vector x, por la continuidad de A podemos escribir

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, A\, e_k(t) = \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 0\}} \lambda_k\, a_k\, e_k(t)\,. \tag{24.8}$$

Por lo tanto, una función $y(t) \in \mathrm{Rank}(A)$ es el límite en media de un desarrollo en serie de autovectores de A correspondientes a autovalores no nulos.

Teorema 24.1. *Si el núcleo $K(t,s)$, hermítico y de cuadrado sumable, satisface la* **condición de Hilbert - Schmidt**,

$$k(t)^2 = \int_a^b |K(t,s)|^2\, ds \leq M^2\,, \tag{24.9}$$

donde M es una constante independiente de t, entonces toda función $y(t)$ en el rango del operador integral A que define ese núcleo tiene un desarrollo en serie de autofunciones de A que no sólo converge en media a $y(t)$, sino también absoluta y uniformemente.

Consideremos una suma parcial de la serie para $y(t)$ en el miembro de la derecha de la ec. (24.8),

$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k\, \lambda_k\, e_k(t)\right| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k|\, |\lambda_k\, e_k(t)|\,. \tag{24.10}$$

Teniendo en cuenta que, por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \leq \parallel x \parallel^2\,, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,, \tag{24.11}$$

y que, por hipótesis, de la ec. (24.4) tenemos

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2\, |e_k(t)|^2 \leq k(t)^2 \leq M^2\,, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, t \in [a,b]\,, \tag{24.12}$$

aplicando la desigualdad de Bessel en $\mathbb{R}^N$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k|\, |\lambda_k\, e_k(t)| \leq \parallel x \parallel M\,, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, t \in [a,b]\,. \tag{24.13}$$

Por lo tanto, si se satisface la condición de Hilbert - Schmidt, la serie en (24.8) converge absoluta y uniformemente a la función $y(t)$ en el intervalo $[a,b]$. □

La condición de Hilbert - Schmidt se satisface, en particular, cuando el núcleo de cuadrado sumable $K(t,s)$ es continuo. En ese caso $\text{Rank}(A) \subset \mathcal{C}_2(a,b)$ (ver ecuaciones (22.15-22.16)), lo que implica que las autofunciones del operador integral correspondientes a autovalores no nulos son también continuas.

25. Ecuaciones integrales inhomogéneas

Consideremos la **ecuación integral**

$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds\,, \tag{25.1}$$

donde $f(t)$ y $K(t,s)$ son funciones conocidas, y la función incógnita $\varphi(t)$ aparece bajo el signo integral.

Si $f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ y $K(t,s) = K(s,t)^* \in \mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$, la anterior ecuación integral puede ser interpretada como

$$\varphi(t) = f(t) + A\,\varphi(t)\,, \tag{25.2}$$

donde A es el operador integral de Fredholm cuyo núcleo (hermítico y de cuadrado sumable) es $K(t,s)$.

Como el operador A así definido es simétrico y compacto, tiene un sistema ortonormal completo de autovectores, $A\,e_k(t) = \lambda_k\,e_k(t)\,, k \in \mathbb{N}$.

Si existe una solución $\varphi(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ para la ec. (25.2), ella puede ser representada como el límite de su desarrollo de Fourier respecto de ese sistema completo. Por lo tanto, tiene sentido tratar de determinar sus coeficientes de Fourier.

Tomando el producto escalar de ambos miembros de la ec. (25.2) con el autovector $e_k(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}(e_k,\varphi) &= (e_k,f) + (e_k, A\,\varphi) = \\ &= (e_k,f) + (A\,e_k,\varphi) = (e_k,f) + \lambda_k\,(e_k,\varphi)\,,\end{aligned} \tag{25.3}$$

dado que A es simétrico. Resulta entonces que

$$(1-\lambda_k)\,(e_k,\varphi) = (e_k,f)\,. \tag{25.4}$$

Esta ecuación sólo permite determinar unívocamente los coeficientes de Fourier de $\varphi(t)$ correspondientes a los (numerables) autovectores de autovalor distinto de la unidad:

$$
\begin{aligned}
a_k = (e_k, \varphi) &= \frac{(e_k, f)}{(1-\lambda_k)} \\
&= (e_k, f) + \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)}\,(e_k, f)\,, \quad \lambda_k \neq 1\,.
\end{aligned} \tag{25.5}
$$

Comprobemos que estos coeficientes de Fourier definen efectivamente un vector de $\mathbf{L}_2(a,b)$. Si llamamos

$$
M = \max_{\{\lambda_k \neq 1\}} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k - 1|} \right\} \tag{25.6}
$$

(recordemos que los autovalores de un operador simétrico completamente continuo forman una secuencia que converge al origen - ver Propiedad 23.4), podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\sum_{\{e_k \,|\, \lambda_k \neq 1\}} |a_k|^2 &= \sum_{\{e_k \,|\, \lambda_k \neq 1\}} \frac{|(e_k, f)|^2}{(1-\lambda_k)^2} \leq \\
&\leq M^2 \sum_{\{e_k \,|\, \lambda_k \neq 1\}} |(e_k, f)|^2 \leq M^2 \parallel f \parallel^2 ,
\end{aligned} \tag{25.7}
$$

en virtud de la desigualdad de Bessel. Por lo tanto (ver Teorema 19.5), la serie

$$
\phi(t) = \sum_{\{e_k \,|\, \lambda_k \neq 1\}} a_k \, e_k(t) \tag{25.8}
$$

converge a un vector del espacio $\mathbf{L}_2(a,b)$.

Si $\lambda = 1$ no es un autovalor de A, el conjunto $\{e_k \,|\, \lambda_k \neq 1\}$ es un sistema ortonormal completo en $\mathbf{L}_2(a,b)$, y la ec. (25.2) tiene una única solución dada por[11]

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \sum_{\{e_k \,|\, \lambda_k \neq 1\}} \left\{ (e_k, f) + \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)}\,(e_k, f) \right\} e_k(t) = \\
&= f(t) + \sum_{\{e_k \,|\, \lambda_k \neq 0,1\}} \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)}\,(e_k, f)\; e_k(t)\,.
\end{aligned} \tag{25.9}
$$

[11] Nótese que con esta expresión sólo es necesario conocer las autofunciones de A correspondientes a autovalores no nulos.

En efecto, teniendo en cuenta la continuidad de los operadores acotados, podemos escribir

$$(\mathbf{I}-A)\,\phi(t) = (\mathbf{I}-A)\sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 1\}} \frac{(e_k,f)}{(1-\lambda_k)}\;e_k(t) =$$

(25.10)

$$= \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 1\}} \frac{(e_k,f)}{(1-\lambda_k)}\;(\mathbf{I}-A)\,e_k(t) = \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 1\}} (e_k,f)\,e_k(t) = f(t)\,.$$

Por otra parte, si $\lambda = 1$ es autovalor de A, entonces el subespacio característico correspondiente, $\mathbf{E}_{(1)}$, tiene dimensión finita (dado que A es completamente continuo - ver Propiedad 23.4).

Sea $\{\mathcal{E}_1(t),\ldots,\mathcal{E}_n(t)\}$ una base ortonormal de $\mathbf{E}_{(1)}$. La ecuación (25.4) implica que

$$(1-1)\,(\mathcal{E}_k,\varphi) = 0 = (\mathcal{E}_k,f)\,,\quad k=1,2,\ldots,n\,. \tag{25.11}$$

Esto es una contradicción a menos que $f(t)\perp\mathcal{E}_k(t)\,,k=1,2,\ldots,n$. En este caso, el vector $\phi(t)$ (ec. (25.9)) es una solución particular de la ecuación (25.2). Pero esa solución no es única[12], dado que los n coeficientes de Fourier $(\mathcal{E}_k,\varphi)$ quedan indeterminados.

La solución general de (25.2) se escribe como la suma de $\phi(t)$ y la solución general de la ecuación homogénea:

$$\varphi(t) = \phi(t) + \phi_1(t) =$$

(25.12)

$$= f(t) + \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 0,1\}} \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)}\;e_k(t) + \phi_1(t)\,,$$

donde $\phi_1(t) = c_1\,\mathcal{E}_1(t)+\cdots+c_n\,\mathcal{E}_n(t)$ es un autovector arbitrario de A correspondiente al autovalor 1. Esto significa que la solución está determinada a menos de la elección de n constantes arbitrarias.

Finalmente, si $f(t)$ no es ortogonal al subespacio característico correspondiente al autovalor 1 la ecuación integral (25.2) no tiene solución[13].

[12]En efecto, si $\lambda=1$ es autovalor de A, la ecuación homogénea $(\mathbf{I}-A)\phi_1=\mathbf{0}$ tiene soluciones no triviales. Entonces, si existe una solución para la ecuación inhomogénea $(\mathbf{I}-A)\phi=f$, ella no es única puesto que $(\mathbf{I}-A)(\phi+\phi_1)=f$.

[13]En efecto, si $(\mathbf{I}-A)\varphi=f$, y $(\mathbf{I}-A)\phi_1=\mathbf{0}$, entonces

$$\big(\phi_1,(\mathbf{I}-A)\varphi\big) = \big((\mathbf{I}-A)\phi_1,\varphi\big) = \big(\mathbf{0},\varphi\big) = 0 = \big(\phi_1,f\big)\,. \tag{25.13}$$

Nótese que $\big(\varphi(t) - f(t)\big) = A\,\varphi(t) \in \mathrm{Rank}(A)$, de modo que si el núcleo $K(t,s)$ satisface la condición de Hilbert - Schmidt, entonces la serie en el miembro de la derecha de la ec. (25.9) no sólo converge en media, sino también absoluta y uniformemente.

En particular, si el núcleo $K(t,s)$ es continuo, entonces la diferencia $\big(\varphi(t) - f(t)\big)$ es una función continua.

25.1. Cálculo de autofunciones y autovalores de un operador integral.

Hemos visto que la expresión de la solución de la ecuación integral (25.2) requiere del conocimiento de las autofunciones del operador integral correspondientes a autovalores no nulos (ver ec. (25.12)).

En lo que sigue veremos cómo calcular esas autofunciones en el caso de un operador de Fredholm de núcleo degenerado (no necesariamente simétrico).

Consideremos un operador integral A definido por el núcleo

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\, \psi_k(s)^*\,, \quad \varphi_k(t), \psi_k(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)\,, \tag{25.14}$$

donde los conjuntos $\{\varphi_k\,, k = 1,\ldots,n\}$ y $\{\psi_k\,, k = 1,\ldots,n\}$ son linealmente independientes.

Como el operador A aplica todo $\mathbf{L}_2(a,b)$ en el subespacio de dimensión finita generado por las funciones $\{\varphi_k\,, k = 1,\ldots,n\}$, todo autovector correspondiente a un autovalor no nulo deber estar contenido en ese subespacio.

Proponemos entonces para un autovector $e(t)$ tal que

$$A\, e(t) = \lambda\, e(t)\,, \quad \text{con } \lambda \neq 0\,, \tag{25.15}$$

una combinación lineal de la forma

$$e(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \varphi_k(t) \tag{25.16}$$

que, reemplazada en la ecuación de autovalores, conduce a

$$\begin{array}{c} \big(A - \lambda\,\mathbf{I}\big)\, e(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\, \big(\psi_k, e\big) - \lambda\, e(t) = \\ = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) \left\{ \sum_{l=1}^{n} \big[\big(\psi_k, \varphi_l\big) - \lambda\, \delta_{kl} \big]\; c_l \right\} = 0\,. \end{array} \tag{25.17}$$

Dado que las funciones $\varphi_k(t)$ son linealmente independientes, la ec. (25.17) se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas,

$$(\mathbf{M} - \lambda\,\mathbf{1})\,\bar{c} = \bar{0}\,, \quad \text{con } \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \tag{25.18}$$

donde $\mathbf{M}_{kl} = (\psi_k, \varphi_l)$ y $\mathbf{1}$ es la matriz identidad de $n \times n$.

Este sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales para aquellos valores de λ que sean ceros del determinante $\det(\mathbf{M} - \lambda\,\mathbf{1})$, que es un polinomio de grado n en λ. Dichas soluciones determinan las autofunciones del operador A a través de la ec. (25.16).

Si el núcleo $K(t,s)$ es no degenerado, siempre puede ser aproximado (en la métrica de $\mathbf{L}_2\big((a,b) \times (a,b)\big)$) por una suma parcial de su desarrollo de Fourier respecto de algún sistema ortonormal y completo, $K_n(t,s)$, que sí es un núcleo degenerado. Los autovalores y autovectores de este último pueden ser determinados por el método antes descrito.

Bajo ciertas condiciones de regularidad del núcleo $K(t,s)$ (que no discutiremos en este curso - ver, por ejemplo, *Methods of Mathematical Physics* - Vol. I, R. Courant y D. Hilbert), estas aproximaciones convergen a los autovalores y autofunciones del núcleo original.

25.2. El método de Rayleigh y Ritz. Consideremos una funcional $F[\varphi]$, definida sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, que toma valores reales.

Los **extremos** de la funcional son aquellos vectores $\varphi \in \mathbf{E}$ para los cuales la diferencia $(F[\varphi + \varepsilon h] - F[\varphi])$ toma el mismo signo cualquiera que sea el vector unitario $h \in \mathbf{E}$, siempre que $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sea suficientemente pequeño.

La **primera variación** de la funcional $F[\varphi]$ se denota por $\delta F[\varphi, \varepsilon h]$ y se define como la parte lineal en ε de la diferencia

$$F[\varphi + \varepsilon h] - F[\varphi] = \delta F[\varphi, \varepsilon h] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,, \quad \text{con } h \in \mathbf{E}\,. \tag{25.19}$$

Los extremos de $F[\varphi]$ corresponden a aquellos vectores $\varphi \in \mathbf{E}$ que, para todo h, anulan a su primera variación.

En efecto, como $\delta F[\varphi, \varepsilon h]$ es lineal en ε, si $\delta F[\varphi, \varepsilon h] \neq 0$ para algún h unitario, entonces hay vectores próximos de φ, de la forma $(\varphi + \varepsilon h)$ con $|\varepsilon| \ll 1$, para los cuales $F[\varphi + \varepsilon h]$ es mayor o menor que $F[\varphi]$, según sea el signo de ε. En consecuencia, la existencia de un extremo de $F[\varphi]$ requiere que $\delta F[\varphi, \varepsilon h] = 0$.

Consideremos ahora un operador simétrico (no necesariamente acotado) A, definido sobre un dominio $\mathcal{D}(A)$ denso en un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$, y definamos la funcional (real)

$$F[\varphi] := \frac{(\varphi, A\,\varphi)}{(\varphi,\varphi)}\,, \quad \varphi \in \mathbf{E}\,. \tag{25.20}$$

Para $\varphi, h \in \mathcal{D}(A)$ tenemos

$$\delta(\varphi, A\,\varphi) = (\varepsilon h, A\,\varphi) + (\varphi, A\,\varepsilon h) =$$

$$= \varepsilon\,\{(h, A\,\varphi) + (A\,\varphi, h)\} = 2\,\varepsilon\,\Re(h, A\,\varphi)\,, \tag{25.21}$$

$$\delta(\varphi,\varphi)^{-1} = \frac{-1}{(\varphi,\varphi)^2}\,\{(\varepsilon h, \varphi) + (\varphi, \varepsilon h)\} = \frac{-2\,\varepsilon}{(\varphi,\varphi)^2}\,\Re\left(h, \varphi\right),$$

de modo que

$$\delta F[\varphi, \varepsilon h] = \frac{2\,\varepsilon}{(\varphi,\varphi)}\,\Re\left(h, A\,\varphi - F[\varphi]\,\varphi\right). \tag{25.22}$$

Los extremos de la funcional corresponden a los vectores que satisfacen

$$\delta F[\varphi, \varepsilon h] = 0\,,\ \forall\, h \ \Rightarrow\ A\,\varphi - F[\varphi]\,\varphi = \mathbf{0}\,, \tag{25.23}$$

dado que el dominio de definición de A es un subespacio denso (y no existen vectores no nulos ortogonales a subespacios densos). Es decir, los extremos corresponden a los autovectores de A,

$$A\,\varphi = \lambda\,\varphi\,, \quad \text{con } \lambda = F[\varphi]\,. \tag{25.24}$$

Si A es acotado, entonces

$$\Big|F[\varphi]\Big| = \left|\frac{(\varphi, A\,\varphi)}{(\varphi,\varphi)}\right| \leq \frac{\|\, A\,\varphi \,\|}{\|\, \varphi \,\|} \leq \|\, A \,\|\ . \tag{25.25}$$

Y si además A es compacto, sabemos que existe un autovector e_1 de autovalor λ_1 tal que $|\lambda_1| = \|\, A \,\|$.

Por ejemplo, podemos intentar aproximar el autovalor de A de mayor valor absoluto, cuyo autovector es el límite de una secuencia de la forma

$$e_1 = \lim_{n\to\infty} \varphi_n\,, \quad \varphi_n = \xi_1\,x_1 + \xi_2\,x_2 + \cdots + \xi_n\,x_n\,, \tag{25.26}$$

donde φ_n es una suma parcial del desarrollo de Fourier de e_1 referido a un sistema $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, ortonormal y completo en el espacio $\mathbf{E}$.

La funcional $F[\varphi]$ evaluada en φ_n se reduce a una función de n variables,

$$F[\varphi_n] = f(\xi_1, \ldots\, \xi_n)\,, \quad \text{tal que } |f(\xi)| = |F[\varphi_n]| \leq \|\, A \,\|\ . \tag{25.27}$$

Entonces, cuando nos restringimos a ese subespacio n-dimensional, vemos que la mejor aproximación al extremo de la funcional está determinada por un problema de extremos de una función ordinaria,

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_k} = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,, \tag{25.28}$$

cuya solución permite determinar un vector

$$\bar{\varphi}_n = \bar{\xi}_1\, x_1 + \bar{\xi}_2\, x_2 + \cdots + \bar{\xi}_n\, x_n \tag{25.29}$$

(que no necesariamente coincide con φ_n).

De ese modo, el autovalor de máximo valor absoluto puede obtenerse como

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} F[\bar{\varphi}_n]\,. \tag{25.30}$$

No obstante, el problema de la convergencia de la secuencia $\{\bar{\varphi}_n\}$ al autovector correspondiente e_1 es mucho más delicado, pues depende de la apropiada elección del sistema completo en $\mathbf{E}$ en relación al operador A considerado, y debe ser analizado en cada caso particular (ver, por ejemplo, *Methods of Mathematical Physics* - Vol. I, R. Courant y D. Hilbert).

26. Operadores no acotados con inversas completamente continuas

Consideremos un operador lineal **no acotado** L, definido sobre un subespacio $\mathcal{D}(L)$ de un espacio euclídeo $\mathbf{E}$.

Un operador lineal acotado A, definido sobre todo E, se dice **inverso** de L si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\forall\, x \in \mathbf{E}$ se cumple que $A\, x \in \mathcal{D}(L)$ y $LA\, x = x$,
- $\forall\, y \in \mathcal{D}(L)$ es $AL\, y = y$,

Es decir, A es el inverso de L si es su inverso tanto a izquierda como a derecha.

Ejemplo:

• Consideremos el operador diferencial

$$D\, y(t) := y'(t)\,, \tag{26.1}$$

definido sobre el conjunto $\mathcal{D}(D)$ formado por las funciones **absolutamente continuas**[14] en $[a, b]$, tales que $y(a) = 0$ y su derivada primera $y'(t) \in \mathbf{L}_2(a, b)$.

Ya sabemos que las funciones diferenciables en (a, b) que se anulan idénticamente en entornos de los extremos de ese intervalo forman un conjunto denso en

[14] Una función $\varphi(t)$ se dice **absolutamente continua**, $\varphi(t) \in \mathcal{AC}(a, b)$, si es una función continua en (a, b) cuya derivada (en el sentido de límite de cociente incremental) existe en casi

$\mathcal{C}_2(a,b)$. Como esas funciones son absolutamente continuas, resulta que $\mathcal{D}(D)$ es un subespacio denso de $\mathcal{C}_2(a,b)$.

Veremos que el operador integral A definido como

$$A\,x(t) := \int_a^t x(s)\,ds = \int_a^b \Theta(t-s)\,x(s)\,ds\,, \tag{26.6}$$

donde

$$\Theta(t-s) := \begin{cases} 1\,, & t \geq s\,, \\ 0\,, & t < s\,, \end{cases} \tag{26.7}$$

es el inverso de D. Tratándose de un operador de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable (siempre que $(b-a)<\infty$), A es completamente continuo y está definido sobre todo $\mathbf{L}_2(a,b)$.

Tengamos en cuenta que si $x(t)\in\mathbf{L}_2(a,b)$, entonces $x(t)$ es sumable en $[a,b]$ (y, por lo tanto, localmente sumable). En efecto, dado que $\mathbf{1}(t)\equiv 1\in\mathbf{L}_2(a,b)$ (para $(b-a)<\infty$), tenemos que

$$\big(\mathbf{1}(t),|x(t)|\big) = \int_a^b 1\times|x(t)|\,dt \leq \parallel \mathbf{1} \parallel \parallel x \parallel = \sqrt{b-a}\ \parallel x \parallel\ . \tag{26.8}$$

Por lo tanto,

$$\int_{a_1}^{b_1} |x(t)|\,dt \leq\ \sqrt{b-a}\ \parallel x \parallel\,, \quad \forall\, a_1,b_1\in[a,b]\,. \tag{26.9}$$

---

todo punto de ese intervalo y es una función **localmente sumable**:

$$\varphi'(t)\in\mathbf{L}_\mathbf{1}^{(\mathbf{loc.})}(a,b) \Rightarrow \int_{a_1}^{b_1} |\varphi'(t)|\,dt < \infty\,, \quad \forall\, a_1,b_1 \ \big|\ a<a_1<b_1<b\,. \tag{26.2}$$

Las funciones absolutamente continuas forman un subespacio denso en el espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$, dado que $\mathcal{P}_2(a,b)\subset\mathcal{AC}(a,b)$.

Se puede demostrar que estas funciones pueden ser reconstruidas a partir de su derivada mediante la regla de Barrow:

$$\varphi(t)\in\mathcal{AC}(a,b) \Rightarrow \varphi'(t)\in\mathbf{L}_\mathbf{1}^{(\mathbf{loc.})}(a,b),\ \text{y}\ \varphi(t) = \int_{a_1}^t \varphi'(s)\,ds + \varphi(a_1)\,. \tag{26.3}$$

Para las funciones absolutamente continuas también vale la regla de integración por partes. En efecto, si $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in AC(a,b)$, entonces $\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\in AC(a,b)$, la derivada del producto es

$$(\varphi_1(t)\,\varphi_2(t))' = \varphi_1'(t)\,\varphi_2(t) + \varphi_1(t)\,\varphi_2'(t) \in \mathbf{L}_\mathbf{1}^{(\mathbf{loc.})}(a,b)\,, \tag{26.4}$$

y

$$\int_{a_1}^t \varphi_1(s)\,\varphi_2'(s)\,ds = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t) - \varphi_1(a_1)\,\varphi_2(a_1) - \int_{a_1}^t \varphi_1'(s)\,\varphi_2(s)\,ds\,. \tag{26.5}$$

En esas condiciones, $x(t)$ tiene una **primitiva** $y(t) \in AC(a,b)$,

$$y(t) = \int_a^t x(s)\,ds + y(a)\,, \tag{26.10}$$

cuya derivada es $y'(t) = x(t)$ en casi todo punto. Si elegimos que $y(a) = 0$, entonces $y(t) \in \mathcal{D}(D)$.

Por lo tanto, $D : \mathcal{D}(D) \to \mathbf{L}_2(a,b)$, mientras que $A : \mathbf{L}_2(a,b) \to \mathcal{D}(D)$. Además, se satisface en casi todo punto que

(26.11)

- $AD\,y(t) = \int_a^t y'(s)\,ds = y(t) - y(a) = y(t)\,, \quad \forall\, y(t) \in \mathcal{D}(D)\,,$
- $DA\,x(t) = \left(\int_a^t x(s)\,ds\right)' = x(t)\,, \quad \forall\, x(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)\,.$

Es decir, A es el inverso de D. ◇

Lema 26.1. *Supongamos que un operador lineal completamente continuo A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, es el inverso de un operador lineal no acotado L, definido sobre un subespacio $\mathcal{D}(L) \subset \mathbf{E}$. Entonces*

- *los autovalores de A son todos no nulos,*
- *los autovalores de L son todos no nulos,*
- *todo autovector de A correspondiente al autovalor λ es también un autovector de L correspondiente al autovalor $\mu = 1/\lambda$.*

Supongamos que $A\,x = \mathbf{0}$, entonces $x = (LA)\,x = L(A\,x) = L\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Pero $x = \mathbf{0}$ no es un autovector de A.

Similarmente se prueba que si $L\,y = \mathbf{0} \Rightarrow y = \mathbf{0}$.

Supongamos ahora que $A\,x = \lambda\,x$, con $\lambda \neq 0$. Entonces, $x = (LA)\,x = L(A\,x) = L(\lambda\,x) = \lambda\,L\,x \Rightarrow L\,x = \mu\,x$, con $\mu = 1/\lambda$. □

Teorema 26.2. *Sea L un operador lineal no acotado, definido sobre un subespacio $\mathcal{D}(L)$ de un espacio de Hilbert $\mathbf{E}$. Si L tiene por inversa a un operador lineal simétrico y completamente continuo A, entonces L también tiene un sistema ortonormal y completo de autovectores correspondientes a autovalores no nulos. En particular, L está densamente definido.*

En efecto, si A es simétrico y compacto en un espacio de Hilbert, por el Teorema 23.8 sabemos que tiene un conjunto ortonormal y completo de autovectores. Según el Lema 26.1, esos autovectores corresponden a autovalores no nulos, y son simultáneamente autovectores de L: para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$A\, e_k = \lambda_k\, e_k\,,\ \lambda_k \neq 0 \ \Rightarrow\ L\, e_k = \mu_k\, e_k\,,\ \text{con}\ \mu_k = \frac{1}{\lambda_k}\,. \tag{26.12}$$

En particular, $e_k = \mu_k\, A\, e_k \in \mathcal{D}(L)$.

Por lo tanto, $\mathcal{D}(L)$ contiene un conjunto ortonormal y completo de autovectores de L correspondientes a autovalores no nulos. Por el Teorema 19.4, resulta que $\mathcal{D}(L)$ es un subespacio denso en $\mathbf{E}$.

27. El operador de Sturm - Liouville

Un operador de Sturm - Liouville definido sobre un espacio de funciones con una derivada segunda continua, $y''(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$, donde $-\infty < a < b < \infty$, opera de la forma

$$L\, y(t) = \Big(p(t)\, y'(t)\Big)' + q(t)\, y(t) = x(t)\,, \tag{27.1}$$

con $x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$ si las funciones reales $p(t), p'(t)$ y $q(t)$ son continuas en $[a,b]$.

Si $p(a) \neq 0 \neq p(b)$, este operador resulta simétrico si las funciones pertenecientes a su domino de definición, $\mathcal{D}(L)$, satisfacen además condiciones de contorno locales homogéneas de la forma

$$\alpha\, y(a) + \beta\, y'(a) = 0\,, \quad \gamma\, y(b) + \delta\, y'(b) = 0\,, \tag{27.2}$$

con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \neq \gamma^2 + \delta^2$.

Un operador de esas características se dice **no singular** si la ecuación $L\, y(t) = \mathbf{0}(t)$ no tiene en $\mathcal{D}(L)$ soluciones no triviales.

Supongamos que L sea no singular, y que la ecuación

$$L\, y(t) = x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b) \tag{27.3}$$

tenga una solución $y(t) \in \mathcal{D}(L)$. Entonces esa solución es única, puesto si tenemos que también es $L\, z(t) = x(t)$, con $z(t) \in \mathcal{D}(L)$, entonces

$$L\Big(y(t) - z(t)\Big) = x(t) - x(t) = \mathbf{0}(t) \Rightarrow z(t) \equiv y(t)\,. \tag{27.4}$$

Mostraremos que para todo operador de Sturm - Liouville no singular $L : \mathcal{D}(L) \to \mathcal{C}_2(a,b)$ existe un operador integral de Fredholm $A : \mathcal{C}_2(a,b) \to \mathcal{D}(L)$, cuyo núcleo $K(t,s)$ es una función real simétrica y continua, que tiene la propiedad de que para toda función continua $x(t)$, la función

$$y(t) = A\, x(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds \tag{27.5}$$

tiene una derivada segunda continua y satisface las condiciones de contorno (27.2), además de ser (la única) solución de la ecuación $L\, y(t) = x(t)$. En esas condiciones, A es inverso de L a derecha:

$$L\, y(t) = LA\, x(t) = x(t)\,, \quad \forall\, x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)\,. \tag{27.6}$$

Inversamente, si $y(t) \in \mathcal{D}(L)$ entonces $L\, y(t) = x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$. Como la solución de esta ecuación es única, $y(t)$ puede ser representada como en (27.5), de modo que A también resulta ser inverso de L a izquierda:

$$A\, x(t) = AL\, y(t) = y(t)\,, \quad \forall\, y(t) \in \mathcal{D}(L)\,. \tag{27.7}$$

Para determinar el operador inverso de L, dada cualquier función continua $x(t)$, debemos hallar la solución de la **ecuación diferencial inhomogénea**

$$\hat{L}\, y(t) = p(t)\, y''(t) + p'(t)\, y'(t) + q(t)\, y(t) = x(t) \tag{27.8}$$

que satisfaga las condiciones de contorno locales especificadas en (27.2). En la ecuación (27.8), $\hat{L}$ es entendido sólo como un operador diferencial (sin un dominio restringido más allá de la existencia de la derivada segunda de las funciones sobre las que opera).

Para fijar ideas, en lo que sigue adoptaremos las **condiciones de contorno de Dirichlet**[15] en ambos extremos,

$$y(a) = 0\,, \quad y(b) = 0\,. \tag{27.10}$$

Toda ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes continuos, como $\hat{L}\, u(t) \equiv 0$, tiene dos soluciones linealmente independientes, $u_1(t)$ y $u_2(t)$ (funciones dos veces diferenciables). Estas pueden ser elegidas de manera que satisfagan la condición de contorno (27.10) en uno de los extremos del intervalo $[a,b]$ (y sólo en uno, dado que estamos suponiendo que L es no singular),

$$\hat{L}\, u_{1,2}(t) = 0\,,\ \forall\, t \in (a,b)\,, \quad u_1(a) = 0\,, \quad u_2(b) = 0\,. \tag{27.11}$$

Para construir la solución de (27.8) podemos seguir el **método de los coeficientes indeterminados**, y proponer

$$y(t) = C_1(t)\, u_1(t) + C_2(t)\, u_2(t)\,, \tag{27.12}$$

[15]La construcción del inverso para las **condiciones de Neumann**,

$$y'(a) = 0\,, \quad y'(b) = 0\,, \tag{27.9}$$

o para las más generales **condiciones de Robin**, ec. (27.2), es enteramente similar.

donde las funciones $C_{1,2}(t)$ son dos veces diferenciables. Esta expresión debe ser reemplazada en (27.8), lo que da lugar a una primera ecuación que involucra a estas dos funciones.

Para la derivada de $y(t)$ tenemos

$$y'(t) = C_1(t)\,u_1'(t) + C_2(t)\,u_2'(t) + C_1'(t)\,u_1(t) + C_2'(t)\,u_2(t)\,. \tag{27.13}$$

Como necesitamos una segunda ecuación para determinar las dos funciones $C_1(t)$ y $C_2(t)$ (y a los efectos de simplificar los cálculos evitando la aparición de las derivadas segundas de estas funciones), podemos imponer que

$$C_1'(t)\,u_1(t) + C_2'(t)\,u_2(t) = 0\,, \tag{27.14}$$

de donde resulta que

$$y''(t) = C_1(t)\,u_1''(t) + C_2(t)\,u_2''(t) + C_1'(t)\,u_1'(t) + C_2'(t)\,u_2'(t)\,. \tag{27.15}$$

Reemplazando (27.12-27.15) en (27.8) obtenemos

$$\begin{gathered}\hat{L}\,y(t) = C_1(t)\,\hat{L}\,u_1(t) + C_2(t)\,\hat{L}\,u_2(t) + \\ +p(t)\Big(C_1'(t)\,u_1'(t) + C_2'(t)\,u_2'(t)\Big) = x(t)\,.\end{gathered} \tag{27.16}$$

Entonces, de (27.11), (27.14) y (27.16) obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas para las derivadas de las funciones que tratamos de determinar,

$$\begin{pmatrix} p(t)\,u_1'(t) & p(t)\,u_2'(t) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix}\,. \tag{27.17}$$

El discriminante del sistema,

$$\begin{gathered}\det \begin{pmatrix} p(t)\,u_1'(t) & p(t)\,u_2'(t) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{pmatrix} = \\ = p(t)\big\{u_1'(t)\,u_2(t) - u_1(t)\,u_2'(t)\big\} = p(t)\,W[u_1,u_2](t) = C_0\end{gathered} \tag{27.18}$$

(donde $W[u_1,u_2]$ es el Wronskiano de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea), es una constante no nula, como puede verificarse fácilmente tomando su derivada y empleando la ecuación (27.11), y teniendo en cuenta que

$$C_0 = p(a)\,u_1'(a)\,u_2(a) = -p(b)\,u_1(b)\,u_2'(b)\,. \tag{27.19}$$

En esas condiciones,

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t)\, u_1'(t) & p(t)\, u_2'(t) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

(27.20)

$$= \frac{1}{C_0} \begin{pmatrix} u_2(t) & -p(t)\, u_2'(t) \\ -u_1(t) & p(t)\, u_1'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde resulta que

(27.21) $$C_1'(t) = \frac{u_2(t)\, x(t)}{C_0}\,, \quad C_2'(t) = -\frac{u_1(t)\, x(t)}{C_0}\,.$$

Ahora debemos elegir primitivas de estas funciones que garanticen que $y(t)$ satisfaga las condiciones de contorno requeridas, ec. (27.10). Esto se logra con

(27.22) $$C_1(t) = -\int_t^b \frac{u_2(s)\, x(s)}{C_0}\, ds\,, \quad C_2(t) = -\int_a^t \frac{u_1(s)\, x(s)}{C_0}\, ds\,.$$

Por lo tanto, dada $x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$, la función dos veces diferenciable que es solución de la ec. (27.8) y que satisface las condiciones de contorno (27.10) está dada por

$$y(t) = -\frac{1}{C_0} \left\{ \int_t^b u_1(t)\, u_2(s)\, x(s)\, ds + \int_a^t u_1(s)\, u_2(t)\, x(s)\, ds \right\} =$$

(27.23)

$$= \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds = A\, x(t) \in \mathcal{D}(L)\,,$$

donde el núcleo del operador integral A,

(27.24) $$K(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(t)\, u_2(s)}{C_0}\,, & t \leq s\,, \\[2ex] -\dfrac{u_1(s)\, u_2(t)}{C_0}\,, & t > s\,, \end{cases}$$

es una función continua de sus dos variables, incluso en $t = s$.

Dado que $K(t,s)$, con $a \leq t, s \leq b$, es real, simétrico y está acotado, A es un operador integral de Fredholm simétrico y completamente continuo, que entonces tiene un conjunto ortonormal y completo de autovectores. Como el operador así construido es el inverso de L, por el Teorema 26.2 concluimos que L tiene un conjunto ortonormal y completo de autovectores que corresponden a autovalores no nulos.

Señalemos que, para $t \neq s$, el núcleo es una función dos veces diferenciable de la variable t (puesto que $u_1(t)$ y $u_2(t)$ lo son), satisface la ecuación diferencial

(27.25) $$\hat{L}\, K(t,s) = 0\,, \quad \text{para } t \neq s\,,$$

(puesto que $\hat{L}\, u_{1,2}(t) = 0$) y también las condiciones de contorno del problema,

$$K(a,s) = -\frac{u_1(a)\, u_2(s)}{C_0} = 0\,, \quad K(b,s) = -\frac{u_1(s)\, u_2(b)}{C_0} = 0\,. \tag{27.26}$$

Por otra parte, su derivada primera presenta una discontinuidad en $t = s$,

$$\begin{aligned} &\partial_t K(t,s)\Big|_{\{t=s^+\}} - \partial_t K(t,s)\Big|_{\{t=s^-\}} = \\ &= -\frac{\left(u_1(s)\, u_2'(s) - u_1'(s)\, u_2(s)\right)}{C_0} = \frac{W[u_1,u_2](s)}{C_0} = \frac{1}{p(s)}\,. \end{aligned} \tag{27.27}$$

Entonces, si adoptamos la regla usual de derivación de funciones diferenciables a trozos que tienen discontinuidades de altura finita[16], que prescribe sumar a la derivada de la función una **Delta de Dirac** concentrada en cada punto de discontinuidad y multiplicada por la altura de esa discontinuidad, obtenemos

$$\begin{aligned} &\hat{L}K(t,s) = p(t)\left(\frac{\delta(t-s)}{p(s)} + \partial_t^2 K(t,s)\right) + \\ &+p'(t)\, \partial_t K(t,s) + q(t)\, K(t,s) = \delta(t-s)\,. \end{aligned} \tag{27.28}$$

Esto muestra que el núcleo $K(t,s)$ del operador integral inverso de L, ec. (27.24), es la **función de Green** del problema de condiciones de contorno considerado.

Desde luego que toda función $y(t) \in \mathcal{D}(L)$ es el límite (en media) de su desarrollo de Fourier respecto del sistema ortonormal completo de autofunciones de L,

$$y(t) = A\, x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, (e_k, x)\, e_k(t)\,, \tag{27.29}$$

donde $x(t) = L\, y(t)$.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{D}(L) \subset \operatorname{Rank}(A)$, y que el núcleo continuo $K(t,s)$ satisface la condición de Hilbert - Schmidt, ec. (24.9), vemos que la serie en (27.29) también converge absoluta y uniformemente, de acuerdo con el Teorema 24.1.

Estos resultados permiten establecer el siguiente teorema.

Teorema 27.1. *Todo operador de Sturm - Liouville no singular tiene un conjunto ortonormal completo de autofunciones* $e_k(t) \in \mathcal{D}(L)\,, k \in \mathbb{N}$. *Además, toda función dos veces diferenciable que satisfaga las condiciones de contorno que especifican el dominio del operador,* $y(t) \in \mathcal{D}(L)$*, tiene un desarrollo de Fourier respecto de los autovectores* $e_k(t)$ *que converge absoluta y uniformemente.*

Ejemplo:

[16]regla que justificaremos más adelante, cuando tratemos la teoría de distribuciones.

• Consideremos el operador $L\,x(t) = x''(t)$, definido sobre el subespacio de $\mathcal{C}_2(0,\pi)$ formado por las funciones dos veces diferenciables que satisfacen las condiciones de contorno $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$.

Se trata de un operador de Sturm - Liouville no singular. En efecto, $x''(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) = a + b\,t$, pero $x(0) = a = 0$ y $x(\pi) = b\,\pi = 0$ requieren que $x(t) \equiv 0$.

Por lo tanto, L así definido tiene una inversa simétrica y completamente continua, y sus autofunciones, $e_k(t) = \sin(kt)\,, k \in \mathbb{N}$, forman un sistema ortonormal y completo en $\mathbf{L}_2(0,\pi)$ (cosa que ya sabíamos).

Además, toda función dos veces diferenciable que se anula en $t = 0, \pi$ tiene un desarrollo en serie de senos que no sólo converge en media, sino también absoluta y uniformemente. $\diamond$

Consideremos ahora el caso de un operador de Sturm - Liouville **singular**, es decir, un operador simétrico L, como el definido por las ecuaciones (27.1) y (27.2), que tiene un autovalor nulo.

Teniendo en cuenta que autovectores de un operador simétrico correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí, y que en un espacio de Hilbert, como es $\mathbf{L}_2(a,b)$, no puede haber más que una cantidad infinita numerable de vectores ortogonales entre sí, vemos que no todo número real puede ser un autovalor de L.

Supongamos que $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ no es autovalor de L, y definamos sobre el mismo dominio un nuevo operador: $L_1 := L - \lambda_0\,\mathbf{I}$, con $\mathcal{D}(L_1) = \mathcal{D}(L)$. L_1 es también un operador de Sturm - Liouville simétrico, que difiere del anterior sólo en que $q(t) \to (q(t) - \lambda_0)$. Pero, a diferencia de L, L_1 es no singular.

En esas condiciones, valen para L_1 las propiedades antes descritas. En particular, L_1 tiene un conjunto ortonormal y completo de autofunciones correspondientes a autovalores no nulos,

$$L_1\,e_k(t) = \mu_k\,e_k(t) \Rightarrow L\,e_k(t) = (\mu_k + \lambda_0)\,e_k(t)\,. \tag{27.30}$$

Pero entonces L también tiene un sistema ortonormal completo de autofunciones $e_k(t)$ correspondientes a autovalores $\lambda_k = \mu_k + \lambda_0$, uno de los cuales es nulo. Y toda función $y(t) \in \mathcal{D}(L)$ tiene un desarrollo en serie de autofunciones de L que converge absoluta y uniformemente.

Ejemplo:

• Los polinomios de Legendre son los autovectores del operador de Sturm - Liouville definido sobre el subespacio de las funciones dos veces diferenciables en

$(-1,1)$, sobre las que actúa como

$$L\,y(t) = \frac{d}{dt}\Big([t^2-1]\,\frac{dy}{dt}\Big)\,. \tag{27.31}$$

En este caso tenemos que $q(t)\equiv 0$, mientras que $p(t)=t^2-1$ se anula en los extremos del intervalo. En esas condiciones, el operador es simétrico sin necesidad de imponer condiciones de contorno adicionales.

Los polinomios de Legendre están dados por la expresión

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k\,k!}\,\frac{d^k}{dt^k}\Big([t^2-1]^k\Big) \tag{27.32}$$

y satisfacen

$$L\,P_k(t) = k(k+1)\,P_k(t)\,,\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{27.33}$$

lo que muestra que L es singular.

Supongamos que $L\,y(t)=\mu\,y(t)$, con $\mu\neq k(k+1)$, para $k=0,1,2,\ldots$. Entonces $y(t)\perp P_k(t)$, $\forall\,k$, porque L es simétrico. Pero esto implica que $y(t)=\mathbf{0}(t)$, dado que los polinomios de Legendre forman un sistema ortogonal y completo.

Por lo tanto, μ no es autovalor de L y $L_1=L-\mu\,\mathbf{I}$ es no singular, de modo que satisface las condiciones del Teorema 27.1[17].

[17]En esas condiciones, L_1 tiene una inversa simétrica y completamente continua, que puede construirse de manera similar a la del caso en que $p(t)$ no se anula en los extremos del intervalo considerado. Por ejemplo, tomando $\mu=1\neq k(k+1)\,,\forall\,k=0,1,2,\ldots$, las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea

$$\hat{L}_1\,y(t) = \frac{d}{dt}\Big([t^2-1]\,\frac{dy}{dt}\Big) - y(t) = 0 \tag{27.34}$$

pueden ser elegidas como las funciones de Legendre

$$u_1(t) = P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(-t)\,,\quad u_2(t) = P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(t)\,. \tag{27.35}$$

El comportamiento de las funciones de Legendre $P_x(t)$ cerca de los extremos del intervalo $[-1,1]$ está dado por

$$P_x(t) = \begin{cases} 1+O(1-t)\,, & t\approx 1\,,\\ \\ -\log(1+t)+O(1+t)^0\,, & t\approx -1\,,\end{cases} \tag{27.36}$$

de modo que $u_1(t)$ es regular en $t=-1$ (mientras que $u_2(t)$ lo es en $t=1$), presentado en el extremo opuesto una singularidad integrable.

En esas condiciones, el núcleo del operador inverso de L_1 está dado como en la ec. (27.24), con $u_1(t)$ y $u_2(t)$ dadas en la ec. (27.35) y la constante $C_0=0{,}59335$. La solución (continua y dos veces diferenciable) de la ecuación inhomogénea

$$\hat{L}_1\,y(t) = x(t)\in\mathcal{C}_2(-1,1)\,, \tag{27.37}$$

En conclusión, toda función dos veces diferenciable en el intervalo $(-1, 1)$ tiene un desarrollo en serie de polinomios de Legendre que converge absoluta y uniformemente. $\diamond$

28. Apéndice: Conjuntos numerables

En este Apéndice mostraremos que el conjunto de los polinomios con coeficientes racionales y de grado arbitrario es numerable.

Lema 28.1. *La unión de un conjunto finito o infinito numerable de conjuntos numerables es también un conjunto numerable.*

Mostraremos esta propiedad para el caso de la unión de un conjunto numerable de numerables. Para ello consideremos los conjuntos

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{S}_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l}, \dots\}\ , \\
&\mathbf{S}_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2l}, \dots\}\ , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\mathbf{S}_k = \{a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kl}, \dots\}\ , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{28.1}
$$

Podemos ordenar todos esos elementos en una única secuencia adoptando alguna regla que nos permita asignar un número natural a cualquier elemento de uno cualquiera de esos conjuntos. Por ejemplo, podemos formar la secuencia

$$
\begin{gathered}
a_{11}, \{a_{12}, a_{22}, a_{21}\}, \{a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{32}, a_{31}\}, \\
\{a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}, a_{43}, a_{42}, a_{41}\}, \dots, \{a_{1k}, \dots, a_{kk}, \dots, a_{k1}\}, \dots
\end{gathered}
\tag{28.2}
$$

conviniendo en que elementos repetidos obtienen su posición en su primera aparición, y son omitidos en las siguientes.

Lema 28.2. *El conjunto de los números enteros es numerable.*

En efecto, $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$.

Lema 28.3. *El conjunto de los números racionales (números de la forma p/q, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$), es numerable.*

---

está dada por (ver ec. (27.23))

$$
y(t) = -\frac{1}{C_0}\left\{ P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(-t) \int_t^1 P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(s)\, x(s)\, ds + P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(t) \int_{-1}^t P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(-s)\, x(s)\, ds \right\} .
\tag{27.38}
$$

En efecto, el conjunto de los racionales sobre la recta, $\mathbb{Q}$, es la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables de fracciones de la forma

$$\mathbf{S}_q = \left\{ \frac{p}{q} \, , p \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{con } q = 1, 2, 3, \ldots \tag{28.3}$$

Lema 28.4. *El conjunto de pares ordenados formados con los elementos de dos conjuntos numerables es también numerable.*

Dados dos conjuntos numerables,

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\} \, , \\ \mathbf{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\} \, , \end{array} \tag{28.4}$$

el conjunto de pares ordenados $\{\langle a_k, b_l \rangle \, , \, \forall \, k, l\}$, es la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables de la forma

$$S_k = \{\langle a_k, b_l \rangle \, , \; l = 1, 2, \ldots\} \, , \; \text{con } k = 1, 2, \ldots \tag{28.5}$$

que, por el Lema 28.1, es numerable.

Ahora bien, el conjunto de los polinomios de todo grado con coeficientes racionales es la unión para todo n de los conjuntos de polinomios a coeficientes racionales de grado menor o igual a n. Entonces, de acuerdo al Lema 28.1, basta con mostrar que esos conjuntos son numerables.

Los polinomios a coeficientes racionales de grado cero son simplemente los números racionales, que forman un conjunto numerable.

Los polinomios de grado 1 de la forma $q_0 + q_1 \, t$, con $q_0, q_1 \in \mathbb{Q}$, están en correspondencia uno a uno con los pares ordenados de la forma $\langle q_0, q_1 \rangle$ que, de acuerdo al Lema 28.4, forman un conjunto numerable.

Procedemos por inducción. Podemos mostrar que si el conjunto de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes racionales, $\{Q_k(t) \, , \; k \in \mathbb{N}\}$, es numerable, el conjunto de los polinomios a coeficientes racionales de grado $\leq n+1$ también lo es. En efecto, los polinomios de la forma $Q_k(t) + q_l \, t^{n+1}$, con $q_l \in \mathbb{Q}$, están en correspondencia biunívoca con los pares ordenados de la forma $\langle Q_k(t), q_l \rangle$, los que forman un conjunto numerable de acuerdo con el Lema 28.4.

Bibliografía:

- *The Theory of Linear Spaces*, G. Ye. Shilov.
- *Mathematical Analysis*, G. Ye. Shilov.

- *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin
- *Methods of Mathematical Physics*, R. Courant y D. Hilbert.
- *Methods of Modern Mathematical Physics*, M. Reed y B. Simon.