CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

TEORÍA DE GRUPOS

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

NOTAS SOBRE GRUPOS CONTINUOS

1. Grupos continuos

Consideremos el grupo $O(3)$, cuyos elementos son las matrices reales ortogonales de 3×3,

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}, \quad R_{ij} \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Cada matriz $R \in O(3)$ corresponde un punto en $\mathbb{R}^9$ que yace sobre una hipersuperficie determinada por las seis ecuaciones algebraicas

$$R^t R = \mathbf{1_3} \Rightarrow R_{ik} R_{il} = \delta_{kl}, k \leq l, \tag{1.2}$$

lo que deja sólo tres parámetros reales independientes. Esa hipersuperficie ***suave***, de **dimensión** 3, es llamada **variedad** del grupo $O(3)$. Este es un ejemplo particular de **grupo continuo**.

En general, un grupo continuo de n parámetros (reales) tiene sus elementos identificados de manera biunívoca con los puntos de una **variedad n-dimensional**, inmersa en $\mathbb{R}^m$ (com $m \geq n$) y determinada por un conjunto de $m - n$ ecuaciones algebraicas.

Una forma de describir una hipersuperficie de ese tipo consiste en establecer **sistemas de coordenadas locales**, que pongan en correspondencia uno a uno los puntos de la variedad contenidos en una región abierta de $\mathbb{R}^m$ con los puntos de una región abierta de $\mathbb{R}^n$.

Actualizado el 1 de octubre de 2005.

En general no será posible establecer un único sistema **global** de coordenadas, sino que será necesario cubrir la variedad con un conjunto de abiertos, cada uno con su sistema local de coordenadas, los que deberán ser compatibilizados dando la relación entre unas y otras coordenadas en la región de superposición de dos abiertos. Estos conjuntos de abiertos, y las relaciones entre sus coordenadas, describen las propiedades globales o **topología de la variedad**.

Ejemplos: la esfera $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, determinada por la ecuación $x^2+y^2+z^2=1$, es una variedad bidimensional que puede ser cubierta con dos abiertos, entornos del polo norte y del polo sur respectivamente, en los que se puede establecer sistemas locales de coordenadas mediante la proyección estereográfica. Los puntos de la esfera contenidos en una banda alrededor del ecuador tendrán asignadas coordenadas en uno y otro sistema, pudiéndose escribir a unas como funciones **diferenciables** de las otras.

En ciertos casos es posible establecer un único sistema de coordenadas si a él se agrega cierta información sobre la topología de la variedad. Por ejemplo, los puntos sobre una circunferencia $\mathcal{S}^1$ pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los del segmento $[0, 2\pi]$ siempre que además se identifiquen sus extremos, $2\pi \equiv 0$.

En general, una **variedad diferenciable n-dimensional** $\mathcal{M}$ podrá ser cubierta por un **conjunto de abiertos** U_p, entornos de ciertos puntos $p \in \mathcal{M}$, tales que $\mathcal{M} = \bigcup_p U_p$. En cada abierto tendremos un sistema local de coordenadas, es decir, una aplicación $\phi_p : U_p \to \mathbb{R}^n$ que establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de la variedad en ese entorno y los de una región abierta de $\mathbb{R}^n$ (por lo que $\mathcal{M}$ resulta **localmente euclídea**). Además, si $U_p \cap U_q \neq \emptyset$, las coordenadas $\mathbf{x}$ asignadas por ϕ_p a un punto genérico de esa intersección serán **funciones continuas y diferenciables** de las coordenadas $\mathbf{y}$ que le asigna la aplicación ϕ_q a ese mismo punto, $\mathbf{x} = \left(\phi_p \circ \phi_q^{-1}\right)(\mathbf{y})$.

Definición 1.1. Un **grupo continuo** de dimensión n es un conjunto cuyos elementos están en correspondencia biunívoca con los puntos de una variedad diferenciable n-dimensional, y que además se estructura como un grupo respecto de cierta ley de composición asociativa, con neutro e inverso. Ambas estructuras están relacionadas por el hecho de que la composición de elementos del grupo (descrita en términos de sistemas locales de coordenadas establecidos en ciertos entornos de cada elemento) es una aplicación continua sobre la variedad.

Sean $a, b, c \cdots \in G$, elementos de un grupo continuo. Supongamos que, respecto de ciertos sistemas locales de coordenadas, $\phi_a(a) = \alpha$, $\phi_b(b) = \beta$, $\phi_c(c) = \gamma, \ldots$

En esas condiciones, existen funciones continuas Φ (que dependen de la elección de los sistemas locales de coordenadas) tales que, si $c = a \cdot b$, entonces

$$\gamma^\mu = \Phi^\mu(\alpha, \beta), \quad \mu = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Las propiedades de la ley de composición del grupo requieren que se satisfagan las siguientes condiciones.

- Asociatividad: como

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \Rightarrow \Phi\left(\alpha, \Phi(\beta, \gamma)\right) = \Phi\left(\Phi(\alpha, \beta), \gamma\right). \tag{1.4}$$

- Existencia del elemento neutro: sean $\varepsilon = \phi_e(e)$, las coordenadas locales de e; entonces

$$e \cdot a = a = a \cdot e \Rightarrow \Phi(\varepsilon, \alpha) = \alpha = \Phi(\alpha, \varepsilon). \tag{1.5}$$

- Existencia del elemento inverso: sean $\overline{\alpha} = \phi_{a^{-1}}(a^{-1})$, las coordenadas locales del elemento inverso de a; entonces

$$a^{-1} \cdot a = e = a \cdot a^{-1} \Rightarrow \Phi(\overline{\alpha}, \alpha) = \varepsilon = \Phi(\alpha, \overline{\alpha}). \tag{1.6}$$

Ejemplo: Los elementos del grupo $O(2)$ son matrices ortogonales de 2×2: $R^t R = \mathbf{1_2}$. Sus cuatro elementos de matriz (reales) están relacionados por las tres condiciones $R_{ik} R_{il} = \delta_{kl},\ k \leq l$, lo que deja un único parámetro real independiente.

Por otra parte, $\det R = \pm 1$. Pero la variación de un parámetro continuo no puede producir una discontinuidad en el determinante.

Las matrices de $O(2)$ con $\det R = 1$ pueden ser representadas como

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$.

Sea

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S^{-1}, \quad \text{con } \det S = -1. \tag{1.8}$$

Entonces, si $\det R' = -1 \Rightarrow \det(SR') = 1$. Por lo tanto, todo elemento de $O(2)$ con determinante -1 puede escribirse como

$$R'(\theta) = SR(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = R(-\theta)S. \tag{1.9}$$

Los elementos de $O(2)$ están entonces unívocamente identificados por un ángulo y el signo del determinante. Es inmediato verificar que la composición de elementos de este grupo es continua en ese parámetro. Por ejemplo, $R(\theta_1)R(\theta_2) = R\left(\theta_1 + \theta_2|_{mod 2\pi}\right)$.

En consecuencia, $O(2)$ es un grupo continuo, y su variedad asociada está constituida por dos circunferencias $\mathcal{S}^1$, una para cada signo del determinante. En particular, el elemento neutro está contenido en la hoja de la variedad con a determinante 1, la que corresponde al subgrupo $SO(2)$.

Definición 1.2. Una variedad se dice **conexa** si dos cualesquiera de sus puntos pueden ser unidos por una curva que yace sobre la misma variedad. La variedad de un grupo continuo puede estar constituida por más de una componente conexa.

Teorema 1.3. *La componente conexa de un grupo continuo G que contiene al elemento identidad e forma un subgrupo G_0, de la misma dimensión que G.*

En efecto, sean $a, b \in G_0$; entonces puede variarse con continuidad las coordenadas de esos elementos (eventualmente cambiando de sistemas locales de coordenadas) hasta hacerlos coincidir con le identidad. Es decir, hay caminos sobre la variedad del grupo que llevan $a \to e$ y $b \to e$. Como $b \cdot b^{-1} = e$, también $b^{-1} \in G_0$.

En consecuencia, como la ley de composición es continua, es posible cambiar con continuidad las coordenadas del producto $a \cdot b^{-1}$ de modo que $a \cdot b^{-1} \to a \to e$. Por lo tanto, $a \cdot b^{-1} \in G_0 \Rightarrow G_0$ es un subgrupo de G.

Por otra parte, $\dim G_0 = \dim G$, puesto que la parte conexa de la variedad que contiene a e tiene la misma dimensión que la variedad completa.

Teorema 1.4. *La componente conexa de un grupo continuo G que contiene al elemento identidad e, G_0, es un subgrupo invariante de G.*

Sea $a \in G_0$ y sea $b \in G$. Entonces es posible cambiar con continuidad las coordenadas del elemento conjugado $b \cdot a \cdot b^{-1}$ hasta hacerlo coincidir con e. En efecto, como a se conecta con continuidad con $e \Rightarrow b \cdot a \cdot b^{-1} \to b \cdot e \cdot b^{-1} = e \Rightarrow b \cdot a \cdot b^{-1} \in G_0$, $\forall\, b \in G$.

Ejemplo: $SO(2)$ es un subgrupo invariante de $O(2)$.

Las componentes de la variedad de un grupo continuo G no conexas con la identidad son isomorfas a G_0 como variedad. En efecto, sea $d \notin G_0$, entonces la composición con d a izquierda constituye una aplicación biunívoca entre G_0 y el coset $d \cdot G_0$. Esta relación uno a uno permite establecer sistemas locales de coordenadas que cubren completamente a esa hoja de la variedad a partir de los abiertos que cubren a G_0. De ello resulta que **tienen la misma topología**.

El grupo cociente G/G_0, cuyos elementos son las distintas hojas de la variedad, es un grupo discreto[1]

$$G/G_0 = \{d_k \cdot G_0 \mid d_1 = e,\ d_k \notin G_0, \text{para } k = 2, 3, \dots\} . \tag{1.10}$$

Esto permite reducir el estudio de grupos continuos no conexos a la consideración de los grupos continuos conexos (y de los grupos discretos).

Si G_0 es un grupo continuo conexo y D es un grupo discreto, buscamos reconstruir un grupo continuo no conexo cuyos elementos sean de la forma $d_k \cdot a$, con $d_k \in D$ y $a \in G_0$. La composición de dos de tales elementos

$$(d_k \cdot a) \cdot (d_l \cdot b) = (d_k \cdot d_l) \cdot (d_l^{-1} \cdot a \cdot d_l) \cdot b, \tag{1.11}$$

donde $(d_l^{-1} \cdot a \cdot d_l) \in G_0$, puesto que éste es un subgrupo invariante de G. En consecuencia, la conjugación por elementos del grupo discreto D, junto con las operaciones en D y G_0, determina completamente las propiedades de G.

Ejemplo: Sean $G_0 = SO(2)$ y $D = \{\mathbf{1_2}, S\} \approx \mathbb{Z}_2$ (ver ecs. (1.7) y (1.8)). Entonces, para $R(\theta) \in SO(2)$ tenemos $S^{-1}R(\theta)S = R(-\theta)$.

2. Grupos conexos - Grupos de Lie

Consideremos un elemento b de un grupo continuo conexo G. Existe una curva sobre la variedad del grupo que lo conecta con continuidad con el elemento neutro e. Sobre dicha curva podemos seleccionar elementos a_k, con $k = 0, 1, \dots N$ y N suficientemente grande, tales que

- $a_0 = e$, $a_N = b$,
- a_k y a_{k+1} están contenidos en un mismo abierto, de modo que pueden ser referidos a un mismo sistema local de coordenadas,
- $\forall\, k$, los productos $a_{k+1} \cdot a_k^{-1}$ están contenidos en un mismo entorno de la identidad, de modo que pueden ser referidos a un único sistema local de coordenadas establecido alrededor de e.

En esas condiciones, un elemento arbitrario $b \in G$ (conexo) puede escribirse como la composición de un gran número de elementos próximos de la identidad,

$$b = (a_N \cdot a_{N-1}^{-1}) \cdot (a_{N-1} \cdot a_{N-2}^{-1}) \cdot \dots (a_2 \cdot a_1^{-1}) \cdot (a_1 \cdot a_0^{-1}) \cdot a_0. \tag{2.1}$$

[1] En general, si H es un subgrupo invariante de un grupo continuo G, la dimensión del grupo cociente $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$, dado que los cosets $a \cdot H$ están caracterizados por ese número de parámetros independientes.

Esto muestra que las propiedades **locales** de la ley de composición, para elementos en un entorno de la identidad e, también contiene información sobre las **propiedades globales del grupo**.

Definición: Un **grupo de Lie** es un grupo continuo para el cual las funciones $\Phi(\alpha, \beta)$, que describen la ley de composición en términos de coordenadas locales, son **analíticas** en su dominio de definición.

Sean a, b dos elementos de un grupo de Lie G contenidos en un entorno de la identidad. Sea $c = a{\cdot}b$, y supongamos que todos esos elementos son suficientemente próximos de la identidad como para que puedan ser referidos a un mismo sistema local de coordenadas: $\phi_e(e) = \mathbf{0}$, $\phi_e(a) = \alpha$, $\phi_e(b) = \beta$, $\phi_e(c) = \gamma$. Entonces,

$$\gamma^\mu = \Phi^\mu(\alpha, \beta) \tag{2.2}$$

donde en el segundo miembro aparecen funciones analíticas de todas sus variables, las que pueden ser desarrolladas en serie de Taylor dentro de su círculo de convergencia. Por lo dicho anteriormente, los coeficientes de esos desarrollos no sólo permiten describir localmente la ley de composición, sino que también contienen información sobre las propiedades globales del grupo.

Ejemplos:

- El grupo de dilataciones en un espacio vectorial E, $x \mapsto a\,x$, con $x \in E$ y $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$, es un grupo de Lie de dimensión 1. La ley de composición es analítica en sus dos argumentos, $\Phi(a, b) = ab$.
- El grupo de traslaciones en $\mathbb{R}^n$, para el cual $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ es un grupo de Lie n-dimensional donde la ley de composición es $\Phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, analítica en todos sus argumentos.
- Todos los grupos de matrices que hemos definido anteriormente son grupos de Lie. Por ejemplo, si $U \in U(n) \Rightarrow U^\dagger U = \mathbf{1_n}$. Esta relación impone $n + 2n(n-1)/2 = n^2$ condiciones (reales), lo que deja n^2 parámetros reales independientes que determinan la matriz U. Entonces $U(n)$ es un grupo de Lie de dimensión n^2.
- Al subgrupo invariante $SU(n)$ se le impone además que $\det U = e^{i\theta} = 1 \Rightarrow \theta = 0$, lo que elimina un parámetro real adicional. Por lo tanto, se trata de un grupo de Lie de $\dim SU(n) = n^2 - 1$.
- Similarmente, los grupos ortogonales son grupos de Lie de dimensión $\dim O(n) = \dim SO(n) = n^2 - \{n + n(n-1)/2\} = n(n-1)/2$.

3. Propiedades globales de grupos conexos

Consideremos la variedad del grupo $U(1)$, la circunferencia $\mathcal{S}^1$. Se trata de un grupo conexo, pero existen diversas formas **no equivalentes** de conectar dos elementos de $U(1)$ mediante una curva sobre la variedad. En efecto, partiendo del primer elemento, es posible dar n vueltas a la circunferencia, en un sentido o en el otro, antes de alcanzar el segundo elemento. Esas curvas son ***no equivalentes*** en el sentido de que no es posible deformar ***con continuidad*** (sin salirse de la variedad) una de ellas en otra que dé un número diferente de vueltas sobre la circunferencia.

Esa noción puede hacerse más precisa introduciendo el **primer grupo de homotopía** de la variedad $\mathcal{M}$. Para ello, consideremos las curvas continuas sobre la variedad que empiezan y terminan en un mismo punto (es decir, aplicaciones de la circunferencia sobre la variedad, $\pi : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{M}$).

Se dice que dos curvas son **homotópicas** si es posible deformar una en la otra de manera continua, mediante desplazamientos sobre la variedad. Esto constituye una relación de equivalencia que permite definir clases de equivalencia de curvas homotópicas o **clases de homotopía**.

Dado que todas la curvas comienzan y terminan en el mismo punto, es posible definir una operación de composición entre clases de homotopía, donde el resultado de la composición de dos clases es la clase que contiene a la curva que se obtiene de prolongar una curva representante de la primera clase poniendo a continuación de ella una representante de la segunda clase.

Puede comprobarse que esta operación no depende de las curvas representantes elegidas en cada clase. También que esa ley de composición

- es asociativa,
- tiene un elemento neutro que corresponde a la clase de curvas que pueden contraerse con continuidad a un punto (curvas homotópicamente nulas),
- tiene un inverso para cada clase, correspondiente a la clase que contiene a una curva representante de la primera pero recorrida en sentido opuesto.

En consecuencia, respecto de esa ley de composición, el conjunto de clases de homotopía se estructura como un grupo (discreto), $\Pi_1(\mathcal{M})$, llamado **primer grupo de homotopía** de la variedad.

Se puede demostrar que el primer grupo de homotopía de un grupo de Lie conexo es siempre Abeliano (es decir, no importa en qué orden se compongan las curvas), y que no depende del punto sobre la variedad que se elija como origen de ellas (de modo que simplemente pueden considerarse clases de curvas cerradas sobre $\mathcal{M}$

que, a los efectos de definir una composición, se las deforma con continuidad hasta hacerlas coincidir en un punto).

Una variedad $\mathcal{M}$ se dice **simplemente conexa** si su grupo de homotopía es trivial, $\Pi_1(\mathcal{M}) \approx \mathbb{Z}_1$. Si $\Pi_1(\mathcal{M})$ es no trivial, $\mathcal{M}$ es **múltiplemente conexa**.

De acuerdo a las propiedades de sus variedades asociadas, los grupos de matrices son:

Grupo	**simplemente conexo**	**múltiplemente conexo**
$GL(n,\mathbb{C})$		$\star$
$SL(n,\mathbb{C})$	$\star$	
$GL(n,\mathbb{R})$		$\star$
$SL(n,\mathbb{R})$		$\star$
$SO(n)$		$\star$
$U(n)$		$\star$
$SU(n)$	$\star$	
$SO(1,1)$	$\star$	
$SO(n,1)$, $n \geq 2$		$\star$

Ejemplos: El grupo $O(2)$, que ya hemos considerado, no es conexo. Su componente conexa es el subgrupo $SO(2)$, cuya variedad es una circunferencia $\Rightarrow \Pi_1(SO(2)) \approx \mathbb{Z}$. En efecto, la composición de dos curvas que dan n y m vueltas alrededor de la circunferencia respectivamente es un curva que da $n+m$ vueltas, con $n, m \in \mathbb{Z}$.

La variedad del grupo $U(1)\otimes U(1)$ es un **toro** (o, equivalentemente, un rectángulo con los puntos opuestos sobre el borde identificados). Este es un grupo múltiplemente conexo, cuyo grupo de homotopía es $\Pi_1(U(1) \otimes U(1)) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$. En efecto, el par de enteros $\langle n, m \rangle$ que caracterizan a las clases de homotopía se refieren al número de vueltas que las curvas en esa clase describen a lo largo y alrededor del toro respectivamente. La ley de composición corresponde a $\langle n_1, m_1 \rangle \cdot \langle n_2, m_2 \rangle = \langle n_1 + n_2, m_1 + m_2 \rangle$.

Definición 3.1. Un grupo de Lie se dice **compacto** si su variedad (entendida como subconjunto de $\mathbb{R}^m$, para algún m) es una región compacta.

Ejemplo: $SU(2)$ es un grupo compacto y simplemente conexo, de dimensión 3.

Sus elementos son matrices unitarias unimodulares de 2×2:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = U^{\dagger} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

con $\det U = ad - bc = 1$. Entonces, $d = a^*$, $c = -b^*$.

Por lo tanto,

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \text{ con } \det U = |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{3.2}$$

En términos de las partes reales e imaginarias de esos parámetros, $a = x + iy$, $b = z + it$, tenemos

$$\det U = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \tag{3.3}$$

lo que determina una (hiper)esfera tridimensional de radio 1 en $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{S}^3$.

De ese modo, cada matriz del grupo $SU(2)$ está en correspondencia uno a uno con los puntos de $\mathcal{S}^3$, que puede ser considerada su variedad asociada.

Se trata evidentemente de una variedad compacta. Además, es simplemente conexa, dado que toda curva cerrada sobre una esfera de dimensión mayor o igual a 2 es homotópicamente nula.

El conjunto de las matrices de $SU(2)$ constituye una representación matricial de ese grupo, llamada **representación fundamental**. Esta representación es irreducible puesto que, por ejemplo, las **matrices de Pauli**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

que multiplicadas por i son elementos de $SU(2)$, no conmutan entre sí,

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{3.5}$$

y por lo tanto no pueden ser simultáneamente diagonalizadas.

Entonces, por el Teorema de Schur, toda matriz C en el centro de $SU(2)$ es proporcional a la identidad,

$$UC = CU, \ \forall\, U \in SU(2) \Rightarrow C = \lambda \mathbf{1_2}. \tag{3.6}$$

Y como $\det C = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Por lo tanto, el centro $\mathcal{C}$ de $SU(2)$ (que es un subgrupo invariante) es de orden 2,

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{1_2}, -\mathbf{1_2}\} \approx \mathbb{Z}_2. \tag{3.7}$$

Podemos ahora construir el grupo cociente entre $SU(2)$ y su centro, $SU(2)/\mathbb{Z}_2$, cuyos elementos son los cosets de la forma $U\,\mathbb{Z}_2 = \{U, -U\}$. Recordemos que la operación en $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ está dada por

$$U_1\,\mathbb{Z}_2 \cdot U_2\,\mathbb{Z}_2 = (U_1U_2)\mathbb{Z}_2. \tag{3.8}$$

Este grupo es homomorfo a $SU(2)$ por un homomorfismo $\phi : SU(2) \to SU(2)/\mathbb{Z}_2$ tal que $\phi(U) = U\,\mathbb{Z}_2 = \phi(-U)$, cuyo núcleo es el centro de $SU(2)$.

Como los cosets contienen matrices de $SU(2)$ que sólo difieren en su signo global, los elementos de cada coset corresponden a puntos diametralmente opuestos sobre la variedad $\mathcal{S}^3$.

Entonces, dentro de un entorno suficientemente pequeño de la identidad tendremos una correspondencia uno a uno entre los elementos de $SU(2)$ y los de $SU(2)/\mathbb{Z}_2$, con esencialmente la misma ley de composición (ver ec. (3.8)).

Es decir, el homomorfismo $\phi : SU(2) \to SU(2)/\mathbb{Z}_2$ restringido a un entorno de la identidad resulta ser una aplicación biunívoca. Por ese motivo los grupos $SU(2)$ y $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ se dicen **localmente isomorfos**.

Dado que puntos diametralmente opuestos sobre $\mathcal{S}^3$ corresponden al mismo coset, los elementos de $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con los de una hemiesfera tridimensional,

$$t = +\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0, \tag{3.9}$$

siempre que se tenga en cuenta que puntos diametralmente opuestos sobre su borde

$$t = 0 \Rightarrow \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 1 \tag{3.10}$$

corresponden al mismo elemento del grupo.

Vemos entonces que la variedad del grupo $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ tiene la topología de una esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$ (incluido su interior), con los puntos diametralmente opuestos sobre su borde identificados:

$$0 \leq \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \leq 1, \text{ con } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}, \text{ si } \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 1. \tag{3.11}$$

Para esta variedad hay sólo dos clases de curvas homotópicas:

- las curvas homotópicamente nulas, que pueden ser contraídas a un punto con continuidad,
- y las curvas homotópicas a un diámetro, que en esta variedad es una curva cerrada.

En efecto, es fácil ver que curvas cerradas que reaparecen un número par de veces por las antípodas son homotópicamente nulas, mientras que las que emplean esa posibilidad un número impar de veces son deformables con continuidad a un diámetro de la esfera.

Por lo tanto, $\Pi_1\left(SU(2)/\mathbb{Z}_2\right) \approx \mathbb{Z}_2$, y ese grupo de Lie es compacto y **doblemente conexo**.

Ejemplo: Los elementos del grupo de rotaciones $SO(3)$ (que ya hemos considerado) están unívocamente determinados por un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$, que apunta en la dirección del eje de rotación, y por el ángulo de rotación $\theta \in [-\pi, \pi]$, siempre que se tenga en cuenta que rotar en un ángulo $-\pi$ alrededor de un eje es equivalente a rotar en $+\pi$ alrededor del mismo eje.

Entonces, los elementos de $SO(3)$ están en correspondencia uno a uno con los puntos de una esfera de radio π en $\mathbb{R}^3$ (incluido su interior), que tiene identificados los puntos diametralmente opuestos sobre su borde. En consecuencia, la variedad de $SO(3)$ tiene la misma topología[2] que la del grupo $SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

Por lo tanto, $SO(3)$ es un grupo de Lie compacto y doblemente conexo.

Ejemplo: Se puede mostrar que el grupo $SU(n)$ es compacto y simplemente conexo. Además, su representación fundamental (que coincide con el propio grupo) es irreducible.

En consecuencia, por el teorema de Schur, su centro $\mathcal{C}$ contiene matrices proporcionales a la identidad, tales que $\det(\lambda \mathbf{1_n}) = \lambda^n = 1 \Rightarrow \lambda_p = e^{2i\pi p/n}$, con $p = 0, 1, \ldots, n-1$. Es decir, $\mathcal{C} \approx \mathbb{Z}_n$.

El grupo cociente $SU(n)/\mathbb{Z}_n$ (cuyos elementos son los cosets $U\,\mathbb{Z}_n$) es homomorfo a $SU(n)$ por un homomorfismo $\phi : SU(n) \to SU(n)/\mathbb{Z}_n$ de núcleo $\phi^{-1}(e_{SU(n)/\mathbb{Z}_n}) = \mathcal{C} \approx \mathbb{Z}_n$. Pero en un entorno suficientemente pequeño de la identidad, este homomorfismo establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de esos dos grupos, los que entonces resultan localmente isomorfos.

Sobre la variedad del grupo cociente $SU(n)/\mathbb{Z}_n$ podemos trazar curvas cerradas (que unen elementos en el centro de $SU(n)$) de la forma

$$U_p(\alpha) = \operatorname{diag}\left(e^{2i\pi\alpha p/n}, \ldots, e^{2i\pi\alpha p/n}, e^{-2i\pi(n-1)\alpha p/n}\right), \tag{3.12}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$ y $p = 0, 1, \ldots, n-1$, tales que

$$U_p(\alpha = 0) = \mathbf{1_n}, \quad U_p(\alpha = 1) = e^{2i\pi p/n}\mathbf{1_n}. \tag{3.13}$$

Nótese que

$$\det U_p(\alpha) = e^{2i\pi(n-1)\alpha/n} e^{-2i\pi(n-1)\alpha/n} = 1, \ \forall\, \alpha. \tag{3.14}$$

Por otra parte, la composición de $U_p(\alpha)$ con $U_q(\alpha)$ resulta en una curva homotópica con $U_{p+q|_{mod\, n}}(\alpha)$.

[2]Más adelante mostraremos que $SO(3) \approx SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

Entonces, para $SU(n)/\mathbb{Z}_n$ existen n clases de curvas homotópicas (caracterizadas por contener a las $U_p(\alpha)$), y el primer grupo de homotopía es $\Pi_1(SU(n)/\mathbb{Z}_n) \approx \mathbb{Z}_n$.

En resumen, el grupo $SU(n)/\mathbb{Z}_n$, compacto y múltiplemente conexo, tiene un primer grupo de homotopía que es isomorfo al núcleo del homomorfismo que lo relaciona con $SU(n)$,

$$\Pi_1(SU(n)/\mathbb{Z}_n) \approx \mathbb{Z}_n \approx \phi^{-1}(e_{SU(n)/\mathbb{Z}_n}). \tag{3.15}$$

Este resultado es un caso particular de un teorema de validez general, que se enuncia en la siguiente Sección.

4. Grupo de cubrimiento universal

Señalemos primero que homomorfismos de núcleo discreto respecto de un mismo grupo de Lie simplemente conexo (relaciones que en un entorno de la identidad se reducen a isomorfismos locales), permiten ordenar a los grupos de Lie conexos en **clases de grupos localmente isomorfos**. Dos grupos de Lie están en la misma clase si ambos son homomorfos a un mismo grupo de Lie simplemente conexo por un homomorfismo de núcleo discreto.

Teorema 4.1. *Dado un grupo de Lie conexo G, con un primer grupo de homotopía (discreto) $\Pi_1(G) = H$, existe un grupo de Lie simplemente conexo $\overline{G}$, al cual G es homomorfo por un homomorfismo $\phi : \overline{G} \to G$ de núcleo $\phi^{-1}(e_G) \approx H$. Además, en esas condiciones es $G \approx \overline{G}/H$.*

El grupo $\overline{G}$ es llamado **grupo de cubrimiento universal** de (la clase de grupos localmente isomorfos a) G.

Ahora veremos que todos los grupos de Lie conexos pertenecientes a una clase de grupos localmente isomorfos pueden ser construidos a partir del grupo de cubrimiento universal de esa clase.

En efecto, sea H un subgrupo propio discreto invariante de un grupo de Lie simplemente conexo $\overline{G}$. Entonces, el grupo cociente $G = \overline{G}/H$ es un grupo de Lie mútiplemente conexo, homomorfo a $\overline{G}$ por un homomorfismo de núcleo H, y que resulta localmente isomorfo a $\overline{G}$.

En consecuencia, la enumeración de todos los grupos localmente isomorfos a un grupo de Lie simplemente conexo $\overline{G}$ se reduce a la determinación de todos sus subgrupos discretos invariantes.

Así, la clasificación de todos los grupos de Lie conexos se reduce a la determinación de todos los grupos de Lie simplemente conexos y de sus subgrupos discretos invariantes.

En particular, dos grupos de Lie conexos localmente isomorfos son

- o bien globalmente isomorfos,
- o bien ambos homomorfos a un mismo grupo de Lie simplemente conexo.

Por lo anteriormente dicho, si $\overline{G}$ es simplemente conexo, todo grupo de Lie conexo G localmente isomorfo a $\overline{G}$ puede obtenerse como el grupo cociente $\overline{G}/H \approx G$, donde $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_k, \dots\}$ es un subgrupo discreto invariante de $\overline{G}$.

En esas condiciones, dado $g \in \overline{G}$,

$$g \cdot h_k \cdot g^{-1} = h_l \in H. \tag{4.1}$$

Nótese que en el miembro de la izquierda se puede modificar con continuidad a g, que es un elemento genérico de $\overline{G}$, mientras que el miembro de la derecha está fijo, puesto que H es discreto.

Además, como $\overline{G}$ es simplemente conexo, el elemento g se conecta con el neutro e mediante una curva continua sobre el grupo, $g \mapsto e$, lo que implica que es posible variar con continuidad el primer miembro de la ec. (4.1) de manera tal que $g \cdot h_k \cdot g^{-1} \mapsto e \cdot h_k \cdot e^{-1} = h_k$. Y este elemento debe coincidir con el del segundo miembro de la ec. (4.1).

Por lo tanto, $\forall\, h_k \in H$ tenemos

$$g \cdot h_k \cdot g^{-1} = h_k \Rightarrow g \cdot h_k = h_k \cdot g,\ \forall\, g \in \overline{G}. \tag{4.2}$$

En consecuencia, todo subgrupo discreto invariante H de $\overline{G}$ está contenido en su centro[3]. Esto implica, en particular, que todo subgrupo discreto invariante de $\overline{G}$ es Abeliano.

Sea $\mathcal{C}$ el centro de un grupo de Lie simplemente conexo $\overline{G}$, y sea $H \subset \mathcal{C}$, un subgrupo propio discreto invariante. El grupo cociente $G = \overline{G}/H$ es homomorfo (y localmente isomorfo) a $\overline{G}$ por un homomorfismo de núcleo H.

Teniendo en cuenta que los puntos en la variedad de $\overline{G}$ identificados con los elementos de H corresponden al mismo elemento (coset) de $\overline{G}/H$, se concluye que las clases de homotopía de G contienen curvas ***cerradas*** que conectan la identidad con los distintos elementos de H, $e \mapsto h_k$. Dado que la composición de dos de tales

[3]Las representaciones fundamentales de los grupos clásicos de matrices son irreducibles, lo que implica que los elementos en el centro del grupo son todos proporcionales a la matriz identidad.

curvas corresponde a una curva homotópica a $e \mapsto (h_k \cdot h_l)$, se ve que el primer grupo de homotopía de $G = \overline{G}/H$ es $\Pi_1(\overline{G}/H) \approx H$, en concordancia con el teorema anterior.

No obstante, los grupos de homotopía no clasifican, en general, a los grupos de Lie conexos localmente isomorfos a $\overline{G}$. En efecto, es posible que dentro del centro $\mathcal{C}$ de $\overline{G}$ puedan hallarse dos subgrupos invariantes distintos pero isomorfos,

$$H_1, H_2 \subset \mathcal{C}, \quad H_1 \neq H_2, \qquad H_1 \approx H_2. \tag{4.3}$$

En ese caso, los grupos cociente $G_1 = \overline{G}/H_1$ y $G_2 = \overline{G}/H_2$ tendrán grupos de homotopía isomorfos, $\Pi_1(G_1) \approx H_1 \approx H_2 \approx \Pi_1(G_2)$, pero en general no serán globalmente isomorfos entre sí, $G_1 \not\approx G_2$.

El caso de $SU(2)$ es particular, porque su centro $\mathcal{C} \approx \mathbb{Z}_2$ no tiene subgrupos propios, de modo que sólo se tienen dos posibilidades,

$$\Pi_1(SU(2)) \approx \mathbb{Z}_1, \quad \Pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2. \tag{4.4}$$

Todo otro grupo localmente isomorfo a $SU(2)$ (grupo de cubrimiento de su clase)

- o bien es simplemente conexo y, por lo tanto, globalmente isomorfo a $SU(2)$,
- o bien es doblemente conexo y, por lo tanto, globalmente isomorfo a $SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

Finalmente, consideremos una representación matricial $D(g)$ del grupo $G \approx \overline{G}/H$. Dado que existe un homomorfismo $\phi : \overline{G} \to G$, ella induce una representación matricial para el grupo $\overline{G}$, definida por $\Gamma(\overline{g}) := D(\phi(\overline{g}))$, con $\overline{g} \in \overline{G}$. En efecto, $\forall\, \overline{g}_1, \overline{g}_2 \in \overline{G}$ tenemos

$$\begin{gathered} \Gamma(\overline{g}_1)\Gamma(\overline{g}_2) = D(\phi(\overline{g}_1))D(\phi(\overline{g}_2)) = \\ = D(\phi(\overline{g}_1) \cdot \phi(\overline{g}_2)) = D(\phi(\overline{g}_1 \cdot \overline{g}_2)) = \Gamma(\overline{g}_1 \cdot \overline{g}_2). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Pero si $\Gamma(\overline{g})$ es una representación del grupo $\overline{G}$, ella dará lugar, en general, a una **representación proyectiva** (o multivaluada) de G.

Una representación de $\overline{G}$ sólo inducirá una representación ordinaria de G si

$$\Gamma(h_k) = \Gamma(e_{\overline{G}}) = \mathbf{1_r}, \ \forall\, h_k \in H = \phi^{-1}(e_G). \tag{4.6}$$

En ese caso se puede establecer un homomorfismo entre $\overline{G}/H \approx G$ y el grupo de matrices $\{\overline{\Gamma}(\overline{g} \cdot H) := \Gamma(\overline{g}), \forall\, \overline{g} \cdot H \in \overline{G}/H\}$, y definir $D(g) := \Gamma(\overline{g})$, donde $g = \phi(\overline{g})$.

En consecuencia, el problema de la determinación de las representaciones de un grupo de Lie conexo G se reduce a hallar todas las representaciones ordinarias de su grupo de cubrimiento $\overline{G}$, para luego seleccionar de entre ellas las representaciones ordinarias del primero.

Bibliografía:

- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires.*
- R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications.*